

## 基于三角域上二次 $V$ 系统的曲面模型分析\*

马辉<sup>1+</sup>, 林艾静<sup>2</sup>, 宋瑞霞<sup>3</sup>, 路海明<sup>1</sup>

<sup>1</sup>(清华大学 信息技术研究院, 北京 100084)

<sup>2</sup>(北京交通大学 理学院, 北京 100044)

<sup>3</sup>(北方工业大学 理学院, 北京 100041)

### Surface Model Analysis Based on Quadratic V-System in Triangular Domain

MA Hui<sup>1+</sup>, LIN Ai-Jing<sup>2</sup>, SONG Rui-Xia<sup>3</sup>, LU Hai-Ming<sup>1</sup>

<sup>1</sup>(Research Institute of Information Technology, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

<sup>2</sup>(College of Sciences, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

<sup>3</sup>(College of Sciences, North China University of Technology, Beijing 100041, China)

+ Corresponding author: E-mail: neo\_young@126.com

**Ma H, Lin AJ, Song RX, Lu HM. Surface model analysis based on quadratic V-system in triangular domain.**

*Journal of Software*, 2010,21(Suppl.):94-110. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/10011.htm>

**Abstract:** The 3-D digital geometric model processing, especially 3-D data acquisition, feature extraction, spectrum analysis, model classification and retrieval technology have been attracted much attention in recent years. A complete and optimal generating algorithm for a class of orthogonal function system, called  $V_2$ -System, is proposed in this paper. It has some advantages to analyze spectrum using  $V_2$ -System, such as save storage space and raise algorithm efficiency, etc. Firstly, exact expression and generating process of  $V_2$ -System is given. Secondly, a method of constructing quadratic surface model is proposed. This method construct quadratic surfaces with different accuracy and numbers freely on basis of triangular faces, consequently, it provides many conveniences for tests. Thirdly, it is given that a Bézier surface can be expressed with finite terms exactly in  $V_2$ -System. It suggests a technology on data compression. Finally, according to frequency spectrums of surface model,  $V_2$ -Descriptors and  $V_2$ -Distances are calculated. Based on  $V_2$ -Distances, different quadratic surface models are classified. It lays the foundation of model retrieval.

**Key words:** triangular domains; V-system; orthogonal reconstruction; spectrums analysis; feature extraction; descriptor; Kmeans cluster

**摘要:** 三维数字几何信息的处理,尤其是三维模型数据的获取技术、特征提取、频谱分析及模型分类或检索等技术,备受人们关注,本文给出一套完整的、优化的三角域上一类正交函数系(称为三角域上二次  $V$ -系统,  $V_2$ -系统)的生成算法.基于此算法生成的  $V_2$ -系统,将给曲面模型的频谱分析带来极大地便利,既能节省存储空间,也能提高模型分解、重构等算法的执行效率.首先给出  $V_2$ -系统的精确数学表达及高效的构造过程.其次,提出一种二次曲面模型的构造方法,称为自由选取法.该方法以三角面片模型为基础,依据具体需求精度,自由地构造不同

\* Supported by Second phase of Tsinghua Research Institute of Digital Interactive Technology's (IDIT's) Project (清华大学数字互动技术研究所二期项目)

Received 2010-05-15; Accepted 2010-08-16

面片数的二次曲面模型,为后续实验带来了极大地便利.再次,给出  $V_2$ -系统中分片二次 Bézier 曲面模型的正交表达式,即二次曲面模型可以由  $V_2$ -系统中有限个基函数精确表达,从而实现了曲面几何模型的正交分解与重构,并提供了一种三维数据的压缩方法.与此同时,依据几何模型的频谱信息,计算不同曲面模型间的相似度( $V_2$ -描述子的“距离”),则可实现不同模型间的初步分类,进而为三维模型检索奠定了基础.

**关键词:** 三角域;V-系统正交重构;频谱分析;特征提取;描述子;Kmeans 聚类

伴随着数字信息技术的高速发展,下一代数字媒体的宠儿将是 3D 数字几何数据及其处理技术,尽管下此论断为时尚早,但不可否认的是,数字几何处理在计算机图形领域已经占据着愈来愈重要的地位.近几年,随着三维数字几何模型获取技术的迅速发展,尤其是近期激光测距摄像头、结构光测距摄像头技术的产品化,使得数字几何处理技术在 CAD/CAM 产品设计、虚拟现实、文物保护、3D 游戏、影视动画等诸多领域得到了广泛的应用.各领域的诸多应用中,尤为引人注目的是,影视巨作中令人震撼的电影特效制作,如《Avatar》、《Iron Man》等,已与数字几何处理密不可分;电子消费产业中,2010 年 E3 上微软公司展示的 Xbox 360 Kinect 系列,更加展示出三维数字几何处理技术已经给人们带来了难以想象的视觉冲击.正是由于民用化、产品化的迫切需求,使得人们对数字几何处理理论与应用的研究变得越来越关注.然而,现有的数字几何研究成果尚不能为几何模型处理提供一个统一的、完整的框架,因此数字几何处理依然是计算机图形学领域的一个公开课题<sup>[1-4]</sup>.

与数字图像处理中频率域特性分析类同,数字几何模型的频率域特性,通常也能够反应其在空间域的拓扑特性,即低频信息表示几何模型的大致轮廓,高频信息表示其局部细节变化.尽管,频谱分析方法在数字图像处理上的应用已非常广泛且成功,如 FFT、DCT 等,但此类方法在曲面几何模型的频谱分析与处理中却不多见.文献[5]将频率分析方法用于曲面的光顺设计,在模型上建立局部的频率概念,并引入了统一的频谱表达式.文献[6]利用 Fourier 变换,得到模型的局部频谱分量,直接分析和操纵这些频谱系数,就可以实现过滤、重采样,高频分析及局部误差控制与修复.文献[5,6]的局限性在于它是一种完全局部化的方法,很难用于控制模型的整体形状,即无法表达和处理模型的低频信息<sup>[2]</sup>.

通常意义下,一般采用三角面片或四边形面片来描述数字几何模型,其需要较大的数据存储量.基于多分辨思想的网格分析技术是解决此类问题的重要手段,这种分析方法能够在不同的分辨率下对复杂网格表示的几何模型进行细化编辑、消噪和压缩等处理.其中,以小波分析技术为典型代表.传统小波常是用于处理定义在规则欧式空间上的信号,为了处理非规则区域上的信号,Schröder P 等人提出了球面小波的概念<sup>[7,8]</sup>,使之在几何模型处理中取得很好的应用.但是,由于不能简单的利用张量积来处理三角面片,因此针对三角面片表示的几何模型,希望找到一套有效的工具能够直接处理,而且期望其能够具有多分辨特性,能对模型做整体描述.本文研究的二次 V-系统所具有的特性,恰好满足上述要求.

V-系统是本文作者于 2007 年构造的一类正交完备函数系<sup>[9]</sup>.2008 年又将 V-系统推广到了三角域,提出了三角域上 V-系统的构造原理,并给出三角域上一次 V-系统的详细表达<sup>[10,11]</sup>.三角域上的 V-系统具有多分辨特性,且能把几何模型看作一个整体,将其变换到频域空间,进而处理频谱信息.文献[12,13]针对三角域上一次 V-系统进行了几何信息的频谱研究,并取得令人满意的效果.但是一次 V-系统只能针对三角面片进行频谱分析,显然用三角面片表达模型时,需要非常大的数据存储量,而依据几何模型的自身特点,如果能够用高次曲面片来表达,则存储量将极大地减少.基于这个思想,本文重点研究的是用分片二次曲面片表达几何模型时,此类模型在二次 V-系统下的频谱分析,这一点如同有限元理论中关于低次元与高次元的研究及应用一样<sup>[14]</sup>,因此二次 V-系统(甚至更高次 V-系统)研究有其重要的应用价值.

注:本文提到的 V-系统,如果没有特别声明,均指三角域上的 V-系统.

