

## 基于容积约束 Power 图的图像分片逼近\*

刘红伟<sup>1</sup>, 曹娟<sup>2</sup>, 陈中贵<sup>1</sup>



<sup>1</sup>(福建省智慧城市感知与计算重点实验室(厦门大学), 福建 厦门 361005)

<sup>2</sup>(厦门大学 数学科学学院, 福建 厦门 361005)

通讯作者: 陈中贵, E-mail: chenzhonggui@xmu.edu.cn

**摘要:** 给出一种在容积约束 Power 图结构上的图像分片多项式逼近方法. 将 Power 图的权重与图像颜色信息相关联, 设计了一种带容积约束 Power 图的顶点位置与权值交替优化的图像逼近算法. 该算法运用误差反馈机制以及图像显著性检测等方法生成密度函数图像, 并根据原始图像的颜色信息和得到的密度函数图像分两次来指导初始化点集生成, 通过构建最终的 Power 图来逼近目标图像. 利用 Power 图对目标图像进行区域分割, 定义了度量逼近误差的带容积约束的优化能量函数, 分别计算能量函数关于位置和权重的梯度, 将原问题分解为两个子问题分而治之, 借助密度函数图像生成的高效初始化点分布, 通过不断更新 Power 图的顶点位置和权值得到相对较优的 Power 图, 最终拟合出逼近图像. 实验结果表明, 该算法能够较好地逼近彩色图像, 并有效保持了图像显著区域的特征.

**关键词:** Power 图; 图像逼近; 显著性检测; 误差反馈机制; 容积约束

中文引用格式: 刘红伟, 曹娟, 陈中贵. 基于容积约束 Power 图的图像分片逼近. 软件学报, 2016, 27(Suppl. (2)): 184-196.  
<http://www.jos.org.cn/1000-9825/16033.htm>

英文引用格式: Liu HW, Cao J, Chen ZG. Image approximation on capacity-constrained power diagram. Ruan Jian Xue Bao/ Journal of Software, 2016, 27(Suppl. (2)): 184-196 (in Chinese). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/16033.htm>

## Image Approximation on Capacity-Constrained Power Diagram

LIU Hong-Wei<sup>1</sup>, CAO Juan<sup>2</sup>, CHEN Zhong-Gui<sup>1</sup>

<sup>1</sup>(Fujian Key Laboratory of Sensing and Computing for Smart City, School of Information Science and Engineering, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

<sup>2</sup>(School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

**Abstract:** This paper proposes a novel method for piecewise polynomial image approximation based on the capacity-constrained power diagram. By associating the weights of a power diagram with the image color information, an efficient image approximation algorithm is designed which alternately optimizes the positions and the weights of a capacity-constrained power diagram. This method defines the density function by using error feedbacks and the saliency information of the original image, which guides the generation of the initial point distributions in the optimization. It solves the color image approximation problem by constructing the optimal power diagram. A capacity-constrained energy function is defined to measure the approximate error based on power diagram, and the explicit formulas are given for computation of the gradients of the energy function. The optimization of the energy function is converted into two sub-problems, which are tackled by alternately moving the point positions and updating the weights of the points of the power diagram. Experimental results show the correctness and efficiency of the method above.

**Key words:** Power diagram; image approximation; salient region detection; error feedback mechanism; capacity-constrained

由于图像在某点的颜色值可以看做某个函数在该点的函数值, 因此图像逼近问题, 本质上也属于函数逼近

\* 基金项目: 国家自然科学基金(61472332, 61100105); 福建省自然科学基金(2015J01273); 中央高校基本科研业务费专项基金(20720140520, 20720150002)

Foundation item: National Natural Science Foundation of China (61472332, 61100105); Natural Science Foundation of Fujian Province of China (2015J01273); Fundamental Research Funds for the Central Universities (20720140520, 2072015 0002)

收稿时间: 2016-05-10; 采用时间: 2016-09-07

问题.本文问题的数学模型是将图像看做一个目标函数,对该目标函数,在其定义域上生成一个新函数,使二者之间的误差尽可能小.本文采用多项式分片逼近的方法,通常需要在目标函数的定义域上构造多个新函数来逼近它,即采用分片的方式对目标函数进行逼近.对目标函数定义域的分割有许多方法,例如 Chen 等人<sup>[1]</sup>利用 Voronoi 剖分的方法,最终将函数逼近问题转换为区域分割问题.这类区域分割问题有两个主要追求目标,一是在保证逼近质量的前提下,致力于减少分割出的区域数量;另一个是在区域分割数量一定的条件下,提高分割的质量,最终来提高逼近质量.然而由于 Voronoi 图固有的性质,不能充分表达原始图像的颜色信息变化,导致最终的区域分割效果相对较差,而且不够灵活,不能解决一些特殊的图像逼近问题.本文以此为出发点,提出在 Power 图上构造图像的分片多项式逼近,利用 Power 图对目标图像,即目标函数的定义域进行有效分割,充分挖掘 Power 图更多的优化自由度.同时利用图像处理技术,主要有误差反馈机制、图像显著性检测以及数学形态学中对图像像素的操作等,来提高逼近质量和减少算法执行所需的时间.对于目标函数与逼近函数之间的误差,本文定义了一个度量这种误差的带容积约束的能量函数,并通过本文的算法减少能量函数值来减少逼近误差.实验结果表明,对于 RGB 彩色图像的逼近,本文带容积约束的图像多项式分片逼近算法与其他方法相比,效果相对较好,逼近更加灵活,可以更好保持图像显著区域的特征,而且算法运行所需时间更少.本文的主要贡献如下:

- 提出将 Power 图的权重与图像颜色信息相关联来解决图像逼近问题,与以往的方法相比,该方法具有更多的灵活性,逼近效果相对更好.
- 定义了度量逼近误差的带容积约束的能量函数,将原问题分解为两个子问题,并设计出一种带容积约束的顶点位置与权重交替优化的多项式分片逼近算法.
- 提出使用误差反馈机制、图像显著性检测以及数学形态学中对图像像素操作的技术来生成指导初始化点分布的密度函数图像,为带容积约束的多项式分片逼近算法提供了更好的初始化.合理的初始化点分布有助于对减少算法的执行时间和提高最终的逼近质量.

## 1 相关工作

图像逼近因其在实际中的广泛应用而一直被学者们所关注,提出了许多高效的算法以及其他研究成果.图像逼近的一般方法是识别图像的特征,依据图像特征用不同的方法提取出图像的几何信息,然后利用这些提取到的几何信息拟合图像的像素,最终实现图像的逼近.Lecot 和 Lévy<sup>[2]</sup>提出了一种用于图像几何信息提取和将位图转换为矢量图的算法,这一算法能够自动地计算向量元和梯度的集合,从而很好地逼近图像.该方法基于一种变分的分割算法,可以更好适应图像的特征,同时也注重逼近一些重要区域的细节,这些区域或者来自于用户选择的重要区域,或者来自于眼球的追踪数据.甘涛等人<sup>[3]</sup>提出了基于互相关估计的快速图像逼近算法,可以有效地降低单次迭代内积的运算复杂度,这样可降低总的复杂度.彭洲等人<sup>[4]</sup>提出了基于 Tetrolet 变换的图像稀疏逼近算法,用于克服图像逼近算法通用性不强的缺点,这是一种不受图像特征限制的图像稀疏逼近算法.

