

插值边界曲线的 NURBS 近似极小曲面设计*

吴花精灵^{1,2}, 王国瑾^{1,2+}

¹(浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室, 浙江 杭州 310027)

²(浙江大学 数学系 计算机图像图形研究所, 浙江 杭州 310027)

Designing Approximate Minimal NURBS Surfaces with Boundaries Interpolation

WU Hua-Jing-Ling^{1,2}, WANG Guo-Jin^{1,2+}

¹(State Key Laboratory of CAD&CG, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

²(Institute of Computer Images and Graphics, Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

+ Corresponding author: E-mail: wanggj@zju.edu.cn

Wu HJL, Wang GJ. Designing approximate minimal NURBS surfaces with boundaries interpolation. Journal of Software, 2010,21(Suppl.):67-74. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/10008.htm>

Abstract: We explore for designing an algorithm to construct NURBS surfaces with approximate minimal area which interpolate given boundaries, and hence supply a gap that the current NURBS system is unable to design minimal NURBS surface effectively which is urgently required for engineering. Applying multifold techniques of NURBS surfaces such as knot-inserting, Hybrid polynomial approximations, etc., one can convert a NURBS surface into Bézier patches which are relatively simple to get minimal surfaces; then by using iterative method of optimizing the control points of each sub-surface and updating the whole surface continuously, one can obtain approximate minimal Bézier patches with high-precision successfully. In the end, one could choose the corresponding iterated approximation algorithms according to various requirements of different users, to compute the NURBS surfaces with approximate minimal area which satisfy boundary position constraints.

Key words: NURBS surface; surface of minimal area; knot-inserting; Hybrid approximation; Bézier patch; iteration.

摘要: 探索性地设计了一个插值给定边界曲线的 NURBS 近似极小曲面算法,弥补了当前 NURBS 系统无法有效地设计工程所急需的一般 NURBS 极小曲面的缺陷.运用 NURBS 曲面的节点插入、Hybrid 多项式逼近等多种技术,将 NURBS 曲面转化为相对简单的分片 Bézier 曲面求解,并运用各子曲面片的控制顶点优化、整体曲面不断更新迭代方法,成功地得到高精度的近似分片 Bézier 极小曲面.最后,可以按用户的各种要求选择运用相应不同的迭代逼近算法,求取插值给定边界曲线的近似 NURBS 极小曲面.

关键词: NURBS 曲面;极小曲面;插入节点;Hybrid 逼近;分片 Bézier 曲面;迭代

给定空间一条可求长(可测)的 Jordan 闭曲线(无重点的连续闭曲线),寻找以此闭曲线为边界的曲面,使得在所有具有相同边界的曲面中,其面积达到最小.这一问题称为极小曲面问题.这是微分几何与偏微分方程领域中的一个经典难题.从 17 世纪起,300 多年来,历经大批数学家、工程师的努力,该研究取得许多理论成果,并在建

* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60873111(国家自然科学基金); the State Key Program of National Natural Science Foundation of China under Grant No.60933007 (国家自然科学基金重点项目)

Received 2010-05-15; Accepted 2010-08-16

筑业、飞机、轮船制造业,以及结构化学、材料科学、动植物建模等领域得到广泛应用^[1]。

随着极小曲面在工程中应用的深入与普及,随着计算机辅助几何设计(CAGD)的长足发展,在计算机图象仪的环境下表示与分析极小曲面的研究逐渐成为近年兴起的一个热点,并在体育馆和候机厅等现代索膜结构设计中获得可观的经济效益。Farin 和 Hansford 针对曲面控制顶点提出了基于离散 Laplacian 算子的相应网格曲面生成法^[2]。Monterde 针对 Plateau-Bézier 问题,深入研究 Dirichlet 能量函数^[3],提出了与曲面相应的网格生成法,并与其他网格生成法进行了细致比较^[4]。与此同时,国内学者也研究了等温参数极小曲面^[5]与有理 Bézier 极小曲面等^[2]。