本文第 1 节主要介绍本文研究工作的背景及相关工作.第 2 节主要介绍三角域上二次 V-系统的定义及其生成算法,给出一套完整的、高效的生成算法,结合后续章节内容,能够有效地提高算法的执行效率.第 3 节主要介绍一种三维几何曲面模型的构造方法,依据需求精度可以将三角面片模型转化为曲面模型,极大地降低模型存储空间.第 4 节主要介绍二次曲面模型在二次 V-系统下的频谱分析、相似度计算及分类结论.第 5 节给出具体

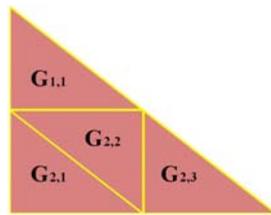
的实验模型与实验数据.第 6 节总结本文工作.

## 1 三角域上二次 V-系统的定义及其生成算法

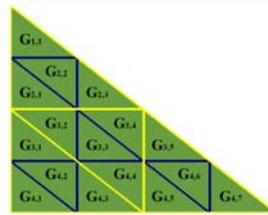
文献[11]给出了三角域上  $k$  次 V-系统的一般构造原理,并给出了一次 V-系统的详细表达.基于对曲面模型频谱分析的需要,本节给出三角域上二次 V-系统( $V_2$ -系统)的详细表述,提出一套完整的、优化的  $V_2$ -系统构造算法,也是一种数据存储结构.利用该结构存储的  $V_2$ -系统将在频谱分析时,有效地提高算法执行效率,并降低了算法设计的复杂度.此外,该构造算法给出了文献[11]中未涉及之处,是一个非常有益的补充与完善.

### 1.1 三角域剖分定义

给定三角域  $G$ ,  $G = \{(0,0), (1,0), (0,2)\}$  为顶点的三角域,剖分过程如下定义:取各边中点并连接,则  $G$  被剖分为 4 个子域,分别记为  $G_{1,1}^1, G_{2,1}^1, G_{2,2}^1, G_{2,3}^1$ ,称为一级剖分,如图 1(a)所示.以此类推,在上一级子域中分别进行同样的剖分过程,即可得  $N$  级剖分后的三角域  $G_{a,b}^N$ ,  $N=1,2,\dots, a=1,2,\dots,2^N, b=1,2,\dots,2a-1$ ,其中,  $(a,b)$  表示  $N$  级剖分后三角域  $G$  中的第  $a$  行第  $b$  列的三角子域,如图 1.b 所示.(注:剖分记法  $G_{a,b}^N$ ,提供了一种结构存储解决方案,便于减少存储空间、提高算法执行效率).



(a) 一级剖分后三角子域的标注次序



(b) 二级剖分后三角子域的标注次序

Fig.1 Domain label of triangular subdivision

图 1 三角剖分域的标注

### 1.2 $V_2$ -系统定义

三角域  $G$  上的  $V_2$ -系统是通过分组分类来构造的,文献[11]中已经给出了一次 V-系统的较详细的构造原理,本文不再复述.但鉴于 V-系统的生成原理(函数的“压缩-复制”原理),为了便于后面章节中曲面模型的频谱分析,提高算法执行效率,节省存储空间,本节给出一套完整的、高效的 V-系统构造过程.

满足  $N$  级剖分的  $V_2$ -系统共由  $(k+4)4^N$  个函数构成,其中,  $k=2, N=0,1,2,\dots$  鉴于二次多项式表达的多样性,第 1 组中 6 个基函数可以有多种选择,本文定义如下,并以此为基础计算曲面模型频谱、相似度,并进行分类实验.

$$f_1(u,v)=1, f_2(u,v)=u, f_3(u,v)=v, f_4(u,v)=uv, f_5(u,v)=u^2, f_6(u,v)=v^2 \quad (1)$$

利用 Gram-Schmidt 方法正交规范化后,得到如下结果:

$$V_{2,1}^{1,1}=1, V_{2,1}^{2,1}=\sqrt{2}(3u-1), V_{2,1}^{3,1}=\sqrt{6}(u+v-1), \\ V_{2,1}^{4,1}=\frac{3\sqrt{7}}{7}(10uv-4u-2v+1), V_{2,1}^{5,1}=\frac{\sqrt{21}}{7}(35u^2+15uv-34u-3v+5), V_{2,1}^{6,1}=\sqrt{15}(u^2+\frac{3}{2}v^2+3uv-2u-3v+1) \quad (2)$$

即  $V_2$ -系统的第一组基函数.

特别地,这组函数是在三角域上构造多小波尺度函数的基础.限于篇幅,关于 V-系统的多小波特性从略.

$V_2$ -系统的第二组基函数,即生成元,需要在 1 级剖分的三角域  $G_{a,b}^1$  上,  $a=1,2, b=1,2,\dots,2a-1$ ,定义 18 个分片的、线性无关的函数(与第 1 组类似),经过正交规范化后得到:

$$V_{2,2}^{1,1} = \begin{cases} \sqrt{13}\left(-\frac{15}{26}v^2 + \frac{17}{13}\right) \\ \sqrt{13}\left(-\frac{15}{26}v^2 + \frac{1}{13}\right) \\ \sqrt{13}\left(-\frac{15}{26}v^2 + \frac{1}{13}\right) \\ \sqrt{13}\left(-\frac{15}{26}v^2 + \frac{1}{13}\right) \end{cases}, V_{2,2}^{2,1} = \begin{cases} \frac{-5\sqrt{546}}{364}(26u^2 + 7v^2 + 26uv - 52u - 26v + 24) \\ \frac{-\sqrt{546}}{364}(130u^2 + 35v^2 + 130uv - 260u - 130v + 56) \\ \frac{-\sqrt{546}}{1092}(390u^2 + 105v^2 + 390uv - 780u - 390v + 376) \\ \frac{-\sqrt{546}}{1092}(390u^2 + 105v^2 + 390uv - 780u - 390v + 376) \end{cases}$$

$$V_{2,2}^{3,1} = \begin{cases} \frac{-5\sqrt{462}}{308}(26u^2 + v^2 + 2uv - 4u - 2v) \\ \frac{-5\sqrt{462}}{308}(26u^2 + v^2 + 2uv - 4u - 2v) \\ \frac{-\sqrt{462}}{924}(390u^2 + 15v^2 + 30uv - 60u - 30v + 16) \\ \frac{-\sqrt{462}}{924}(390u^2 + 15v^2 + 30uv - 60u - 30v - 176) \end{cases}, V_{2,2}^{4,1} = \begin{cases} \frac{-\sqrt{1562}}{5467}(90u^2 - 60v^2 + 1530uv - 3753u - 375v + 913) \\ \frac{-\sqrt{1562}}{5467}(90u^2 - 60v^2 + 1530uv - 57u - 375v + 77) \\ \frac{-\sqrt{1562}}{5467}(90u^2 - 60v^2 + 1530uv - 57u - 375v - 31) \\ \frac{-\sqrt{1562}}{5467}(90u^2 - 60v^2 + 1530uv - 57u - 375v - 187) \end{cases}$$

$$V_{2,2}^{5,1} = \begin{cases} \frac{2\sqrt{171678}}{200291}(5980u^2 + 155v^2 + 2260uv - 5339u - 895v + 1079) \\ \frac{2\sqrt{171678}}{200291}(5980u^2 + 155v^2 + 2260uv - 971u - 895v + 91) \\ \frac{2\sqrt{171678}}{600873}(35880u^2 + 930v^2 + 13560uv - 47574u - 5370v + 11663) \\ \frac{2\sqrt{171678}}{600873}(35880u^2 + 930v^2 + 13560uv - 47574u - 5370v + 14081) \end{cases}$$

$$V_{2,2}^{6,1} = \begin{cases} \frac{-\sqrt{78}}{91}(650u^2 - 5v^2 - 10uv - 253u + 10v + 13) \\ \frac{-\sqrt{78}}{91}(650u^2 - 5v^2 - 10uv - 253u + 10v + 13) \\ \frac{-\sqrt{78}}{273}(1950u^2 - 15v^2 - 30uv - 999u + 30v + 83) \\ \frac{-\sqrt{78}}{273}(1950u^2 - 15v^2 - 30uv - 2871u + 30v + 1019) \end{cases}$$