也有学者提出应用数据依赖三角化的逼近方法<sup>[2,5-7]</sup>,他们利用数据依赖三角形对图像区域进行分割,并利用每个三角形内的像素簇来拟合出原始图像.然而由于图像不同部分像素的剧烈变化,特别是图像的轮廓线处,其变化不连续.为了在逼近图像中拟合出这些剧烈的变化,需要在这些地方使用更多的三角形,特别是小三角形.其中 Dyn 和 Levin<sup>[5]</sup>利用三角形的顶点位置信息来构建三角剖分.Kreylos 和 Hamann<sup>[6]</sup>利用模拟退火算法来实现对顶点位置的控制,选择点的集合并且改变三角形,获得顶点位置和三角形,再拟合出最终的逼近图像.Su 和 Willis<sup>[7]</sup>则提出在像素级别上应用数据依赖三角化的图像插值方法,这种方法可以应用于任意分辨率图像的增强以及在连续空间内对静态图像的任意旋转等操作,高分辨率的图像是从低分辨率的图像在像素级别上的数据依赖三角形中插值得到的.Li 和 Adams<sup>[8]</sup>与前面 3 者的数据依赖三角化方法有所不同,作者的框架基于三角网格的生成,但是认识到统一采样会造成某些区域点密度过高而在其他区域点密度过低的弊端,巧妙地利用图像中的依附于对象边界的几何结构,提出了非统一采样技术,即通过不断的向三角网格中适当的位置加点的策略来生成三角网格.

另有学者提出利用 Voronoi 图的理论在 Voronoi 图上进行分片逼近函数的方法,Chen 等人<sup>[1]</sup>同时实现了分

片常量逼近、分片线性逼近和分片二次逼近,利用 Voronoi 剖分拟合出逼近图像.肖艳阳等人<sup>[9]</sup>则在 Voronoi 图的理论上,提出了基于重心坐标的分片函数逼近方法,并将其应用在图像逼近问题上.Aurenhamme<sup>[10]</sup>提出一种在有界区域内生成带容积约束的 Power 图的方法,这种方法可用于多种距离度量方程,像加法带权 Power 图<sup>[11]</sup>和乘法带权 Power 图<sup>[12]</sup>等.Nivoliers 和 Lévy<sup>[2]</sup>利用带约束的 Voronoi 图,通过优化一个度量逼近质量的能量函数来实现分片常量逼近.受此启发,本文利用计算几何中更加通用的 Power 图的相关理论,将原始图像的颜色信息与 Power 图的权重关联起来,再辅之以误差反馈机制、图像显著性检测以及数学形态学中对像素操作的技术,提出了一种带容积约束的顶点位置与权重交替优化的多项式分片逼近算法,来解决图像逼近的问题.

## 2 背景知识

Power 图在数学和其他科学领域已经被研究了相当长时间,它在背包问题、覆盖范围问题、照明问题等方面扮演着非常重要的角色,甚至在结晶学、冶金学和经济学中也有着许多实际应用<sup>[10]</sup>.根据 Power 距离定义的不同,Power 图有许多不同的版本,本文所用的 Power 图的数学描述如下:假定二维平面区域  $D \in \mathbb{R}^2$  上有带有权重的顶点构成了集合  $X = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$ ,每个点  $\mathbf{x}_i \in X$  对应的权重为  $w_i$ ,所有的点对应的权重构成了集合  $W = \{w_i\}_{i=1}^N$ , $D$  上任意一点  $\mathbf{x}$  到点  $\mathbf{x}_i$  的 Power 距离定义为  $pow(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^2 - w_i$ ,于是点  $\mathbf{x}_i$  对应的 Power 区域  $v_i$  是到  $\mathbf{x}_i$  的 Power 距离小于等于到任意  $\mathbf{x}_j \in X - \{\mathbf{x}_i\}$  的 Power 距离的顶点的集合,即  $v_i = \{\mathbf{x} \in D | pow(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \leq pow(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j)\}, i=1, \dots, N$ ,不考虑整个定义域的无限区域, $v_i$  一般来说是一个凸多边形区域,所有点的 Power 区域构成了  $D$  的一个划分,即 Power 图,记为  $V = \{v_i\}_{i=1}^N$ .

图 1 是 Voronoi 图和 Power 图的对比示意图,为了简单说明,这里给出 13 个点的 Voronoi 图和 13 个相同坐标点的 Power 图,其中绿色的圆圈表示对应点的权重.根据 Power 图中 Power 距离的定义易知,当不同点权重相等时 Power 图即为 Voronoi 图.Power 图是 Voronoi 图的推广,与 Voronoi 图相比灵活性更强,将原始图像中的颜色信息与 Power 图中的顶点位置和权重关联起来,能够很好地捕获图像中比较尖锐的轮廓和区域,用于图像逼近具有更多的优势.

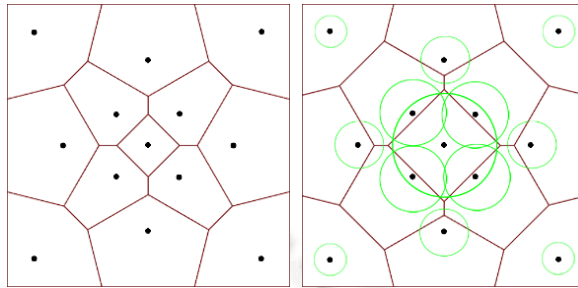


Fig.1 Comparison of Voronoi diagram(left) and Power diagram(right)

图 1 Voronoi 图(左)与 Power 图(右)的对比示意图

## 3 带容积约束的图像分片逼近算法

### 3.1 能量函数的定义与优化

图像可以看做一个分片常数的函数  $F: \Omega \rightarrow C$ ,其定义域  $\Omega = \{0, \dots, w-1\} \times \{0, \dots, h-1\}$  是宽为  $w$ ,高为  $h$  的规则网格,值域  $C$  是颜色空间,通常是三维的,例如 RGB 空间.因此彩色图像的逼近问题可以看成是函数的多项式逼近问题.多项式逼近问题的实质可以理解为将任意目标函数表达为多项式空间的一组基底的线性组合.本文采用带容积约束的分片多项式逼近方法,将图像用 Power 图分割成  $N$  个子区域,则图像函数  $F(\mathbf{x})$  可以由各个子区域上的多项式分片逼近,记为  $F^*(\mathbf{x})$ .如果 Power 图划分已给定,则逼近函数  $F^*(\mathbf{x})$  可以通过求解一个最小二乘问题而唯一确定.因此,逼近误差大小完全取决于目标函数定义域的 Power 图剖分,即由 Power 图顶点位置

$X = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$  和权值  $W = \{w_i\}_{i=1}^N$  决定.因此,本文定义度量逼近误差的带容积约束的能量函数如下:

$$\min_{X,W} E(X,W) = \min_{X,W} \sum_{i=1}^N \int_{v_i} \|F(\mathbf{x}) - F^*(\mathbf{x})\|^2 d\mathbf{x}, \quad (1)$$

$$\text{满足 } \int_{v_i} \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = m,$$

其中  $\rho(\mathbf{x})$  为用户定义的密度函数,  $m$  为常数,用于控制 Power 区域  $v_i$  的大小.本文的目标是在优化逼近误差函数的同时,使每个顶点的 Power 区域内的像素的总质量都等于常量  $m$ ,这里  $m$  定义为每个 Power 区域的容积,  $m$  取图像中所有像素的总质量的  $1/N$ .