尽管极小曲面在 CAGD 领域已取得一些成果,但从总体上来说,其研究范围偏窄,大多数工作还停留在最为简单的 Bézier 基的曲面设计上。由于一般 NURBS 曲线曲面对于控制网格边界的非插值性,由于 B 样条基及其乘积积分的特殊复杂性,加上极小曲面问题本身的高度非线性,NURBS 极小曲面的数学模型至今尚付阙如。这无疑是现行 NURBS 系统的一个严重缺陷,因此,从理论上恰当地表示及实际上高精度地计算 NURBS 极小曲面的课题实为一项当务之急。

研究表明,B 样条的节点插入技术、有理曲面的多项式逼近技术以及极小曲面的迭代技术,是攻克上述难点、成功地构建 NURBS 极小曲面的 3 项利器。本文先将已知 NURBS 曲面边界进行插节点运算,使之表为一张等价的有理 Bézier 样条曲面的边界;然后运用有理曲面多项式逼近的方法,构造出逼近原 NURBS 曲面的 Bézier 样条曲面的边界;再对这张 Bézier 样条曲面每一子片在保持相邻边界统一的条件下施以求取 Bézier 极小曲面的迭代运算,整体上构造出一张分片极小的 Bézier 样条曲面;最后在保持已知 NURBS 曲面边界的条件下,将该分片极小样条曲面用有理 Bézier 样条曲面或 NURBS 曲面拟合逼近,从而得到最终所需要的近似 NURBS 极小曲面。实例验证显示了本文算法的正确性与有效性。有望对 CAGD 中的极小曲面研究起到很好的推动作用。

1 NURBS 极小曲面问题的描述和算法概要

我们先给出求矩形域中一张双参数极小曲面的问题描述:已知首尾相连的四条边界曲线,构造一张双参数曲面 $\mathbf{x}(u,v)$,使其在所有以这四条曲线为边界的曲面中,面积达到近似最小。

为给出 NURBS 极小曲面的问题描述,记 $P = \{P_{i,j}\}_{i,j=0}^{n,m}$ 和 $W = \{\omega_{i,j}\}_{i,j=0}^{n,m}$ 为控制顶点网和权因子网,则以 u, v 为参数,以 $N_{i,k}(u)N_{j,l}(v)$ 为 k, l 阶 B 样条基的 NURBS 曲面可以表为

$$\mathbf{x}(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,k}(u)N_{j,l}(v)P_{i,j}\omega_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,k}(u)N_{j,l}(v)\omega_{i,j}}, \quad u_{k-1} \leq u \leq u_{n+1}, v_{l-1} \leq v \leq v_{m+1}, k-1 \leq n, l-1 \leq m.$$

这里 $\{u_i\}, \{v_j\}$ 分别为列节点向量和行节点向量。由于目标曲面必须插值其四条边界,所以所运用的 B 样条基需要满足区间端点的重节点条件,即需要在两个区间端点分别配置比阶数 k, l 低一重的节点向量。又由于生成的极小曲面需要保证 C^2 连续,再为计算简洁起见,本文采用的 B 样条的节点向量,在除区间端点以外的中间节点均取为一重节点。对于一般形式的节点向量,结果也是类似的,而且由于曲面 C^2 连续的限制,故区间的中间节点的重数至多为阶数 k, l 减 3。综上所述,节点向量 $\{u_i\}, \{v_j\}$ 需要取为

$$u_1 = u_2 = \dots = u_{k-1} < u_k < \dots < u_{n+1} = u_{n+2} = \dots = u_{n+k-1}, \\ v_1 = v_2 = \dots = v_{l-1} < v_l < \dots < v_{m+1} = v_{m+2} = \dots = v_{m+l-1}.$$

因此,求 NURBS 极小曲面 $\mathbf{x}(u,v)$ 的问题可描述如下:已知控制顶点网 $P = \{P_{i,j}\}_{i,j=1}^{n,m}$ 和权因子网 $W = \{\omega_{i,j}\}_{i,j=0}^{n,m}$ 的四条边界 $\{P_{0,j}, \omega_{0,j}\}_{j=0}^m, \{P_{n,j}, \omega_{n,j}\}_{j=0}^m, \{P_{i,0}, \omega_{i,0}\}_{i=0}^n, \{P_{i,m}, \omega_{i,m}\}_{i=0}^n$, 已知两个参数方向的节点向量 $\{u_i\}_{i=1}^{n+k-1}, \{v_j\}_{j=1}^{m+l-1}$ 和各自 B 样条的阶数 k, l , 求其余的内部控制顶点 $\{P_{i,j}\}_{i,j=1}^{n-1,m-1}$, 使得 $\mathbf{x}(u,v)$ 在所有拥有相同边界控制顶点,相同节点向量和相同阶数的 NURBS 曲面中,面积达到最小。