$$V_{2,2}^{7,1} = \begin{cases} \frac{3\sqrt{12214}}{42749}(2680u^2 - 1860v^2 + 200uv - 918u + 5582v - 4033) \\ \frac{\sqrt{12214}}{42749}(8040u^2 - 5580v^2 + 600uv - 3146u + 4594v - 437) \\ \frac{2\sqrt{12214}}{42749}(4020u^2 - 2790v^2 + 300uv - 3583u + 2297v + 493) \\ \frac{2\sqrt{12214}}{42749}(4020u^2 - 2790v^2 + 300uv - 5443u + 2297v + 1423) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 V_{2,2}^{8,1} &= \begin{cases} \frac{3\sqrt{1379}}{1379}(460u^2 + 210v^2 + 740uv - 1072u - 662v + 503) \\ \frac{\sqrt{1379}}{1379}(1380u^2 + 630v^2 + 2220uv - 884u - 614v + 97) \\ \frac{2\sqrt{1379}}{1379}(690u^2 + 315v^2 + 1110uv - 1378u - 898v + 583) \\ \frac{2\sqrt{1379}}{1379}(690u^2 + 315v^2 + 1110uv - 1168u - 898v + 478) \end{cases} \\
 V_{2,2}^{9,1} &= \begin{cases} \frac{-3\sqrt{721}}{721}(20u^2 + 20uv - 32u - 2v + 3) \\ \frac{-3\sqrt{721}}{721}(20u^2 + 20uv - 12u - 2v + 1) \\ \frac{-3\sqrt{721}}{721}(15u^2 + 15uv - 19u - 4v + 4) \\ \frac{-3\sqrt{721}}{721}(15u^2 + 15uv - 26u - 11v + 11) \end{cases}, V_{2,2}^{10,1} = \begin{cases} \frac{3\sqrt{21}}{7}(40uv - 48u - 4v + 5) \\ \frac{-\sqrt{21}}{7}(40uv - 8u - 4v + 1) \\ \frac{-\sqrt{21}}{7}(40uv - 32u - 16v + 13) \\ \frac{-\sqrt{21}}{7}(40uv - 8u - 24v + 5) \end{cases} \\
 V_{2,2}^{11,1} &= \begin{cases} 0 \\ \frac{2\sqrt{42}}{7}(40uv - 8u - 4v + 1) \\ \frac{-\sqrt{42}}{7}(40uv - 32u - 16v + 13) \\ \frac{-\sqrt{42}}{7}(40uv - 8u - 24v + 5) \end{cases}, V_{2,2}^{12,1} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \frac{-3\sqrt{14}}{7}(40uv - 32u - 16v + 13) \\ \frac{3\sqrt{14}}{7}(40uv - 8u - 24v + 5) \end{cases} \\
 V_{2,2}^{13,1} &= \begin{cases} \frac{3\sqrt{7}}{7}(140u^2 + 60uv - 128u - 6v + 11) \\ \frac{-\sqrt{7}}{7}(140u^2 + 60uv - 68u - 6v + 5) \\ \frac{-2\sqrt{7}}{7}(70u^2 + 30uv - 66u - 12v + 15) \\ \frac{-2\sqrt{7}}{7}(70u^2 + 30uv - 104u - 18v + 37) \end{cases}, V_{2,2}^{14,1} = \begin{cases} 0 \\ \frac{2\sqrt{14}}{7}(140u^2 + 60uv - 68u - 6v + 5) \\ \frac{-2\sqrt{14}}{7}(70u^2 + 30uv - 66u - 12v + 15) \\ \frac{-2\sqrt{14}}{7}(70u^2 + 30uv - 104u - 18v + 37) \end{cases} \\
 V_{2,2}^{15,1} &= \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \frac{-2\sqrt{42}}{7}(70u^2 + 30uv - 66u - 12v + 15) \\ \frac{2\sqrt{42}}{7}(70u^2 + 30uv - 104u - 18v + 37) \end{cases}, V_{2,2}^{16,1} = \begin{cases} 3\sqrt{5}(4u^2 + 6v^2 + 12uv - 16u - 18v + 13) \\ -\sqrt{5}(4u^2 + 6v^2 + 12uv - 4u - 6v + 1) \\ -2\sqrt{5}(2u^2 + 3v^2 + 6uv - 6u - 6v + 3) \\ -2\sqrt{5}(2u^2 + 3v^2 + 6uv - 4u - 6v + 2) \end{cases} \\
 V_{2,2}^{17,1} &= \begin{cases} 0 \\ 2\sqrt{10}(4u^2 + 6v^2 + 12uv - 4u - 6v + 1) \\ -2\sqrt{10}(2u^2 + 3v^2 + 6uv - 6u - 6v + 3) \\ -2\sqrt{10}(2u^2 + 3v^2 + 6uv - 4u - 6v + 2) \end{cases}, V_{2,2}^{18,1} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -2\sqrt{30}(2u^2 + 3v^2 + 6uv - 6u - 6v + 3) \\ 2\sqrt{30}(2u^2 + 3v^2 + 6uv - 4u - 6v + 2) \end{cases} \quad (3)
 \end{aligned}$$

需要说明的是,上述第 2 组基函数的分片表达式中,自变量  $(u, v)$  的定义域依次属于  $G_{1,1}^1, G_{2,1}^1, G_{2,2}^1, G_{2,3}^1$ .

$V_2$ -系统的第  $m$  组基函数,  $m = 3, 4, \dots, N$ , 其构造过程为:将上述第 2 组的 18 个基函数分别压缩  $4^{m-2}$  倍,再依次复制到  $m-2$  级剖分后的子域  $G_{a,b}^{m-2}$  中,  $m = 3, 4, \dots, N, a = 1, 2, \dots, 2^{m-2}, b = 1, 2, \dots, 2a - 1$ , 并将函数值缩放  $2^{m-2}$  倍,得到  $18 \cdot 4^{m-1}$  个正交的基函数,即函数的“压缩-复制”原理.定义如下:

当  $b$  为奇数时,

$$V_{2,m}^{i,j} = \begin{cases} 2^{m-2} V_{2,2}^i(2^{m-2}(u - \frac{b-1}{2^{m-1}}), 2^{m-2}(v - \frac{2^{m-1}-2a}{2^{m-2}})), & (u, v) \in G_{a,b}^{m-2} \\ 0, & \text{other} \end{cases} \quad (4)$$

当  $b$  为偶数时,

$$V_{2,m}^{i,j} = \begin{cases} 2^{m-2} V_{1,2}^i(-2^{m-2}(u - \frac{b}{2^{m-1}}), -2^{m-2}(v - \frac{2^{m-1}-2a+2}{2^{m-2}})), & (u, v) \in G_{a,b}^{m-2} \\ 0, & \text{other} \end{cases} \quad (5)$$

如上述,  $V_2$ -系统的基函数  $V_{2,m}^{i,j}$  是定义在  $m-1$  级剖分后三角域  $G_{i,j}^{m-1}$  上的分片多项式函数.当  $m = 3, 4, \dots, N$  时,基函数  $V_{2,m}^{i,j}$  只在  $G_{a^k, b^k}^{m-1}, k = 1, 2, 3, 4$  存在关于变量  $(u, v)$  的分片多项式函数,在其余子域的表达式均为零.也就是说,上述基函数  $V_{2,m}^{i,j}$  的生成过程中,  $m-2$  级剖分下的每个子域  $G_{a,b}^{m-2}$ , 同时也要生成  $m-1$  级剖分下的 4 个新子域,其计算过程如下:

令  $(a, b)$  表示  $G_{a,b}^{m-2}$  的一个子域,  $(a^k, b^k), k = 1, 2, 3, 4$  表示  $G_{a^k, b^k}^{m-1}$  的 4 个新生成的子域,则

当  $b$  为奇数时,

$$(a^1, b^1) = (2a-1, 2b-1), (a^2, b^2) = (2a, 2b-1), (a^3, b^3) = (2a, 2b), (a^4, b^4) = (2a, 2b+1) \quad (6)$$

当  $b$  为偶数时,

$$(a^1, b^1) = (2a, 2b), (a^2, b^2) = (2a-1, 2b), (a^3, b^3) = (2a-1, 2b-1), (a^4, b^4) = (2a-1, 2b-2) \quad (7)$$

此外,为了计算  $V_2$ -系统中曲面模型的频谱,需要得知每个三角子域中变量  $(u, v)$  的积分上下限,依据  $m-1$  级剖分下三角子域  $(a, b)$  的取值范围,可定义该子域中积分上下限分别如下:

$$u \in [(\lceil b/2 \rceil - 1)/2^{m-1}, \lceil b/2 \rceil / 2^{m-1}] \quad (8)$$

当  $b$  为奇数时,

$$v \in [2(1 - a/2^{m-1}), -2u + 2 - (2a - b - 1)/2^{m-1}] \quad (9)$$

当  $b$  为偶数时,

$$v \in [-2u + 2 - (2a - b)/2^{m-1}, 2(1 - (a-1)/2^{m-1})] \quad (10)$$

其中,  $\lceil \bullet \rceil$  表示对  $\bullet$  进行上取整运算.