以 RGB 三通道的彩色图像为例,它的红色通道、绿色通道和蓝色通道 3 个通道在某点  $\mathbf{x}$  处的颜色值可以看做是 3 个函数的函数值,将这 3 个函数分别记为  $R(\mathbf{x})$ 、 $G(\mathbf{x})$ 、 $B(\mathbf{x})$ ,逼近函数分别记为  $R^*(\mathbf{x})$ 、 $G^*(\mathbf{x})$ 、 $B^*(\mathbf{x})$ .实验表明,若分别逼近这 3 个函数,再将最终的 3 个函数值合成彩色 RGB 图像,会产生 3 个不同的 Power 图,而且计算量将增加,逼近效率也将下降.因此本文在同一个图像上同时逼近这 3 个函数,于是在每个子区域上的逼近误差可以表示为下式

$$\|F(\mathbf{x}) - F^*(\mathbf{x})\|^2 = |R(\mathbf{x}) - R^*(\mathbf{x})|^2 + |G(\mathbf{x}) - G^*(\mathbf{x})|^2 + |B(\mathbf{x}) - B^*(\mathbf{x})|^2$$

通过上述优化能量函数的定义可知,本文方法需求解一个带约束条件的最小值问题.然而,由于对每个子区域的容量进行了非常精确的限制,要满足其容积为  $m$ ,这样能量函数与约束条件之间存在着非常复杂的关系,使得很难直接采用现有的优化算法进行优化.为了简化问题,我们将问题(1)转为如下两个子问题:

$$\min_X E_1(X,W) = \min_X \sum_{i=1}^N \int_{v_i} \|F(\mathbf{x}) - F^*(\mathbf{x})\|^2 d\mathbf{x} \quad (2)$$

$$\min_W E_2(X,W) = \min_W \left| \sum_{i=1}^N \int_{v_i} \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - m \right|^2 \quad (3)$$

式(2)通过优化顶点位置,极小化逼近误差;式(3)通过优化 Power 图的顶点权重,使得每个顶点对应的 Power 区域满足约束条件.

本文从这两个子问题的属性出发,利用密度函数图来指导初始化点分布,设计了一种顶点位置与权重交替优化的带容积约束的图像多项式分片逼近算法,下面给出本文算法的整体框架.

**算法 1.** 带容积约束的图像逼近算法.

输入:原始图像,初始化顶点集合  $X$ ,最大迭代次数  $I_{max}$ .

输出:Power 图和生成的逼近图像.

Step1. 对原始图像和初始化顶点集合,执行顶点位置优化算法,生成粗糙的逼近图像.

Step2. 以 Step1 生成的粗糙图像和原始图像为输入,执行密度函数图像生成算法,生成最终的密度函数图像.

Step3. 根据最终密度函数图像再次初始化顶点集合.

Step4. 交替执行顶点位置优化算法和权重优化算法,直到迭代次数大于  $I_{max}$ .

Step5. 在得到的 Power 图上计算分片多项式逼近,生成最终逼近图像.

本文要处理的是一个初始化顶点的集合,需要对 Power 图顶点的位置和权重同时考虑,后文将对算法框架中的子算法和参数调整展开详细的讨论.实验结果表明,这种带容积约束的多项式分片逼近算法,在彩色图像逼近问题上取得了较好的效果,而且更加灵活,因此是求解本文问题的可行算法.

### 3.2 顶点位置的优化算法

由于本文的优化问题是多变量优化问题,在设计顶点位置优化算法时,将权重看做常量,设计权重优化算法时,将顶点位置看做常量.先讨论顶点位置优化算法,这里需要先求出其关于位置的梯度.用  $\Omega_i$  来表示顶点  $\mathbf{x}_i$  的邻域点的序号集合,为了求出能量函数  $E_1(X,W)$  关于顶点  $\mathbf{x}_i$  的偏导数,只需关心与  $\mathbf{x}_i$  有关的项.由此,求解能量函数对顶点  $\mathbf{x}_i$  的偏导数有

$$\nabla_{x_i} E_1(X, W) = \nabla_{x_i} \sum_{j \in \{i\} \cup \Omega_i} \int_{v_j} \left( \|F(x) - F^*(x)\|^2 \right) dx$$

观察易知,积分变量同时出现在积分区域与被积函数之中,因此可以使用广义莱布尼茨规则<sup>[13]</sup>来简化上述公式.广义莱布尼茨规则的正式数学描述是:给定一个关于时间变量  $t$  连续光滑的二维平面区域  $D_t \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, t)$  是给定的在  $D_t$  上的一个连续函数,其中  $x \in D_t, v = \nabla_x x$  表示  $D_t$  的区域边界  $\partial D_t$  上关于变量  $x$  的矢量函数,  $\partial D_t$  上方向指向外的单位法向量表示为  $n$ , 则一般形式的莱布尼茨公式为

$$\nabla_t \int_{D_t} f(x, t) dx = \int_{D_t} \nabla_t f(x, t) dx + \int_{\partial D_t} f(\partial D_t) v \cdot nds$$

这里,  $ds$  表示  $D_t$  的区域边界  $\partial D_t$  上的弧长元素. 根据此莱布尼茨公式, 可以将能量函数关于变量  $x_i$  的偏导数改写为

$$\nabla_{x_i} E_1(X, W) = \sum_{j \in \{i\} \cup \Omega_i} \int_{v_j} \nabla_{x_i} \left( \|F(x) - F^*(x)\|^2 \right) dx + \sum_{j \in \Omega_i} \int_{e_{ij}^*} \nabla_{x_i} \left( \|F(x) - F_i^*(x)\|^2 - \|F(x) - F_j^*(x)\|^2 \right) \nabla_{x_i} x \cdot nds \quad (4)$$

这里,  $e_{ij}^*$  表示  $v_i$  与  $v_j$  的公共边界. 上式等号右边第 1 项, 根据文献[14]中的包络定理有

$$\int_{v_j} \nabla_{x_i} \left( \|F(x) - F_j^*(x)\|^2 \right) dx = 0 \quad (5)$$

根据 Power 图的性质, 当所有顶点的权重相等或者为 0 时, 顶点  $x_i$  与顶点  $x_j$  的 Power 区域的公共边界  $e_{ij}^*$  恰好为它们的垂直平分线, 于是对于公共边界  $e_{ij}^*$  上的顶点  $x$  有  $(x - 0.5(x_i + x_j)) \cdot (x_j - x_i) = 0$  两边同时关于  $x_i$  求偏导数, 整理后有  $\nabla_{x_i} x = (x - x_i) / (x_j - x_i)$ , 于是得到

$$\nabla_{x_i} x \cdot n = (x - x_i) / \|x_j - x_i\| \quad (6)$$

将式(5)和式(6)代入式(4)有

$$\nabla_{x_i} E_1(X, W) = \sum_{j \in \Omega_i} \int_{e_{ij}^*} \nabla_{x_i} \left( \|F(x) - F_i^*(x)\|^2 - \|F(x) - F_j^*(x)\|^2 \right) (x - x_i) / \|x_j - x_i\| ds.$$

上式即为能量函数关于顶点的梯度公式, 利用该梯度公式, 即可设计本文更新 Power 图顶点的位置优化算法.