下面进而考虑要达成此目标所需要的算法。由微分几何可知,域 R 上曲面的面积 $A(\mathbf{x})$ 可以用以下公式计算

$$A(\mathbf{x}) = \iint_R \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| dudv = \iint_R (EG - F^2)^{\frac{1}{2}} dudv,$$

这里 E, F, G 是曲面的第一基本量,面积函数 $A(\mathbf{x})$ 可以看作一个能量函数,而由于其本身是强非线性的,直接求其极小值非常困难,所以可以考虑用其他能量函数,如 Dirichlet 能量函数^[4], Bending 能量函数^[6]等代替面积能量函数,求满足这些能量函数取到极小值的曲面就可以得到欲求的近似极小曲面.由于能量函数的极值可以由对应的 Euler-Lagrange 方程得到,所以可以考虑求解调和方程(Dirichlet 能量函数的 Euler-Lagrange 方程)^[7], 双调和方程(Bending 能量函数的 Euler-Lagrange 方程)^[8]等,用满足这些偏微分方程的曲面作为近似的极小曲面;此外也可以考虑用其他构造曲面的方法来得到近似的极小曲面,如用 mask 的方法^[4].不过这些工作基本上都是基于 CAGD 领域内最为简单的 Bézier 曲面.对于一般的 NURBS 曲面,由于 B 样条基在区间并集内没有显式的表达式,加之对有理曲面求导和求积均是相当复杂,所以无法将已有的基于 Bézier 曲面的相关算法直接推广到 NURBS 曲面.考虑到一张 NURBS 曲面可以转化为一张分片的有理 Bézier 样条曲面来表示,而有理 Bézier 曲面可以用 Hybrid 方法^[9]进行多项式逼近表示,借助这两步,我们就可以将 NURBS 曲面转化为 Bézier 样条逼近曲面,进而解算出分片近似极小曲面.

2 NURBS 极小曲面的构造与解算

由于双 3 次 NURBS 曲面是各类曲面设计软件中最为广泛使用的曲面,所以本文把它作为 NURBS 极小曲面设计的代表性模型.为分析简易和计算简单,不失一般性,假设使用的节点向量满足 $u_i = v_i$, 且 $u_1 = u_2 = 3$, $u_i = i(3 \leq i \leq n+1)$, $u_{n+2} = u_{n+3} = n+1$.

下面给出 NURBS 近似极小曲面构造的算法.

第 1 步,将欲求 NURBS 曲面 $\mathbf{x}^{[0]}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,k}(u) N_{j,l}(v) \mathbf{P}_{i,j}^{[0]} \omega_{i,j}^{[0]}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,k}(u) N_{j,l}(v) \omega_{i,j}^{[0]}}$ 的四条已知的边界 NURBS 曲线,运用 B

样条节点插值方法,转化为形状完全相同的四条有理 Bézier 样条曲线.其理论依据是下列定理 1 与作为推论的性质 1.

定理 1^[9]. 假设节点向量 $T = \{t_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$, 其中 $t_i \leq t_{i+1}$, $t_i < t_{i+k-1}$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 即 $\{t_i\}$ 为非减序列且节点重数 $l < k$; 再假设 $t' = t_{\mu+1} > t_\mu$ 已是 T 重 ($l < k$) 节点,这里若 $l = 0$ 表示 $t' \in (t_\mu, t_{\mu+1}]$.今把 t' 作为新节点加入 T , 由此得到新的节点向量为 $T^{[1]} = \{t_i^{[1]}\}_{i=-\infty}^{+\infty}$, 记在 T 和 $T^{[1]}$ 上定义的 k 阶 B 样条基函数分别是 $N_{i,k}(t)$ 和 $N_{i,k}^{[1]}(t)$, 则 k 阶 B 样条曲线用新旧基函数均可以表示为

$$P(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} N_{i,k}(t) P_i = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} N_{i,k}^{[1]}(t) P_i^{[1]}$$