需要特别说明的是,对比文献[11]中的一次 V-系统构造过程,本小节给出的  $V_2$ -系统构造过程清晰、明确,针对每个基函数只需存储 4 个多项式表达式和 4 个有效的三角子域即可,无需存储任何零表达式及无关子域.如此这般,便可在实验过程中节省结构变量存储空间、提高三维模型的频谱计算效率.

综上所述,  $V_2$ -系统是由三角域上的分片多项式函数类  $\{V_{2,m}^{i,j}\}$  所构成的,其中,  $m = 1, 2, \dots, N+1, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, 4^{m-2}, N = 0, 1, 2, \dots$ , 特别地,当  $m = 1$  时,  $n = 6$ ; 当  $m > 1$  时,  $n = 18$ .  $V_2$ -系统的特点是函数系中既包含连续函数,也包含各种情形的间断函数,具有多分辨特性.它既可以用于表达连续信息又可以用于表达间断信息,特别是可以表达群组信息.此特点是与由连续函数构成的正交函数系、通常强调连续性的正交小波的重要区别所在.

## 2 三维曲面模型的构造方法

通常,人们熟知的三维模型多由三角面片或四边形面片组成,其中,最简单的模型存储格式为 off(object file format).它是由点、面和边信息组合而成.而基于曲面片表示方式的曲面模型,因构造方式较复杂,所以并不多见.众所周知,利用三角面片表示一个曲面时,随着曲面光滑度要求的提高,需要用到的三角面片数量将大大增加,这将带来存储空间的极大浪费,同时也降低了模型分析算法的执行效率;但如果能够有一个合理的参数曲面表达式将其表示,则带来的益处是显而易见的.

本节重点介绍一种基于三维三角面片模型的二次曲面模型构造方法,称之为自由选取法.其中,每个二次曲面片都是由符合三角剖分规则的 4 个三角面片所组成的,且该方法是一种具有递推性质的算法.第 1 次曲面模型构造过程中得到的一组曲面控制点(每个面片包含 6 个控制点,除去中心面片的 3 个控制点外,其余 3 个控制点可以看作是一个新的三角面片,并以此为基础进行第二次曲面模型构造,以此类推,直到无法构成新的三角面片为止.例如,二次 Bézier 曲面构造就是把一个用三角面片表示的几何模型按照一定的规则(自由选取法)划分为一些子域,这些子域是由四个小三角形组成的一个大三角形,它有 6 个顶点,以此 6 个顶点作为此子域上的二次 Bézier 曲面的控制顶点.存储此模型时只需存储顶点向量既可.

假设一个三维三角面片模型  $M$ ,它是由  $N$  个顶点、 $S$  个三角面片、 $D$  条边组成,记为

$$M = \{P_i, F_j, E_k\}, i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, S, k = 1, 2, \dots, D \quad (11)$$

其中,  $P_i$  表示控制顶点,  $F_j$  表示三角面片,  $E_k$  表示边.

那么,对应的二次曲面模型构造方法如下,具体构造过程如图 2 所示

步骤 1:

选取  $\{F_j\}$  中任意一个面片作为起始面片,记为  $B_{Center}^n$ ,  $n=1$ ,  $n$  表示二次曲面片的个数.如图 2 中  $B_{Center}^n$  三角面片所示.

步骤 2:

在  $\{F_j\}$  的其余面片中寻找与  $B_{Center}^n$  有且仅有两个公共顶点的面片,这样的面片至多 3 个.如果找到,则记为  $B_{Near,1}^n, B_{Near,2}^n, B_{Near,3}^n$ .同时,在曲面片结构体中存储顶点向量为  $\{B_{-P_i}^n\}, i = 1, 2, \dots, 6, n \leq \sum_{j=0}^k 3^j, k$  为步骤二执行成功的次数.顶点  $\{B_{-P_1}^n, B_{-P_2}^n, B_{-P_3}^n\}$  是  $B_{Center}^n$  的 3 个顶点,顶点  $\{B_{-P_4}^n, B_{-P_5}^n, B_{-P_6}^n\}$  是属于  $B_{Near,1}^n, B_{Near,2}^n, B_{Near,3}^n$  且不属于  $B_{Center}^n$  的顶点.如图 2 中  $B_{Near,1}^n, B_{Near,2}^n, B_{Near,3}^n$  所示.否则,如果找不到且  $k=0$  时,返回步骤 1;  $k > 0$ ,返回步骤 3.

步骤 3:

在  $\{F_j\}$  寻找与满足如下条件 3 个条件的面片,记为  $B_{Center}^{new,i}, i = 1, 2, 3$ :

条件 1:与  $B_{Center}^n$  有一个公共顶点  $P$ .

条件 2:与面片  $B_{Center}^{new,i}$  有一个公共边的相邻三角面片序列和与面片  $B_{Center}^n$  有一个公共边的相邻三角面片序列只有两条公共边  $E_1, E_2$ .即,相邻两个大三角形的序列组  $\{B_{Near,1}^n, B_{Near,2}^n, B_{Near,3}^n\}$  中只有两条公共边.

条件 3:  $P$  为  $E_1, E_2$  的交点.

同理,这样找到的中心面片至多有 3 个.如图 2.a 中  $B_{Center}^{new,1}, B_{Center}^{new,2}, B_{Center}^{new,3}$  三角面片所示.

步骤 4:

更新  $B_{Center}^n = B_{Center}^{new,i}, i = 1, 2, 3$ , 分别执行步骤 2.直到搜索完全部  $\{F_j\}$  为止.

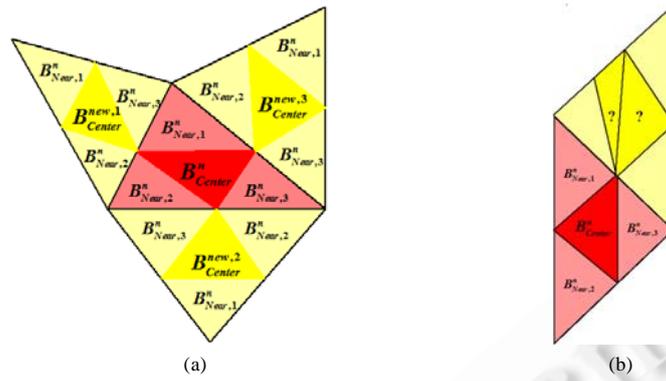


Fig.2 Free choose algorithm of quadratic surface model

图 2 二次曲面模型的自由选取构造算法

需要特别注意的是,上述步骤 3 的本质是寻找符合条件的下一个相邻的中心三角面片,当三角面片模型如图 2.b 所示时,该构造方法并不适用,需要重新划分三角面片模型,使其适应上述构造算法.

本质上,上述构造过程给出的是一种二次曲面模型的树状存储结构,如图 3 所示.该结构能够清晰地表示从三角面片模型中生成曲面模型的过程.依据上述算法,基于三角面片的二次曲面模型构造过程,演示示例如图 4 所示.其中,图 4 表示一个由 576 个三角面片组成的瓷瓶模型.图 4(a)中 4 个深色三角面片表示符合三角剖分规则的第 1 个二次曲面片结构.图 4(b)中新生成面片组表示符合三角剖分规则的第 2 层二次曲面片结构.图 4(c)中新生成面片组表示符合三角剖分规则的第 3 层二次曲面片结构.图 4(d)中所有新生成面片表示按照自由选择法步骤,获取的其余二次曲面片结构中,符合三角剖分规则的中心面片.