本文对能量函数  $E_1(X, W)$  的优化属于数值优化的范畴, 实验发现, 已有的许多经典的高效算法, 例如 L-BFGS 算法以及文献[15]所用的基于梯度的新优化算法等对本文问题的优化效果并不好. Chen 等人<sup>[1]</sup>提出了改进的自适应地修正迭代步长的类似梯度优化算法, 其算法的基本思想是将每次迭代中梯度下降的步长除以梯度的模长, 这样就修正了梯度下降的方向, 强制地更新顶点的位置, 使算法达到指定的迭代次数. 本文直接借鉴其算法思想, 设计了顶点位置的优化算法, 具体过程如下. 首先, Power 图顶点的位置的更新按照如下的公式进行

$$x_i^{[j+1]} = x_i^{[j]} - \lambda_i^{[j]} \frac{\partial E(X, W)}{\partial x_i} \left/ \left\| \frac{\partial E(X, W)}{\partial x_i} \right\|, i = 1, \dots, N,$$

其中  $x_i^{[j]}$  与  $x_i^{[j+1]}$  分别表示连续两次迭代过程中顶点  $x_i$  更新前和更新后的位置,  $j$  表示迭代的次序,  $\lambda_i^{[j]}$  表示每一次迭代过程用到的步长的系数变量, 它的控制对于本文算法的执行非常关键. 为了使它的值随着迭代次数的增加而减小, 按照如下的公式计算

$$\lambda_i^{[j]} = \lambda_i^{[0]} (0.5)^{\frac{j}{I_{\max} - j}}, i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, I_{\max} - 1,$$

其中,  $I_{\max}$  是给定的最大迭代次数,  $\lambda_i^{[0]}$  是 Power 图节点  $x_i$  的初始步长, 它的计算本文设计为与  $x_i$  所在的 Power 区域  $v_i$  的面积有关, 这样可以产生自适应的效果, 对能量函数的优化以及 Power 图的最终的顶点分布能够产生较好的影响, 其计算按照公式  $\lambda_i^{[0]} = \tau \sqrt{\text{area}(v_i)}$ ,  $i = 1, \dots, N$  进行, 这里的  $\tau$  是缩放因子, 在本文中它是一个至关重要的参数, 它决定了 Power 节点位置更新的快慢, 其值在迭代开始的时候设置为 0.5, 之后调整为 0.25.

### 3.3 顶点权重的优化算法

设计权重优化算法时, 将顶点位置看做常量. 对于给定的顶点集合  $X$ , 当密度函数为常数时, 对应的 Power 图

的每个 Power 区域的容积相等意味着面积也相等,而当密度函数不是常数时,对应的 Power 图的每个 Power 区域容积相等时,它们的面积可能是不相等的.图 2 分别示意了不同密度函数的 Power 图,其中左图的图像函数以纯亮色来示意为常数,右图的图像密度函数以颜色从左到右由暗变亮示意线性增加.由图可知,函数值越大,对应的 Power 区域的面积就越小,利用这一性质,将顶点的权重关联为每个 Power 区域的容积可以有效地捕捉到图像的几何特征,为图像逼近提供帮助,下面详细说明权重优化算法.

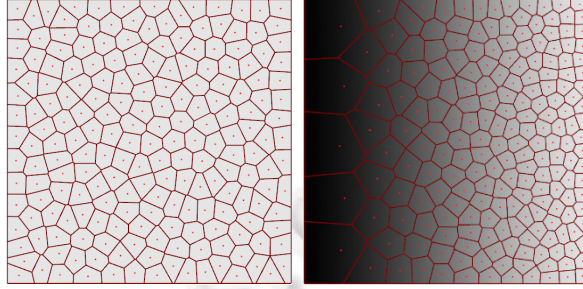


Fig.2 Power diagram with different density functions

图 2 不同密度函数图像的 Power 图对比

本文对于权重的优化,主要使每个 Power 区域的容积相等,将顶点位置看做常量,需要求出式(3)关于权重  $w_i$  的梯度.这里只需关心式(3)中与  $w_i$  有关的项,对权重  $w_i$  求偏导数

$$\nabla_{w_i} E_2(X, W) = 2|m_i - m| \nabla_{w_i} m_i + \sum_{j \in \Omega_i} 2|m_i - m| \nabla_{w_i} m_j \quad (7)$$

这里先求解出  $\nabla_{w_i} m_i$  和  $\nabla_{w_i} m_j$ , 再化简上式.根据约束条件方程,两边同时对  $w_i$  求导有

$$\nabla_{w_i} m_i = \nabla_{w_i} \int_{v_i} \rho(x) dx$$

这里  $\rho(x)$  表示上文提到的  $x$  点处的像素值,观察易知,积分变量同时出现在积分区域与被积函数中,再次依据前面提到的广义莱布尼茨公式,可以将上式改写为

$$\nabla_{w_i} m_i = \int_{v_i} \nabla_{w_i} \rho(x) dx + \sum_{j \in \Omega_i} \int_{e_{ij}^*} \rho(x) (\nabla_{w_i} x \cdot n) dx$$

其中,  $e_{ij}^*$  为第  $i$  和第  $j$  两个相邻 Power 区域的公共边界.上式右边第 1 项显然为 0,再根据文献[16]中关于 Power 图的性质,容易得到

$$\nabla_{w_i} m_i = \sum_{j \in \Omega_i} -0.5 \bar{\rho}_{ij} \|e_{ij}^*\| / \|e_{ij}\| \quad (8)$$

其中,  $e_{ij}$  表示两个相邻顶点之间的连线,  $\bar{\rho}_{ij}$  表示  $e_{ij}$  上密度的平均值,  $\| \cdot \|$  表示线段的长度,类似的推导过程可以得到

$$\nabla_{w_i} m_j = -0.5 \bar{\rho}_{ij} \|e_{ij}^*\| / \|e_{ij}\| \quad (9)$$

将式(8)和式(9)代入式(7)即可得到式(3)关于权重的梯度公式

$$\nabla_{w_i} E_2(X, W) = - \left( |m_i - m| \sum_{j \in \Omega_i} \bar{\rho}_{ij} \|e_{ij}^*\| / \|e_{ij}\| + \sum_{j \in \Omega_i} \bar{\rho}_{ij} |m_j - m| \|e_{ij}^*\| / \|e_{ij}\| \right)$$

对于给定的顶点集合  $X$ , 求最终的 Power 图使每个 Power 区域的容积相等,采用与位置优化算法类似的方法.这里为达到自适应优化步长控制,每一次迭代过程用到的步长的系数变量  $\lambda_i^{[l]}$  按公式  $\lambda_i^{[l]} = \tau |m - m_i|$ ,  $i=1, 2, \dots, N$ ;  $j=1, 2, \dots, Jmax-1$  计算,其中  $|m - m_i|$  表示第  $j$  次迭代过程中第  $i$  个 Power 区域  $v_i$  的容积与所有区域的平均容积的误差绝对值,  $\tau$  是缩放因子.实验证明,这里的  $\tau$  取 1.8 较为合适.算法终止条件是达到最大迭代次数 50.