的充要条件是

$$P_i^{[1]} = \begin{cases} P_i, & i \leq \mu + l - k + 1, \\ \frac{t_{i+k}^{[1]} - t'}{t_{i+k}^{[1]} - t_i^{[1]}} P_{i-1} + \frac{t' - t_{i+k}^{[1]}}{t_{i+k}^{[1]} - t_i^{[1]}} P_i, & \mu + l - k + 1 \leq i \leq \mu, \\ P_{i-1}, & i \leq \mu + 1. \end{cases}$$

性质 1. 对于任意 3 次有理 B 样条曲线 $P(u) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,3}(u) P_i^{[0]} \omega_i^{[0]}}{\sum_{i=0}^n N_{i,3}(u) \omega_i^{[0]}}$, $u_3 \leq u \leq u_{n+1}$, 可以用多次插节点的方法,

将其转化为分段有理 Bézier 样条曲线 $P(u) = \frac{\sum_{i=0}^3 B_i^3 \left(\frac{u-u_s}{u_{s+1}-u_s} \right) P_{s,i}^{[1]} \omega_{s,i}^{[1]}}{\sum_{i=0}^3 B_i^3 \left(\frac{u-u_s}{u_{s+1}-u_s} \right) \omega_{s,i}^{[1]}}$, $3 \leq s \leq n, u_3 \leq u \leq u_{n+1}$, 这里

$$\begin{aligned} (P_{s,0}^{[1]} \omega_{s,0}^{[1]}, \omega_{s,0}^{[1]}) &= \frac{u_{s+1}-u_s}{u_{s+1}-u_{s-1}} \left(\frac{u_{s+1}-u_s}{u_{s+1}-u_{s-2}} (P_{s-3} \omega_{s-3}, \omega_{s-3}) + \frac{u_s-u_{s-2}}{u_{s+1}-u_{s-2}} (P_{s-2} \omega_{s-2}, \omega_{s-2}) \right) + \\ &\quad \frac{u_s-u_{s-1}}{u_{s+1}-u_{s-1}} \left(\frac{u_{s+2}-u_s}{u_{s+2}-u_{s-1}} (P_{s-2} \omega_{s-2}, \omega_{s-2}) + \frac{u_s-u_{s-1}}{u_{s+2}-u_{s-1}} (P_{s-1} \omega_{s-1}, \omega_{s-1}) \right), \\ (P_{s,1}^{[1]} \omega_{s,1}^{[1]}, \omega_{s,1}^{[1]}) &= \frac{u_{s+2}-u_s}{u_{s+2}-u_{s-1}} (P_{s-2} \omega_{s-2}, \omega_{s-2}) + \frac{u_s-u_{s-1}}{u_{s+2}-u_{s-1}} (P_{s-1} \omega_{s-1}, \omega_{s-1}), \\ (P_{s,2}^{[1]} \omega_{s,2}^{[1]}, \omega_{s,2}^{[1]}) &= \frac{u_{s+2}-u_{s+1}}{u_{s+2}-u_{s-1}} (P_{s-2} \omega_{s-2}, \omega_{s-2}) + \frac{u_{s+1}-u_{s-1}}{u_{s+2}-u_{s-1}} (P_{s-1} \omega_{s-1}, \omega_{s-1}), \\ (P_{s,3}^{[1]} \omega_{s,3}^{[1]}, \omega_{s,3}^{[1]}) &= \frac{u_{s+2}-u_{s+1}}{u_{s+2}-u_s} \left(\frac{u_{s+2}-u_{s+1}}{u_{s+2}-u_{s-1}} (P_{s-2} \omega_{s-2}, \omega_{s-2}) + \frac{u_{s+1}-u_{s-1}}{u_{s+2}-u_{s-1}} (P_{s-1} \omega_{s-1}, \omega_{s-1}) \right) + \\ &\quad \frac{u_{s+1}-u_s}{u_{s+2}-u_s} \left(\frac{u_{s+3}-u_{s+1}}{u_{s+3}-u_s} (P_{s-1} \omega_{s-1}, \omega_{s-1}) + \frac{u_{s+1}-u_s}{u_{s+3}-u_s} (P_s \omega_s, \omega_s) \right). \end{aligned}$$