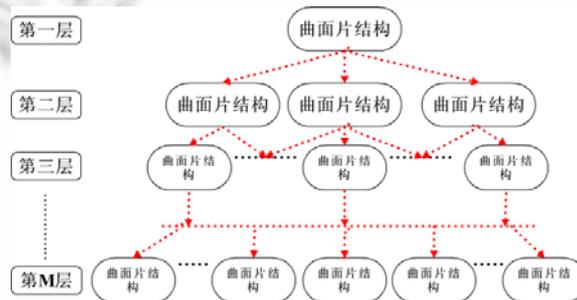


Fig.3 Tree structure of quadratic surface with free choose method

图 3 自由选取法中二次曲面模型的树状存储结构

综上所述,本节给出了一种二次曲面模型的构造方法.如果只是进行一次构造过程,则二次曲面模型按照 Off 文件格式存储时,已比一次三角面片模型所占用的存储空间要减少 20%~30%.以此类推,按照所需要的精度,执行恰当次数的构造过程,所得二次曲面模型显然要比一次三角面片模型极大地节省存储空间.

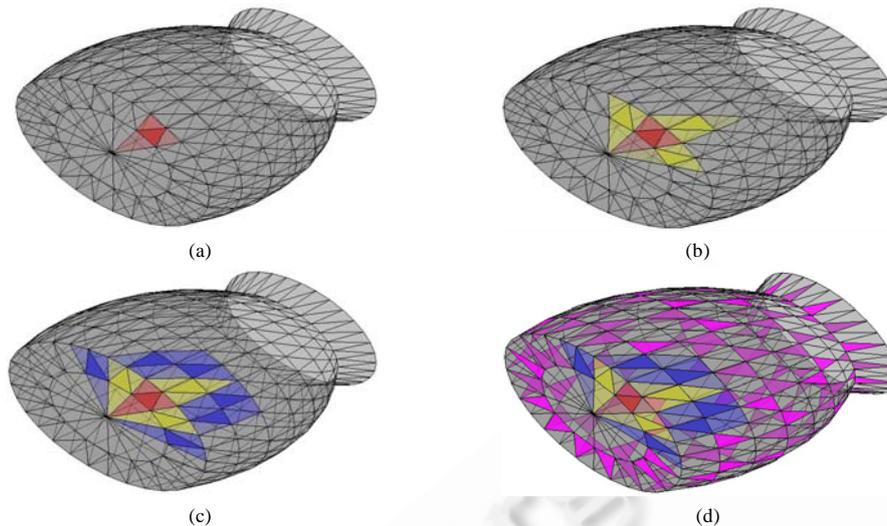


Fig.4 Example of free choose method

图 4 自由选取法构造二次曲面模型过程示意图

### 3 三维曲面模型的分类

如上所述,用二次曲面片表示几何模型,其优势在于可以减少数据的存储量.首先,举一个非常简单的例子来说明问题.图 5(a)表示一个由两片二次曲面片表示百合叶模型,它在  $V_2$ -系统中只需要 1 级剖分下的 24 个基函数即可精确表达.图 5(b)表示由 2400 个三角面片表示的百合叶模型,它在一次  $V$ -系统中需要 12288( $3 \cdot 4^6$ )个函数才能精确表达.因此,显而易见,采用二次曲面片表示几何模型能够极大地节省存储数据量.同时,随着模型面片数量的降低,所需要的  $V$ -系统基函数数量也将极大地减少.因此采用二次曲面片表示几何模型,不但降低了数据存储量,也有效地提高了频谱分析算法的执行效率,具有重要的研究价值.



Fig.5 Quadratic surface model and triangular model of petal flower

图 5 百合叶的二次曲面模型与三角面片模型

#### 3.1 三角域上的二次 Bézier 曲面

二次 Bézier 曲面的定义,可以分为两种.一种是自变量定义在四边形区域上,即张量基表达方式;另一种是定义在三角形区域上,即面积坐标下的表达方式<sup>[15]</sup>.下面简单地给出三角域上  $n$  次 Bézier 曲面的定义方法.

定义在三角域上的双变量  $n$  次 Bernstein 基函数是由  $(u, v, w)^n$  的展开式的各项组成,记为

$$(u, v, w)^n = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} B_{i,j,k}(u, v, w) \quad (12)$$

其中,  $B_{i,j,k}(u,v,w) = \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k$ ,  $u, v, w \in [0,1]$ ,  $u+v+w=1$ ,  $i+j+k=n$ , 且  $i, j, k \geq 0$ .

Bézier 曲线、曲面的定义都是依据 Bernstein 多项式而得到,因此,三角域上一个  $n$  次 Bézier 曲面片的定义如下:

$$P(u,v,w) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} P_{i,j,k} B_{i,j,k}(u,v,w) \quad (13)$$

其中,  $u, v, w \in [0,1]$ ,  $u+v+w=1$ .

特别地,当  $n=2$  时,即为二次 Bézier 曲面片,表示为

$$P^2(u,v,w) = (u,v,w) \begin{bmatrix} b_{200} & b_{110} & b_{101} \\ b_{110} & b_{020} & b_{011} \\ b_{101} & b_{011} & b_{002} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, u,v,w \in [0,1], u+v+w=1 \quad (14)$$

利用第 3 节给出二次模型构造方法,得到二次曲面模型的控制点序列  $\{B_{-}P_i^n\}$ ,将每组 6 点序列分别代入公式(14),即可得到一个二次 Bézier 曲面模型的分片参数表达式,如图 6、图 7 所示.其中,图 7.a 表示一个由 352 个三角面片组成的三角面瓷瓶模型的手工渲染效果图.图 7(b)表示瓷瓶模型的三角面片模型及自由选取法得到的二次曲面模型中心面片示意图.图 7(c)表示基于自由选取法得到的控制点,所绘制的瓷瓶二次 Bézier 曲面模型.图 7(d)表示一个由 1440 个三角面片组成的三角面草莓模型的手工渲染效果图.图 7(e)表示草莓模型的三角面片模型及自由选取法得到的二次曲面模型中心面片示意图.图 7(f)表示基于自由选取法得到的控制点,所绘制的草莓二次 Bézier 曲面模型.

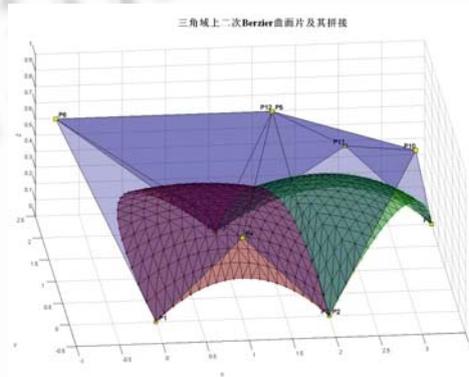


Fig.6 Quadratic Bézier surfaces in triangular domains

图 6 三角域上的二次 Bézier 曲面示例

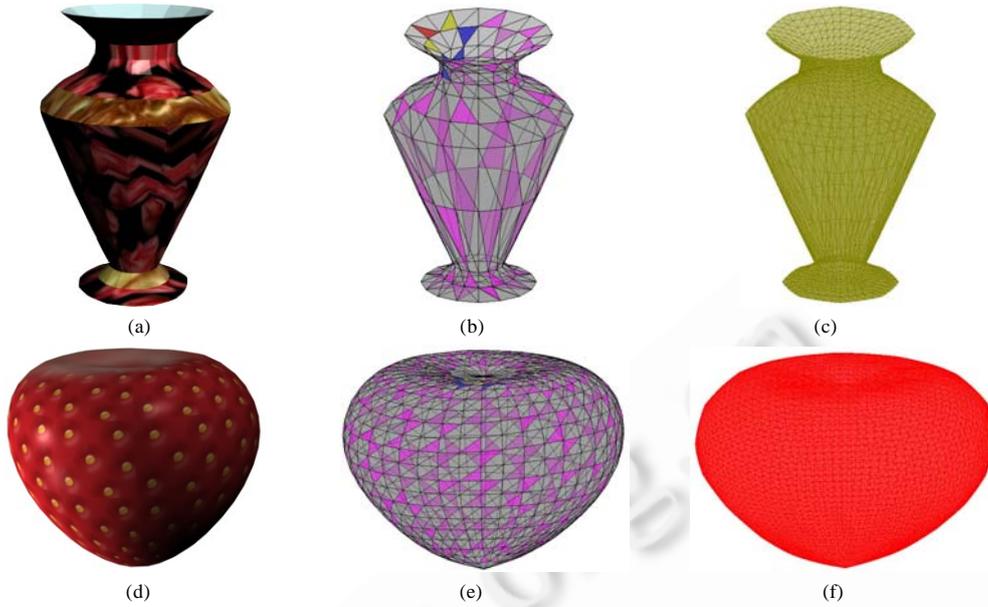


Fig.7 Free choose method of Quadratic surface model

图 7 二次曲面模型的自由选择法构造过程

3.2 二次Bézier曲面模型的频谱分析

假设,一个几何模型  $P$  是由  $m = 4^N$  个二次 Bézier 曲面片组成,如果  $4^{N-1} < m \leq 4^N$ ,则以表达式 0 或最后一个面片的表达式进行补齐,使得  $m = 4^N$ .可记为:

$$P(u,v) = \begin{cases} P_1(u,v), & u,v \in [0,1] \\ P_2(u,v), & u,v \in [0,1] \\ \vdots & \vdots \\ P_{4^N}(u,v), & u,v \in [0,1] \end{cases} \quad (15)$$