优化完权重后,本可以让顶点带着权重继续优化位置的,然而由于 Power 图固有的性质,在优化位置的过程中,每个顶点带着权重容易出现退化现象,即出现某些 Power 区域内有多个顶点的情况,这对于基于 Power 图的位置优化算法的执行非常不利.这里运用文献[8,17,18]中常用的 Lloyd 算法将顶点移动到 Power 区域的重心位置,并将权重重置为 0 来解决这一问题,这样就为位置优化算法重新启动做足了准备,实验证明效果相对较好.

#### 4 密度函数图像生成算法

本文的初始化点分布采用误差扩散算法,不同的初始化点分布对图像的逼近效果影响较大,如图 3 所示,(a)表示直接在原图上利用误差扩散算法初始化后的点分布,这样的初始化对于一些离老虎较远的点可能经过很多次的位置更新也无法到达老虎身上,这对于逼近质量的提高贡献较小,(b)是经过处理后,在得到的密度函数图上利用误差扩散算法生成的初始化点分布读入到原始图像上的效果,此时的点分布已经与图像非常的逼近了,这样只需较少次数的迭代即可达到较高的逼近效果.

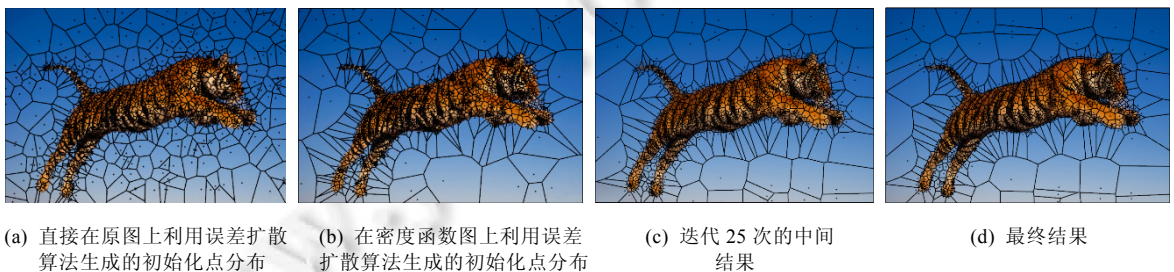


Fig.3 Different initial point distributions and the effect of the iterations

图 3 不同初始化点分布对比和迭代过程中点分布的变化

本文优化方法借鉴了文献[11]中的算法思想,但通过实验发现其算法存在以下不足:一方面,给定最大迭代次数后,仅在开始后和将要结束的迭代中能量函数值的减小效果比较明显,中间的迭代用去了大部分的时间,但是能量函数减小较少,即能量函数的减小与迭代次数非常不成比例;另一方面,该方法最终的区域分割中许多区域过小点对于图像逼近没有什么贡献.如图 4 所示,蓝线表示位置优化算法对图 5 中的原始图像以缩放因子  $\tau=0.5$  迭代 150 次能量函数的变化过程,绿线表示用密度函数图像生成的初始化点对同样的图像以缩放因子  $\tau=0.25$  只迭代 50 次能量函数的变化过程,由红色对比线可知,用密度函数图来指导初始化点分布,不仅使初始化时能量函数值较小,而且仅迭代 50 次能量函数值就减少到比直接迭代 150 次更小的值,这对于算法执行时间的减少和逼近质量的提高效果明显,下面详细说明本文密度函数图像生成算法设计过程.

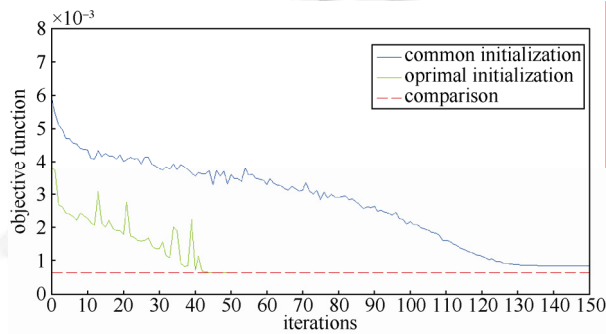


Fig.4 The value of energy function against the number of iterations

图 4 能量函数值随迭代次数增加而变化示意图

### 4.1 误差密度函数图的设计

首先,记原始图像为  $M_0$ ,在缩放因子  $\tau=0.5$  的情况下,运行位置优化算法迭代 15 次,这样可以得到一个比较粗糙的逼近图像  $M_1$ ,如图 5 所示,其中(a)为原始图  $M_0$ ,(b)为得到的粗糙逼近图像  $M_1$ ,然后取  $M_0$  与  $M_1$  3 个通道的 RGB 颜色值,按照如下公式来计算误差

$$M_2 = (|M_0.r - M_1.r| + |M_0.g - M_1.g| + |M_0.b - M_1.b|) / 3.$$

再根据此误差值来设计误差密度函数图  $M_2$  的生成:设定一个可供调整的参数  $\delta$  作为阈值,当误差值  $M_2$  大于这个阈值时,在误差密度函数图上相应位置像素的值设置为 255,当误差值  $M_2$  小于等于这个阈值时,在误差密度函数图上相应位置像素的值设置为 0.通过调整阈值  $\delta$  可以得到理想的误差密度函数图,如图 4(c)所示.最后根据生成的误差密度函数图来指导初始化点的分布,使得点尽量多分布在逼近误差较大的区域,这就是本文的误差反馈机制.