接下来,把刚求得的 4 条有理 Bézier 样条曲线,视作以下待定的有理 Bézier 样条曲面

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{[1]}(u, v) &= \frac{\sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_i^3(u-s) B_j^3(v-t) P_{s,t,i,j}^{[1]} \omega_{s,t,i,j}^{[1]}}{\sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_i^3(u-s) B_j^3(v-t) \omega_{s,t,i,j}^{[1]}}, \\ s \leq u \leq s+1, t \leq v \leq t+1, \quad 3 \leq s \leq n, 3 \leq t \leq m, \quad s, t \in N \end{aligned}$$

的 4 条边界;换言之,把欲求 NURBS 曲面 $\mathbf{x}^{[0]}(u, v)$ 与有理 Bézier 样条曲面 $\mathbf{x}^{[1]}(u, v)$ 视为等价曲面,只要先求出曲面 $\mathbf{x}^{[1]}(u, v)$, 就可转化为曲面 $\mathbf{x}^{[0]}(u, v)$; 其中 $\{P_{3,t,0,j}^{[1]}, \omega_{3,t,0,j}^{[1]}\}_{t=3,j=0}^{m,3}, \{P_{n,t,3,j}^{[1]}, \omega_{n,t,3,j}^{[1]}\}_{t=3,j=0}^{m,3}, \{P_{s,3,i,0}^{[1]}, \omega_{s,3,i,0}^{[1]}\}_{s=3,i=0}^{n,3}, \{P_{s,m,i,3}^{[1]}, \omega_{s,m,i,3}^{[1]}\}_{s=3,i=0}^{n,3}$ 恰为刚求得的 4 条有理 Bézier 样条曲线的控制顶点与权因子,这样就完成了算法的第 1 步。

第 2 步,运用 Hybrid 逼近的方法^[9],将第 1 步中得到的四条边界有理 Bézier 样条曲线用四条多项式 Bézier 样条曲线去逼近.Hybrid 逼近的步骤为:先把 n 次有理 Bézier 曲线 $P(t) = \frac{\sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i \omega_i}{\sum_{i=0}^n B_i^n(t) \omega_i}$ 表为等价的 $r+p$ 次 Hybrid 曲线 $H^{r,p}(t) = \sum_{i=0, i \neq r}^{r+p} B_i^{r+p}(t) H_i^{r,p} + B_r^{r+p}(t) H_r^{r,p}(t), H_r^{r,p}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n B_i^n(t) M_i^{r,p} \omega_i}{\sum_{i=0}^n B_i^n(t) \omega_i}, 0 \leq t \leq 1$; 再用 $\{M_i^{r,p}\}_{k=0}^m$ 凸包内的固定一点 $H_r^{r,p}$ 来代替 $H_r^{r,p}(t)(0 \leq t \leq 1)$, 即用 $r+p$ 次 Bézier 曲线 $\tilde{H}^{r,p}(t) = \sum_{i=0}^{r+p} B_i^{r+p}(t) H_i^{r,p}$ 对有理 Bézier 曲线 $P(t)$ 作 Hybrid 逼近。

本文中,不妨令 $r, p > 0$. Hybrid 曲线的控制顶点的计算方法如下。

算法 1(由 $P(t)$ 计算 $H^{r,p}(t)$).

$$\begin{aligned} H_0^{r,p} &= P_0, \\ H_i^{r,p} &= P_0 + \left(\binom{r+p}{i} \omega_0 \right)^{-1} \sum_{k=1}^{\min(m,i)} \binom{m}{k} \binom{r+p}{i-k} \omega_k (P_k - H_{i-k}^{r,p}), \quad i = 1, 2, \dots, r-1, \\ H_{r+p}^{r,p} &= P_m, \end{aligned}$$

$$H_i^{r,p} = P_m + \left(\binom{r+p}{i} \omega_m \right)^{-1} \sum_{k=\max(0,i+m-r-p)}^{m-1} \binom{m}{k} \binom{r+p}{i+m-k} \omega_k (P_k - H_{i+m-k}^{r,p}), i = r+p-1, r+p-2, \dots, r$$

$$M_k^{r,p} = P_k + \left(\binom{m}{k} \binom{r+p}{r} \omega_k \right)^{-1} \sum_{k=\max(0,k-p)}^{\min(k+r,m)} \binom{m}{i} \binom{r+p}{k+r-i} \omega_i (P_i - H_{k+r-i}^{r,p}), k = 0, 1, \dots, m.$$