此类曲面模型  $P$  可以由  $V_2$ -系统的  $(K+2)4^N$  个有限项函数精确表达.计算过程如下:

首先,将三角域  $G$  进行  $N$  剖分,通过线性变换将模型  $P$  中的每个曲面片  $P_i(u,v)$  分别映射到  $G$  的  $N$  级剖分子域  $G_{a,b}$  上.即为,

$$P(u,v) = \begin{cases} P_{1,1}(u,v), & u,v \in G_{1,1} \\ P_{2,1}(u,v), & u,v \in G_{2,1} \\ \vdots & \vdots \\ P_{2^N, 2^{N+1}-1}(u,v), & u,v \in G_{2^N, 2^{N+1}-1} \end{cases} \quad (16)$$

其次,已知  $N$  级剖分下的  $V_2$ -系统基函数个数为  $(K+2)4^N$ ,每个基函数结构由变量  $(u,v)$  的表达式、所属三角子域  $(a,b)$  和该子域的变量积分上下限组成,记为  $V'_i$ .因此,几何模型  $P$  可以表示为:

$$P(u,v) = \sum_i^{(K+2)4^N} \lambda_i V'_i(u,v), K=2 \quad (17)$$

其中,  $\lambda_i$  为几何模型  $P$  在  $V_2$ -系统下的正交展开系数,即频谱.可以下式计算得到:

$$\lambda_i = \iint_G P(u,v) V'_i(u,v) du dv \quad (18)$$

上述公式,即完成了几何模型在  $V_2$ -系统下的正交分解及重构过程.

### 3.3 二次 Bézier 曲面模型的分类

依据单变量 V-描述子的定义<sup>[9]</sup>,令

$$D_i = \frac{\|\lambda_i\|}{\max(\|\lambda_i\|)}, i = 1, 2, \dots, (K+2) \cdot 4^N, K = 2 \quad (19)$$

则称  $D_i$  为模型  $P$  的第  $i$  个归一化的  $V_2$ -描述子,文献[13]中证明了它具有平移、旋转、缩放不变性.

假设,两个几何模型 A、B 的归一化 V-描述子分别为  $D_A(i)$  和  $D_B(i)$ ,定义这两个对象间的“距离”为

$$\text{Distance} = \sqrt{\sum_{i=1}^{(K+2) \cdot 4^N} (D_A(i) - D_B(i))^2} \quad (20)$$

Distance 矩阵表示不同的曲面模型间的相似程度,它可以用于几何模型分类、识别、检索等实用研究,为今后更深入的实用研究工作奠定了基础.下一节实验中,基于不同几何模型的 Distance 矩阵,利用 Kmeans 聚类<sup>[16]</sup>方法,给出了实验性的模型分类结果.

## 4 曲面模型频谱分析实验

本文中,采用 Princeton Shape Benchmark 模型库中的三维模型数据<sup>[17]</sup>,进行二次 Bézier 曲面模型构造实验、曲面模型频谱分析实验、不同曲面模型间相似度计算实验和基于“距离”矩阵的 K-means 聚类分类实验.需要说明的是,Princeton Shape Benchmark 是以三角面片为数据基本单位,存储为 Off 文件格式.

### 4.1 实验1.曲面模型在 $V_2$ -系统中的正交分解,即频谱计算

图 7 表示一个飞碟模型的频谱分析与重构,原始数据模型由 480 个三角面片组成.其中,图 8.a 表示三角面片模型,以及基于自由选取法取得的 Bézier 曲面模型中符合剖分规则的中心面片.图 8.b 表示二次 Bézier 曲面模型,由 120 个曲面模型组成,它是由执行一次自由选取法而获取的.图 8(c)表示由前 200 个频谱重构得到的曲面模型.图 8(d)、图 8(e)和图 8(f)分别表示飞碟模型在  $V_2$ -系统下的 X 方向、Y 方向和 Z 方向上的频谱分布.图 8 表示一个沙漏模型的频谱分析与重构,原始数据模型由 816 个三角面片组成.其中,图 9(a)表示三角面片模型,以及基于自由选取法取得的 Bézier 曲面模型中符合剖分规则的中心面片.图 9(b)表示二次 Bézier 曲面模型,由 204 个曲面模型组成,它是由执行一次自由选取法而获取的.图 9(c)表示由前 200 个频谱重构得到的曲面模型.图 9(d)、图 9(e)和图 9(f)分别表示飞碟模型在  $V_2$ -系统下的 X 方向、Y 方向和 Z 方向上的频谱分布.

该实验表明,二次 Bézier 曲面模型能够在  $V_2$ -系统中进行正交分解.基于需求精度,利用频谱信息,可以对模型进行不同精度、不同层次的重构.

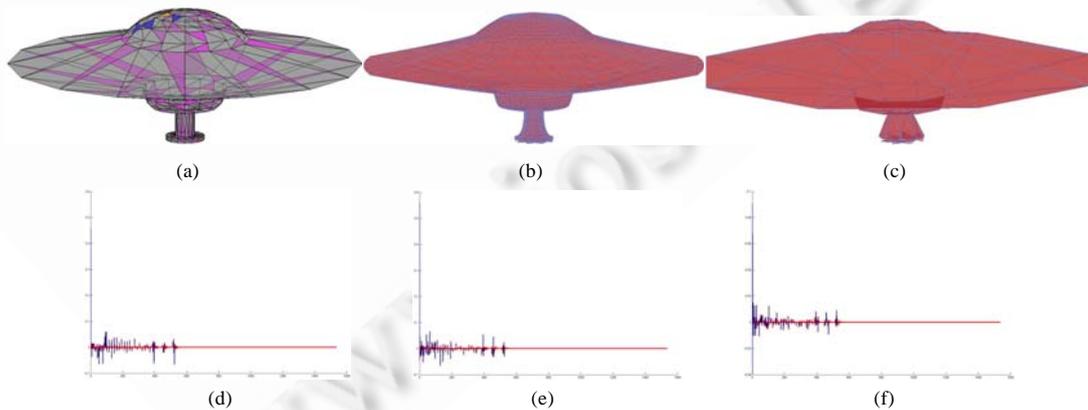


Fig.8 Frequency spectrum and reconstruction of UFO Model in  $V_2$ -System

图 8 飞碟模型的频谱分析与重构

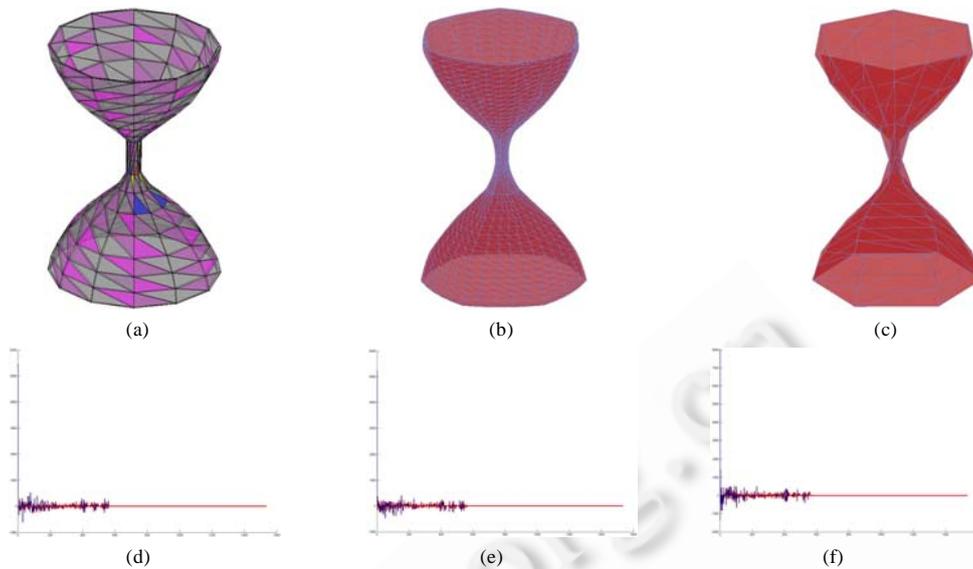
Fig.9 Frequency spectrum and reconstruction of Hourglass model in  $V_2$ -System