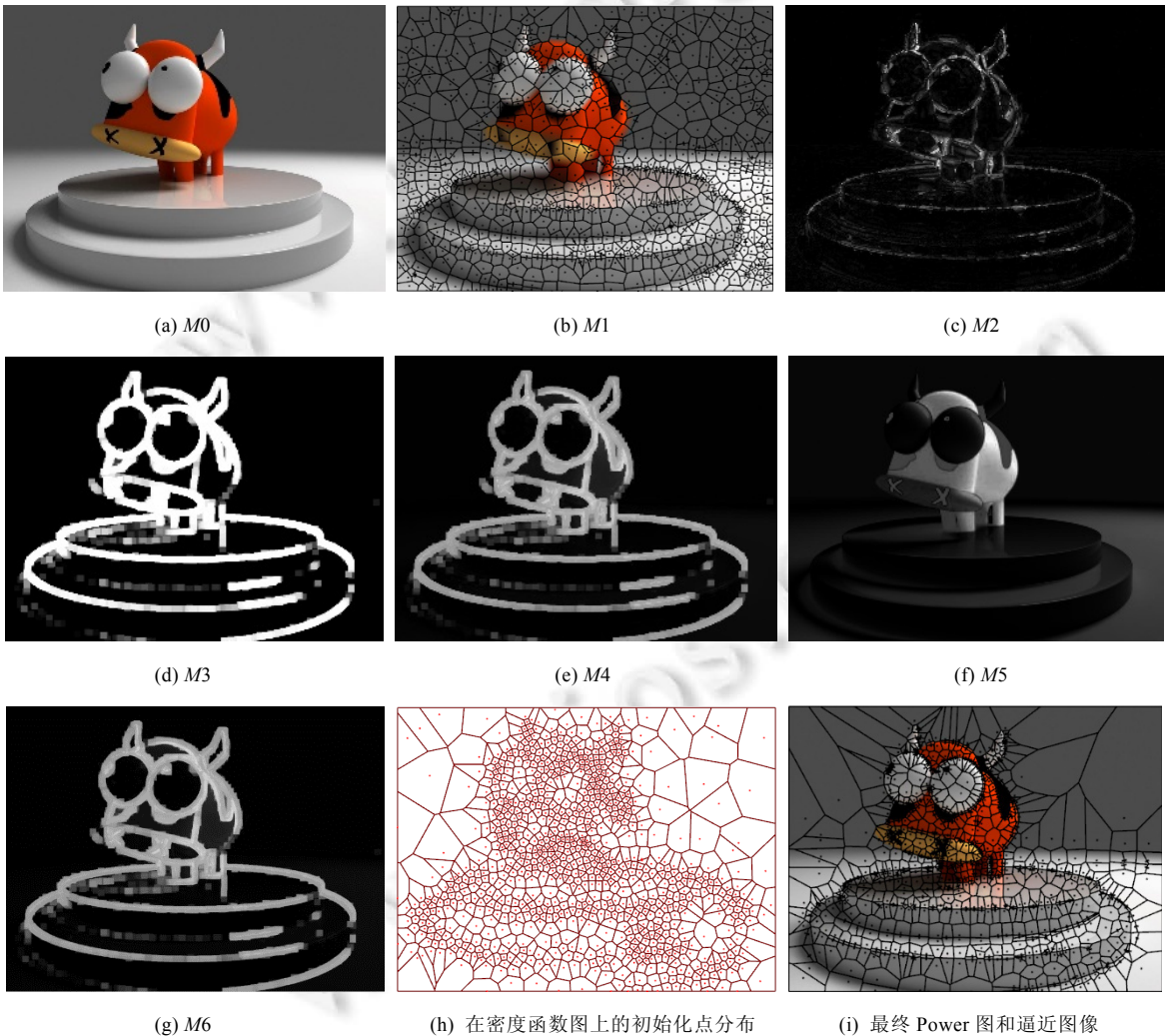


Fig.5 The pipeline of our algorithm  
图 5 算法处理流程



## 4.2 轮廓密度函数图的设计

在用 Power 图来逼近图像的过程中,总是希望 Power 图中 Power 区域的公共边界与图像中较明显的轮廓线相重合,即成功捕获图像中的几何特征,因为只有这样才能使图像中的某些对象被逼近得更好.Henry 等人<sup>[19]</sup>提出了一种从一幅图片自动生成一幅线画图的算法,本文仅对原始算法稍加改进,生成黑底白线条的线画图  $M_3$ ,如图 5(d)所示.改进后的算法可以在一幅图像中提取出一个连续、光滑的线条集合,这些线条可以有效地捕获和传递出图像中的重要形状,而这些重要的形状在视觉信息传递中又是非常有意义结构.我们希望利用生成的线画图来达到帮助 Power 区域的公共边界与图像中的轮廓线重合的目的,然而由于线画图的线条过于纤细,不利于密度变化相对光滑的点集分布.我们再采用数学形态学<sup>[20]</sup>中像素膨胀操作,使  $M_3$  中的线条变得粗而光滑一些,最后生成轮廓密度函数图  $M_4$ ,如图 5(e)所示.实验发现,在指导初始化点分布上  $M_4$  与  $M_3$  相比因为膨胀后的线条更粗而在指导初始化点分布上具有更大的优势.

## 4.3 显著性密度函数图的设计

视觉显著性是一种感知性质<sup>[21]</sup>,它使一个物体或者人相对于它们的邻近更加突出而引起人们的注意.为了更好地逼近图像中的显著性对象,即人类视觉更在乎的对象,而不是仅仅专注于使逼近图像与原始图像差别更加小,本文引入显著性检测算法来生成显著性密度函数图  $M_5$ .已有的显著性检测算法很多,Achanta 等人<sup>[21]</sup>提出了一种使用颜色和照明信息的方法来检测显著性对象.该方法使用了更多的颜色和光照信息,可以产生统一高亮的显著性区域和定义良好的边界,而且实现简单,计算效率较高.本文即采用此算法来生成显著性密度函数图  $M_5$ ,如图 5(f)所示.

## 4.4 最终的密度函数图设计

为了逼近图像整体,还是为了逼近图像中人们关注的对象,再或者是为了逼近图像中对象的边界,本文设计了如下的方法来灵活地满足不同需求.对本章前面得到的密度函数图  $M_2, M_4$  和  $M_5$  在相同位置的像素点分别添加影响因子  $\alpha, \beta, \gamma$ ,并按照如下公式

$$M_6 = \alpha \times M_2 + \beta \times M_4 + \gamma \times M_5$$

生成新的密度函数图  $M_6$ ,由它来指导初始化点的分布,这里令  $\alpha + \beta + \gamma = 1$ ,这样可以保证  $M_6$  在某个像素点的值不会超过最大值.当想逼近图像的整体时,可以使  $\alpha, \beta, \gamma$  三者的取值平均一些;当只希望逼近关心的区域时,可以使  $\gamma$  的取值相对大些;当图像中有较多明显的特征线,为了逼近图像中区域的边界时,可以使  $\beta$  的取值相对大一些.大量的实验结果表明,实验结果对 3 个权重分量的鲁棒性是可以保证的.下面给出本文设计的密度函数图像生成算法:

**算法 2.** 密度函数图像生成算法.

输入:图像  $M_0$ ,粗糙逼近图像  $M_1$ .

输出:最终的密度函数图像  $M_6$ .

Step 1. 对  $M_0$  与  $M_1$  利用第 5.1 节的方法生成一幅误差密度函数图  $M_2$ .

Step 2. 对  $M_0$  利用第 5.2 节的方法生成一幅线画图  $M_3$ ,进而对  $M_3$  生成一幅轮廓密度函数图  $M_4$ .