运用这个算法,我们就可以得到 Bézier 样条曲线形式的逼近边界曲线.同样地,在第 1 步中由待求 NURBS 曲面等价地写成的待求有理 Bézier 样条曲面 $\mathbf{x}^{[1]}(u, v)$,也可运用 Hybrid 逼近法^[9]近似地写成以下待求的分片 Bézier 逼近曲面

$$\mathbf{x}^{[2]}(u, v) = \sum_{i=0}^{r+p} \sum_{j=0}^{r+p} B_i^{r+p}(u-s) B_j^{r+p}(v-t) P_{s,t,i,j}^{[2]},$$

$$s \leq u \leq s+1, t \leq v \leq t+1, 3 \leq s \leq n, 3 \leq t \leq m, s, t \in N.$$

这里 $P_{s,t,i,j}^{[2]}$ 是 Hybrid 逼近曲面的控制顶点网,而原问题转化为:已知双 $r+p$ 次 Bézier 样条曲面 $\mathbf{x}^{[2]}(u, v)$ 四条边界样条曲线的控制顶点 $\{P_{n,t,r+p,j}^{[2]}\}_{t=3,j=0}^{m,r+p}, \{P_{s,0,i,0}^{[2]}\}_{s=3,i=0}^{n,r+p}, \{P_{0,t,0,j}^{[2]}\}_{t=3,j=0}^{m,r+p}, \{P_{s,m,i,r+p}^{[2]}\}_{s=3,i=0}^{n,r+p}$, 求其余控制顶点,使得 $\mathbf{x}^{[2]}(u, v)$ 在所有以这四条样条曲线为边界的分片双 $r+p$ 次 Bézier 曲面中,面积达到最小.

经过前面两个步骤,我们得到了 Bézier 样条逼近曲面 $\mathbf{x}^{[2]}(u, v)$ 的边界曲线的控制顶点,不过对于 Bézier 样条曲面来说,每一子曲面只和对应的控制顶点相关,而在所讨论的问题中只提供了整体曲面的边界条件,势必对于很多子片来说,是缺少边界条件的,这样就不能用极小化能量函数的方法稳定地求解每张子片的未知控制顶点.为此,需要预先适当地设定所有子片的边界控制顶点,作为其后迭代运算的子片边界初始值,再求出所有子片的内部控制顶点初始值.因此我们引入这样一个策略:先用线性插值计算出所有子片的边界控制顶点,再对于每个子片用极小化 Dirichlet 能量函数等方法求出初始曲面,然后运用先更新子片边界,再对每个子片进行优化运算的方法进行整体迭代运算,最后得到近似的分片 Bézier 极小曲面.

所以算法的第 3 步,即为求所有子片边界控制顶点的初始值,我们运用以下 3 个公式进行计算:

$$P_{s,t,r+p,j}^{[2]} = P_{s+1,t,0,j}^{[2]} = \frac{n-s}{n-2} P_{3,t,0,j}^{[2]} + \frac{s-2}{n-2} P_{n,t,r+p,j}^{[2]}, 1 \leq j \leq r+p-1;$$

$$P_{s,t,i,r+p}^{[2]} = P_{s,t+1,i,0}^{[2]} = \frac{m-t}{m-2} P_{s,3,i,0}^{[2]} + \frac{t-2}{m-2} P_{s,m,i,r+p}^{[2]}, 1 \leq i \leq r+p-1;$$

$$P_{s,t,r+p,r+p}^{[2]} = P_{s+1,t,0,r+p}^{[2]} = P_{s,t+1,r+p,0}^{[2]} = P_{s+1,t+1,0,0}^{[2]} =$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{n-s}{n-2} P_{3,t,0,r+p}^{[2]} + \frac{s-2}{n-2} P_{n,t,r+p,r+p}^{[2]} + \frac{m-t}{m-2} P_{s,3,r+p,0}^{[2]} + \frac{t-2}{m-2} P_{s,m,r+p,r+p}^{[2]} \right),$$

$$3 \leq s \leq n-1, 3 \leq t \leq m-1.$$

从以上公式可以发现,这张 Bézier 样条曲面的相邻子片具有公用边界,即对相邻子片的公共边界曲线而言,其控制顶点位置是完全相同的.