图9 沙漏模型的频谱分析与重构

#### 4.2 实验2.不同曲面模型间的“距离”,即相似度计算

图 10(a)~图 10(x)分别表示不同二次 Bézier 曲面模型,及其按照自由选择法获取的符合三角剖分规则的中心三角面片.其中,图 10(a)~图 10(g)、图 10(u)表示不同的三角面片花瓶模型,(a)为 480 个面片,(b)为 288 个面片,(c)为 1008 个面片,(d)为 352 个面片,(e)为 216 个面片,(f)为 576 个面片,(g)为 288 个面片,(u)为 576 个面片;图 10(h)~图 10(m)、图 10(s)、图 10(t)表示不同的三角面片酒具模型,图 10(h)为 512 个面片,图 10(i)~图 10(k)为 720 个面片,图 10(l)为 880 个面片,图 10(m)为 840 个面片,图 10(s)为 400 个面片,图 10(t)为 920 个面片;图 10(n)~图 10(p)表示不同的三角面片国际象棋模型,图 10(n)为 480 个面片,图 10(o)为 288 个面片,图 10(p)为 544 个面片;图 10(q)表示由 432 个三角面片沙漏模型;图 10(r)表示由 624 个三角面片气球模型;图 10(v)表示由 336 个三角面片苹果模型;图 10(w)表示由 320 个三角面片碗模型;图 10(x)表示由 480 个三角面片飞碟模型.

表 1 说明不同曲面模型间在  $V_2$ -系统中的相对“距离”,表中的“距离”进行了归一化处理.

实验过程中,仅依据上述模型的三角面片,执行了一次自由选择法获取二次 Bézier 曲面模型,随后在  $V_2$ -系统中进行频谱、描述子和“距离”计算.

该实验表明,曲面模型的描述子是一种曲面特征的标识,此类描述子具有几何平移、缩放、旋转的不变性,即同一模型具有相同的描述子标识.在  $V_2$ -系统中,基于描述子定义的不同曲面模型间的“距离”可以被看作一种度量单位,客观地表示了此类曲面模型间的相似程度.若将“距离”矩阵归一化,容易得知,相对“距离”较小的模型具有较高的相似度;反之,相似度较低,可以认为是两个完全不同的模型.



Fig.10 Different quadratic Bézier surface models

图 10 不同的二次 Bézier 曲面模型

Table 1 Distances of different quadratic Bézier surface models

表 1 不同曲面模型间的“距离”

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
a	0	1.33	4.79	1.15	1.56	1.06	1.47	1.12	2.04	1.9	1.29	2.4
b	1.33	0	5.01	0.623	0.752	0.98	0.986	1.32	2.12	2.01	1.27	2.67
c	4.79	5.01	0	5.01	5.08	4.76	5.08	4.68	4.35	4.32	4.6	3.98
d	1.15	0.623	5.01	0	0.892	0.786	1.03	1.2	2.06	1.94	1.15	2.61
e	1.56	0.752	5.08	0.892	0	1.2	1.12	1.49	2.18	2.08	1.44	2.82
f	1.06	0.98	4.76	0.786	1.2	0	1.26	1.03	1.92	1.79	1.1	2.46
g	1.47	0.986	5.08	1.03	1.12	1.26	0	1.43	2.2	2.1	1.44	2.7
h	1.12	1.32	4.68	1.2	1.49	1.03	1.43	0	1.64	1.5	1.07	2.24
i	2.04	2.12	4.35	2.06	2.18	1.92	2.2	1.64	0	0.489	1.33	2.09
j	1.9	2.01	4.32	1.94	2.08	1.79	2.1	1.5	0.489	0	1.16	1.92
k	1.29	1.27	4.6	1.15	1.44	1.1	1.44	1.07	1.33	1.16	0	2.06
l	2.4	2.67	3.98	2.61	2.82	2.46	2.7	2.24	2.09	1.92	2.06	0
m	1.32	1.26	4.68	1.09	1.4	1.1	1.48	1.17	1.44	1.34	0.909	2.27
n	0.973	1.14	4.89	0.984	1.31	1.01	1.29	0.867	1.72	1.59	1.02	2.35
o	1.49	1.07	5.06	1.1	1.24	1.3	0.626	1.41	2.16	2.06	1.42	2.64
p	1.77	1.67	4.85	1.64	1.72	1.48	1.77	1.23	1.86	1.78	1.53	2.58
q	1.2	1.32	4.8	1.17	1.45	1.17	1.36	1.09	1.81	1.68	1.13	2.33
r	1.19	1.08	4.81	0.935	1.31	0.832	1.35	1.13	1.8	1.71	1.11	2.48
s	1.03	0.914	5.01	0.623	1.18	0.858	1.18	1.2	2.08	1.91	1.14	2.51
t	1.99	2.09	4.35	2.02	2.2	1.9	2.2	1.65	1.51	1.46	1.49	1.49
u	1.13	1	4.76	0.875	1.24	0.631	1.3	1.08	1.92	1.78	1.13	2.4
v	2.64	2.3	5.02	2.4	2.17	2.49	2.26	2.33	2.57	2.44	2.33	2.6
w	2.51	2.23	4.72	2.29	2.16	2.38	2.36	2.24	2.56	2.42	2.22	2.49
x	1.01	0.856	5.02	0.69	1.1	0.821	1.21	0.989	2.01	1.88	1.15	2.57
	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x
a	1.32	0.973	1.49	1.77	1.2	1.19	1.03	1.99	1.13	2.64	2.51	1.01
b	1.26	1.14	1.07	1.67	1.32	1.08	0.914	2.09	1	2.3	2.23	0.856
c	4.68	4.89	5.06	4.85	4.8	4.81	5.01	4.35	4.76	5.02	4.72	5.02
d	1.09	0.984	1.1	1.64	1.17	0.935	0.623	2.02	0.875	2.4	2.29	0.69
e	1.4	1.31	1.24	1.72	1.45	1.31	1.18	2.2	1.24	2.17	2.16	1.1
f	1.1	1.01	1.3	1.48	1.17	0.832	0.858	1.9	0.631	2.49	2.38	0.821
g	1.48	1.29	0.626	1.77	1.36	1.35	1.18	2.2	1.3	2.26	2.36	1.21
h	1.17	0.867	1.41	1.23	1.09	1.13	1.2	1.65	1.08	2.33	2.24	0.989
i	1.44	1.72	2.16	1.86	1.81	1.8	2.08	1.51	1.92	2.57	2.56	2.01
j	1.34	1.59	2.06	1.78	1.68	1.71	1.91	1.46	1.78	2.44	2.42	1.88
k	0.909	1.02	1.42	1.53	1.13	1.11	1.14	1.49	1.13	2.33	2.22	1.15
l	2.27	2.35	2.64	2.58	2.33	2.48	2.51	1.49	2.4	2.6	2.49	2.57
m	0	1	1.48	1.54	1.17	1.04	1.11	1.61	1.14	2.48	2.42	1.09
n	1	0	1.26	1.4	0.836	0.954	0.98	1.68	1	2.28	2.24	0.85
o	1.48	1.26	0	1.72	1.28	1.36	1.21	2.13	1.34	2.17	2.36	1.26
p	1.54	1.4	1.72	0	1.59	1.47	1.78	1.83	1.66	2.21	2.32	1.58
q	1.17	0.836	1.28	1.59	0	1.15	1.05	1.69	1.14	2.28	2.22	1.15
r	1.04	0.954	1.36	1.47	1.15	0	1.05	1.79	0.973	2.55	2.49	0.977
s	1.11	0.98	1.21	1.78	1.05	1.05	0	2.01	0.875	2.51	2.39	0.693
t	1.61	1.68	2.13	1.83	1.69	1.79	2.01	0	1.88	2.45	2.36	2.02
u	1.14	1	1.34	1.66	1.14	0.973	0.875	1.88	0	2.47	2.31	0.833
v	2.48	2.28	2.17	2.21	2.28	2.55	2.51	2.45	2.47	0	1.69	2.49
w	2.42	2.24	2.36	2.32	2.22	2.49	2.39	2.36	2.31	1.69	0	2.34
x	1.09	0.85	1.26	1.58	1.15	0.977	0.693	2.02	0.833	2.49	2.34	0