Step 3. 对  $M_0$  利用第 5.3 节的方法生成一幅显著性密度函数图  $M_5$ .

Step 4. 利用  $M_2, M_4, M_5$  按第 5.4 节的方法生成最终的密度函数图  $M_6$ .

## 5 实验对比与分析

本文算法的实现语言为 C++,最终实验结果在 Intel® Core™ 3.1GHz CPU 和 8GB 内存台式机上得到,实现过程中对 Power 图的生成与优化用到了计算几何算法库 CGAL,对于图像的处理用到了开源计算机视觉库 OpenCV.本文算法理论上适用于任意次数的分片多项式逼近,文中所有例子仅演示了使用分片一次多项式逼近结果.本文算法的计算量相对较大,特别是对于高分辨率的图像,需要对每个 Power 区域内的像素计算积分.为了提高计算的效率,同时也为了简化积分的计算,对于 Power 区域的积分计算,采用简单的多点采样计算积分的规

则,先对每个 Power 多边形区域划分为小的三角形,再对每个三角形进行点采样计算积分.对于 Power 区域边界上的线积分计算,同样采用简单的多点采样积分规则.

图 5 是本文算法的执行流程,首先是原始图像(a),然后是位置优化算法以缩放因子 $\tau=0.5$ 迭代 15 次的点分布结果和拟合图像(b),(c)是生成的误差密度函数图,(d)是生成的线画图,(e)是经过像素膨胀后的轮廓密度函数图,(f)是显著性检测算法生成的显著性密度函数图,(g)是算法 2 在  $\alpha, \beta$  和  $\gamma$  分别取 0.1, 0.6 和 0.3 时得到的密度函数图,(h)是在密度函数图(g)上利用误差扩散算法生成的初始化点分布,这里为了便于观察只画出了 Power 图和顶点,(i)是利用基于 Power 图的位置优化算法以缩放因子 $\tau=0.25$ 迭代 50 次的最终 Power 图和逼近图像.

图 3 是不同的初始化点分布对比和迭代过程中点分布变化示意图,(a)是直接在原图上利用误差扩散算法的初始化点分布结果,(b)是在生成的密度函数图像上利用误差扩散算法的初始化点分布读入到原图上的结果,(c)是中间结果,它是在(b)的顶点分布下迭代 25 次时的点分布结果和拟合出的图像,(d)是迭代 50 次的最终结果,由结果可知,利用得到的密度函数图来指导初始化点分布相对有效,并且随着算法的执行逼近效果也相对越来越好.

图 6 是本文结果与文献[1,9]结果在顶点个数为 1 000 情况下的比较,其中(a)为原图,(b)为文献[1]线性逼近的结果,峰值信噪比(PSNR)为 28.243dB,(c)是文献[9]的结果,峰值信噪比为 29.777dB,(d)是本文的结果,峰值信噪比为 28.41dB.从峰值信噪比方面看,本文方法比文献[11]中的线性方法稍好,而比文献[9]中基于重心坐标的方法略差,但是从算法执行时间和迭代次数的角度上看,在达到相近的逼近质量情况下,本文算法对更好,因为本文算法最后只用了 50 次迭代,而文献[1, 9]中的方法需要 150 次,甚至更多次迭代,更少的迭代次数意味着算法执行所用的时间更少,从表 1 可以证明这一点.同时表 1 也给出了其他几个实例与文献[9]方法就峰值信噪比的对比,可以看出本文方法比文献[9]要好.



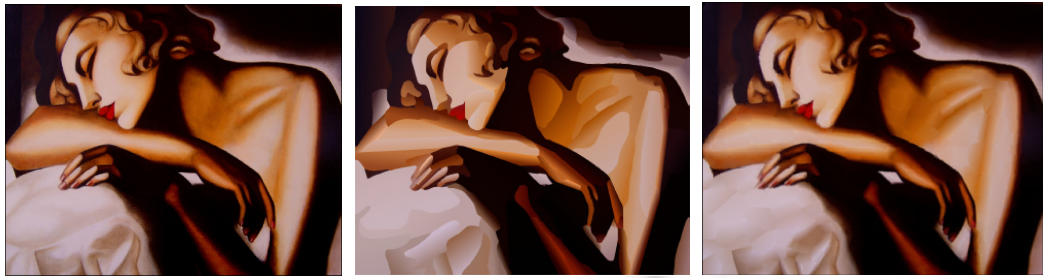
Fig.6 Comparisons of our method with the methods in [1,9] with 1 000 points

图 6 顶点个数为 1 000 时,本文方法与文献[1,9]中方法的对比

图 7 是本文与文献[2]算法的比较,文献[2]的逼近算法虽然本质上是分片逼近算法,但是文献[2]利用像素簇对图像进行区域分割,而不是简单地用数据依赖三角形或者 Voronoi 区域,因此不能单纯地以分片个数相同来定性比较,这里仅仅从视觉上进行观察,(b)是文献[2]的逼近算法将图像划分为 180 个逼近区域的结果,(c)是本文算法 1 500 个顶点的逼近结果,(b)能明显看出有许多像素变化剧烈的线条,失真较大,而本文的方法已经看不出与原图之间的明显差别了.

图 8 是本文的更多实验结果,每个例子分别为原图、密度函数图和最终的逼近图像,其中第 1 个例子是本文选取的一个色彩分布较复杂且对比变化剧烈的图像,为达到较好的逼近效果用了 2 000 个顶点,并且为了加快运算速度,图像的分辨率选得也相对较低,从结果来看,逼近效果还是相对较好的.表 1 是对本文所用几个实验实例运行时间的统计以及与文献[11]方法运行时间在逼近质量达到相近时的对比,最后一列是本文逼近图像的峰值信噪比.程序运行的时间受多方面因素的影响,图像分辨率、Power 图顶点的个数和最大迭代次数是主要因素.本文方法与文献[11]方法相比运行时间有较大提高,达到相近的逼近质量时,本文运行时间大约是其运行时

间的 1/3,然而本文算法的计算量相对还是很大,因此仍然需要较多的运行时间.



(a) 原图 (b) 文献[2]方法的结果 (c) 本文的结果

Fig.7 Comparison of our method with the method in Ref.[2]

图7 本文与文献[2]方法的比较



Fig.8 More results of our method, where the images shown from left to right are the original image, the density image and the final result, respectively

图8 本文算法的更多实验结果,左列是原图,中列是密度函数图,右列是最终的逼近图像

Table 1 Statistics of running times and the comparison with the method in Ref.[9]

表1 运行时间统计及与文献[9]的对比

图号	分辨率	点数	时间(s)	PSNR
4	1 024×768	980	177.741/670.526	36.6200/36.6107
5	1 322×908	1 000	262.954/700.919	28.6972/28.5720
6	512×512	1 000	68.364/237.590	28.4100/29.7770
7	509×408	1 500	66.246/238.677	32.5400/32.3722
8.1	512×512	2 000	68.408/426.849	27.6917/27.5236
8.2	512×512	500	68.874/167.31	22.9800/22.9620



如果前文中的密度函数图生成方法仍然不能生成用户满意的结果,用户可以自己手动来制作一个密度函数图来指导初始化点分布,用于达到理想的逼近效果,例如可以使用 Adobe 公司的 PhotoShop 图像处理工具来完成这一工作.如图 9 所示,正常的逼近图像是(d)图,但是我们的目的是想更好的逼近原图中人物的面部.于是动手制作了(b)图所示的密度函数图,然后用它来指导初始化点分布并进行逼近,得到的逼近图像是(c)图.观察可知,(c)图与(d)图相比,人物面部更加清晰.总之,本文的方法与已有图像逼近方法相比更加的灵活,甚至可以处理一些较为特殊的图像逼近问题.