然后是算法的第 4 步,也就是求所有子片内部控制顶点的初始值.这一步我们可以使用多种方法之一,如极小化 Dirichlet 能量函数

$$D(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \iint_R (\|\mathbf{x}_u\|^2 + \|\mathbf{x}_v\|^2) dudv,$$

极小化 Bending 能量函数

$$B(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \iint_R (\|\mathbf{x}_{uu}\|^2 + 2\|\mathbf{x}_{uv}\| + \|\mathbf{x}_{vv}\|^2) dudv,$$

或者求满足调和方程 $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0$, 双调和方程 $\mathbf{x}_{uuuu} + 2\mathbf{x}_{uuvv} + \mathbf{x}_{vvvv} = 0$ 等偏微分方程的曲面.

最后是算法的第 5 步,即是求分片 Bézier 极小曲面的迭代优化算法.对于一个需要进行迭代运算的分片 Bézier 曲面控制顶点网,也就是经过前 4 步得到的初始控制顶点网,或者经过第 5 步中某次迭代得到的控制顶点

网,先对除整体边界以外的子片边界控制顶点用以下算法进行更新,即取其周围两行(列)控制顶点的平均值,公式如下:

$$\begin{aligned} P_{s,t,r+p,j}^{[2]} &= P_{s+1,t,0,j}^{[2]} = (P_{s,t,r+p-1,j}^{[2]} + P_{s+1,t,1,j}^{[2]})/2, 1 \leq j \leq r+p-1, \\ P_{s,t,i,r+p}^{[2]} &= P_{s,t+1,i,0}^{[2]} = (P_{s,t,i,r+p-1}^{[2]} + P_{s,t+1,i,1}^{[2]})/2, 1 \leq i \leq r+p-1, \\ P_{s,t,r+p,r+p}^{[2]} &= P_{s+1,t,0,r+p}^{[2]} = P_{s,t+1,r+p,0}^{[2]} = P_{s+1,t+1,0,0}^{[2]} = \\ &= \frac{1}{4}(P_{s,t,r+p-1,r+p-1}^{[2]} + P_{s+1,t,1,r+p-1}^{[2]} + P_{s,t+1,r+p-1,1}^{[2]} + P_{s+1,t+1,r+p-1,r+p-1}^{[2]}), \\ &3 \leq s \leq n-1, 3 \leq t \leq m-1. \end{aligned}$$

这样就可以在尽量不改变曲面形状的基础上保证相邻子片间的连续性.更新完所有子片边界后,对每个子片再进行以下优化运算以更新每个子片的内部控制顶点,这一步运算也是一个迭代过程.

引入下面的能量函数

$$I(\mathbf{x}) = \iint_R \left(\frac{EG_0 - 2FF_0 + GE_0}{\sqrt{E_0G_0 - F_0^2}} \right) dudv = \iint_R \left(\frac{\|\mathbf{x}_u\|^2 G_0 - 2(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)F_0 + \|\mathbf{x}_v\|^2 E_0}{\sqrt{E_0G_0 - F_0^2}} \right) dudv.$$

这里 E_0, F_0, G_0 为需要进行迭代运算的曲面的第一基本量, E, F, G 为要求出的新曲面的第一基本量.容易看出,若两张曲面完全相同,这个能量函数就直接退化为面积能量函数 $A(\mathbf{x})$,进而计算 $A(\mathbf{x})$ 的极小值就可以得到真正的极小曲面.所以我们用这个能量函数进行迭代可以优化极小曲面的逼近程度.具体步骤为:对每一子片施行极小化能量函数 $I(\mathbf{x})$,求取内部控制顶点的迭代运算.这也是求每个子片局部近似极小曲面的过程.由于每个子片近似极小,整体样条曲面亦为近似极小.