### 4.3 实验3.基于“距离”矩阵的曲面模型分类

图 11 表示基于实验 2 中不同模型间的“距离”.采用模式识别中  $K$ -means 聚类<sup>[17]</sup>方法,对实验 2 中的模型集合进行初步分类(7 类模型).如图 11 所示,分类效果十分明显.

该实验表明,不同曲面模型在  $V_2$ -系统中的“距离”矩阵,可以被看作一类有效的模式集合.

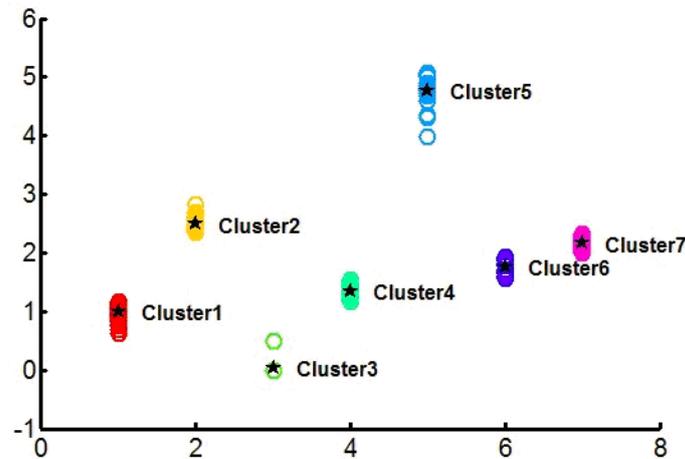


Fig.11 Classification of different quadratic Bézier surface models with Kmeans

图 11 不同的二次 Bézier 曲面模型的 Kmeans 分类

## 5 结 论

三角域上  $V$ -系统使得三维几何模型能够用有限个正交函数的线性组合来精确表达,把几何模型从空间域变换到频率域,从而可以利用频谱分析方法,针对模型进行数据压缩、特征分析、模式识别、分类与检索等问题的研究,这是一种几何信息的整体频谱分析方法.特别是  $V$ -系统的多分辨特性,使得模型的低频、高频信息更容易区分,为模型的数据压缩和局部细节分析带来方便.由于  $V$ -系统具有分片多项式结构,使得其不仅可以表达连续的几何模型,也可以表达分离的群组模型.简言之, $V$ -系统为数字几何信息处理带来了一种新的处理方式.用平面片做空间曲面造型,在  $CAGD$  中被广泛使用.文献[10–13]中的一次  $V$ -系统正是针对这种需求而做的研究.本文中提出三角域上二次  $V$ -系统的优势在于其能够直接地、精确地用有限项表示二次曲面造型,并给出一种基于三角面片模型的二次曲面模型构造方法,既节省了模型的存储空间,又降低了频谱分析算法的复杂度.同时,本文给出一套完整的、优化的  $V$ -系统构造算法,使得  $V$ -系统的概念更便于理解与实现.该构造算法也是一种数据存储格式,结合几何模型归一化后的特点,在实验过程中极大地提高了频谱计算的效率,使得  $V$ -系统在三维几何模型的重构、特征分析、分类与检索等方面有付诸实用的可能.

### References:

- [1] Zhou K, Bao HJ. A unified framework for digital geometry processing. Chinese Journal of computers, 2002,25(9):904–909 (in Chinese with English abstract).
- [2] Zhang SY, Zha HB, Bao HJ, Ye XZ. New advance in the application of digital geometry processing. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2005,17(6):1129–1138 (in Chinese with English abstract).
- [3] Botsch M, Pauly M, Kobbelt L, Alliez P, Léziery B, Bischoff S, Rössl C. Geometric modeling based on polygonal meshes. SIGGRAPH Course Notes, 2000.
- [4] Athanasios D. Styliadis. Digital documentation of historical buildings with 3-d modeling functionality. Automation in Construction, 2007,(16):498–510.

- [5] Taubin G. A signal processing approach to fair surface design. In: Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH. 1995. 351–358.
- [6] Pauly M, Gross M. Spectral processing of point sampled geometry. In: Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH. 2001. 379–386.
- [7] Schröder P, Sweldens W. Spherical wavelets: Efficiently representing functions on the sphere. In: Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH. 1995. 161–172.
- [8] Mousa MH, Chaîne R, Akkoucheb S, Galinb E. Toward an efficient triangle-based spherical harmonics representation of 3D objects. Computer Aided Geometric Design, 2008. 561–575.
- [9] Song RX, Ma H, Wang TJ, Qi DX. The complete orthogonal V-system and Its applications. Communications on Pure and Applied Analysis, 2007,6(3):853–871.
- [10] Song RX, Wang XC, Ou MF, Li J. The structure of V-system over triangulated domains. Lecture Notes in Computer Science 4975, 2008. 563–569.
- [11] Song RX. The construction of a new class of orthogonal functions over triangular. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 2008,28(8):949–960 (in Chinese with English abstract).
- [12] Li J, Song RX, Ye MJ, Liang YY, Qi DX. Orthogonal reconstruction of 3D model based on V-System over triangular domain. Chinese Journal of Computers, 2009,32(2):193–202 (in Chinese with English abstract).
- [13] Li J, Song RX, Ye MJ, Liang YY, Qi DX. V-System and expression of geometric group information in frequency domain. Journal of Software, 2008,19:41–51 (in Chinese with English abstract).
- [14] Wang MC. Principle and Numerical Method of Finite Element Method. 2nd ed., Beijing: Tsinghua University Press, 1997 (in Chinese).
- [15] Chang GZ. The Mathematics of Surfaces. Hu'nan Educational Publishing House, 1995. 76–80 (in Chinese).
- [16] Duda RO, Hart PE, Stork DG. Pattern Classification. 2nd ed., John Wiley & Sons, Inc., 2003.
- [17] Princeton Shape Benchmark. <http://shape.cs.princeton.edu/benchmark/>

#### 附中文参考文献:

- [1] 周昆,鲍虎军等.统一的数字几何处理框架.计算机学报,2002,25(9):904–909.
- [2] 张三元,查红彬,鲍虎军,叶修梓.数字几何处理及其应用的最新进展.计算机辅助设计与图形学学报,2005,17(6):1129–1138.
- [11] 宋瑞霞.三角域上一类正交函数系的构造.系统科学与数学,2008,28(8):949–960.
- [12] 李坚,宋瑞霞,叶梦杰,梁延研,齐东旭.基于三角域上 V 系统的三维几何模型的正交重构.计算机学报,2009,32(2):193–202.
- [13] 李坚,宋瑞霞,叶梦杰,梁延研,齐东旭.V-系统与几何群组信息的频域表达.软件学报,2008,19:41–51.
- [14] 王勰成.有限单元法基本原理和数值方法.第 2 版,北京:清华大学出版社,1997.
- [15] 常庚哲.曲面的数学.长沙:湖南教育出版社,1995.



马辉(1978—),男,河北人,博士,主要研究领域为数字信号处理,模式识别与智能系统.



宋瑞霞(1963—),女,教授,主要研究领域为数字几何,计算机辅助设计,计算机图形学.



林艾静(1982—),女,博士生,主要研究领域为复杂系统控制与分析.



路海明(1973—),男,博士,研究员,主要研究领域为模式识别,信息处理.