Fig.9 Density control by the user

图 9 用户密度控制

## 6 结 论

本文将 Power 图的权重与图像像素信息相关联,提出了带容积约束的顶点位置与权重交替优化的图像多项式分片逼近算法,同时辅之以其他技术,主要有误差反馈机制、显著性检测技术、数学形态学中对像素处理的技术等.将 Power 图的权重与图像像素信息相关联,定义了一个度量逼近误差的带容积约束的能量函数,然后经过像素处理技术生成一个用于指导初始化点分布的密度函数图,最终通过本文算法生成了逼近图像.大量的实验结果表明,本文算法在逼近质量和执行时间上较之前算法有较大提高,特别是算法执行时间上有较大的改善.这主要归功于算法的灵活性以及像素处理技术对初始化点分布合理性的提高.

本文的不足之处主要是参数的调整问题.在本文算法中有许多参数需要调整,例如本文前面提到的对生成密度函数图施加的 3 个影响因子的调整等.其次是在逼近能力上,本文算法在迭代 50 次后,能量函数值趋于稳定,即增加迭代次数已经不能提高逼近质量了,这一点是未来需要努力探索的方向.再者,在度量图像相似度的指标上还有结构相似性(SSIM)等,我们将考虑用结构相似性来再次验证本文算法的鲁棒性.最后是算法的执行时间相对还是太慢,由于本文的算法属于计算密集型的,其计算量相对较大,未来考虑使用 GPU 加速和并行算法.

## References:

- [1] Chen ZG, Xiao YY, Cao J. Approximation by piecewise polynomials on Voronoi tessellation. *Graphical Models*, 2014,76(5): 522-531.
- [2] Gregory L, Bruno L. Ardeco automatic region detection and conversion. In: *Proc. of the 17th Eurographics Conf. on Rendering Techniques*, 2006. 349-360.
- [3] Gan T, He YM, Zhu WL. Fast algorithm for image approximation based on cross-correlation estimation. *Chinese Journal of Electronics*, 2008,36(5):1019-1023 (in Chinese with English abstract).
- [4] Peng Z, Tang LB, Zhao BJ, Zhou G. Image sparse approximation based on Tetrolet transform. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2011,33(11):2536-2539 (in Chinese with English abstract).
- [5] Nira D, David L, Samuel R. Data dependent triangulations for piecewise linear interpolation. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 1990,10(1):18.

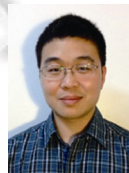
- [6] Oliver K, Bernd H. On simulated annealing and the construction of linear spline. *IEEE Trans. on Visualization and Computer Graphics*, 2001,7(1):17–31.
- [7] Dan S, Philip W. Image interpolation by pixel-level data-dependent triangulation. *Computer Graphics Forum*, 2004,23(2):189–201.
- [8] Ping L, Michael DA. A tuned mesh-generation strategy for image representation based on data-dependent triangulation. *Trans. on Image Processing*, 2013,22(5):2004–2018.
- [9] Xiao YY, Tu JC, Chen ZG. Aproximation by piecewise function based on generalized barycentric coordinates and voronoi tessellation. *Journal of Computer Graphics*, 2014,36(3):51–59 (in Chinese with English abstract).
- [10] Aurenhammer F. Power diagram-properties algorithms and applications. *SIAM Journal on Computing*, 1987,16(1):78–96.
- [11] Dunavant DA. High degree efficient symmetrical Gaussian quadrature rules for the triangle. *Int'l Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1985,21(6):1129–1148.
- [12] Rene R, Stanislav T, Eric M. Weight-Proportional space partitioning using adaptive Voronoi diagrams. *Geoinformatica*, 2007,11(3):383–405.
- [13] Lawson CL. *Software for c1 surface interpolation*. New York: Academic Press, 1977. 161–194.
- [14] Andreas F. CGAL—The computational geometry algorithm library. In: *Proc. of the 10th Int'l Meshing Roundtable*. 2001. 137–142.
- [15] Nivoliens V, Lévy B. Approximating functions on a mesh with restricted Voronoi diagrams. *Computer Graphics Forum*, 2013,32(5):83–92.
- [16] Patrick M, Pooran M, Fernando DG, Mathieu D. Hodge optimized triangulations. 2011,30(4):103:101–103:112.
- [17] Fernando DG, Katherine B, Victor O, Mathieu D. Blue noise through optimal transport. *Trans. on Graphics*, 2012,31(6): 171.
- [18] Michael B, Daniel H. Capacity-Constrained Voronoi diagrams in finite spaces. *Int'l Symp. on Voronoi Diagrams in Science and Engineering*, 2008,33:13.
- [19] Henry K, Seungyong L, Charles K. Coherent line drawing. In: *Proc. of the ACM Symp. on Non-Photorealistic Animation and Rendering*. 2007. 43–50.
- [20] Pierre S. *Morphological Image Analysis: Principles and Applications*. 2nd ed., Berlin: Springer-Verlag, 2004,(5):49–53.
- [21] Radhakrishna A, Sheila H, Francisco E, Sabine S. Frequency-Tuned salient region detection. In: *Proc. of the IEEE Int'l Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2009. 1597–1604.
- [22] Ming-Ming C, Guo XZ, Niloy JM, Huang XL, Hu SM. Global contrast based salient region detection. In: *Proc. of the IEEE Int'l Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2011. 409–416.

#### 附中中文参考文献:

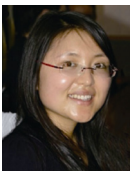
- [3] 甘涛,何艳敏,朱维乐.基于互相关估计的快速图像逼近算法. *中国电子学报*,2008,36(5):1019–1023.
- [4] 彭洲,唐林波,赵保军,周刚.基于 Tetrolet 变换的图像稀疏逼近算法. *系统工程与电子学报*,20011,33(11):2536–2539.
- [9] 肖艳阳,涂锦灿,陈中贵.结合广义重心坐标与 Voronoi 剖分的函数分片逼近. *图学学报*,2014,36(3):51–59.



刘红伟(1988—),男,河南平顶山人,硕士,  
主要研究领域为计算机图形学.



陈中贵(1982—),男,博士,副教授,CCF 会员,  
主要研究领域为计算机图形学,计算几何,数字图像处理.



曹娟(1983—),女,博士,副教授,CCF 会员,  
主要研究领域为计算机辅助几何设计,计算机图形学.