由此可见,迭代算法的第 5 步,直到进行一次迭代前后曲面的 L_2 误差小于用户给定的公差以后,我们就可以得到一张近似的 Bézier 极小样条曲面,显然这是一张退化的 NURBS 近似极小曲面.如果用户不要求目标曲面严格插值原始的 NURBS 边界曲线,则至此已经达到了目标;否则还需要在保持此边界曲线插值的条件下,求取逼近此 Bézier 样条曲面的一张有理 Bézier 近似极小样条曲面,目标是保证这两张样条曲面的 L_2 差距

$$\int_3^{n+1} \int_3^{m+1} (\mathbf{x}^{[1]}(u,v) - \mathbf{x}^{[2]}(u,v))^2 dvdu$$

尽量小,而这可用普通的迭代算法实现.再进一步,如果要求目标曲面是一般 NURBS 形式且要求控制顶点及权因子在给定边界上与边界 NURBS 曲线分别保持一致,则我们还需要把上一步所得的有理 Bézier 样条曲面等价地转化为一张保边界条件的 NURBS 近似极小曲面,为此,还需在上一步求有理 Bézier 样条曲面时把待定权因子预设为可分解型^[9] $\omega_{s,t,i,j}^{[1]} = G_{s,t,i} H_{s,t,j}$,并在第 1 步结束时对四条有理 Bézier 样条边界曲线施以适当的参数变换.

下面举 4 个实例.

例 1:给定极小曲面的公差为 0.01,给定一张双三次 NURBS 曲面的控制顶点和对应的权因子矩阵 $(P_{ij}, \omega_{ij})_{4 \times 4}$ 如下:

$$\begin{bmatrix} (-1, 2, 1, 2) & (-1, 0, 2.72, 1) & (-1, 0, -2.72, 1) & (-1, -2, -1, 2) \\ (-0.5, 2, -2, 1) & Unknown & Unknown & (-0.5, -2, 2, 1) \\ (0.5, 2, -2, 1) & Unknown & Unknown & (0.5, -2, 2, 1) \\ (1, 2, 1, 2) & (1, 0, 2.72, 1) & (1, 0, -2.72, 1) & (1, -2, -1, 2) \end{bmatrix},$$

行列节点向量均取 [3, 3, 3, 4, 4, 4].则我们经迭代 7 次,可计算出插值给定边界曲线的一张双三次 NURBS 近似极小曲面(见图 1),其内部 4 个控制顶点及权因子为

$$\begin{bmatrix} (P_{11}, \omega_{11}) & (P_{12}, \omega_{12}) \\ (P_{21}, \omega_{21}) & (P_{22}, \omega_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-0.6950, 1.9103, 0.1588, 3.1390) & (-0.6950, -1.9102, -0.1588, 3.1392) \\ (0.6950, 1.9103, 0.1588, 3.1389) & (0.6950, -1.9101, -0.1588, 3.1390) \end{bmatrix},$$

例 2:给定极小曲面的公差为 0.04,给定一张双三次 NURBS 曲面的控制顶点和对应的权因子矩阵

$(P_{ij}, \omega_{ij})_{5 \times 5}$ 如下:

$$\begin{bmatrix} (-1, 2, 0.5, 2) & (-1, 1, 2.72, 1) & (-1, 0, 0, 1) & (-1, -1, -2.72, 1) & (-1, -2, 0.5, 2) \\ (-0.5, 2, 1, 1) & Unknown & Unknown & Unknown & (-0.5, -2, -1, 1) \\ (0, 2, 2, 1) & Unknown & Unknown & Unknown & (0, -2, -2, 1) \\ (0.5, 2, 1, 1) & Unknown & Unknown & Unknown & (0.5, -2, -1, 1) \\ (1, 2, 0.5, 2) & (1, 1, 2.72, 1) & (1, 0, 0, 1) & (1, -1, -2.72, 1) & (1, -2, 0.5, 2) \end{bmatrix}$$

行列节点向量均取 [3,3,3,4,5,5,5], 则我们经迭代 3 次, 可计算出欲求的插值给定边界曲线的一张双三次 NURBS 近似极小曲面(见图 2), 其内部数个控制顶点及权因子为

$$\begin{bmatrix} (P_{11}, \omega_{11}) & (P_{12}, \omega_{12}) & (P_{13}, \omega_{13}) \\ (P_{21}, \omega_{21}) & (P_{22}, \omega_{22}) & (P_{23}, \omega_{23}) \\ (P_{31}, \omega_{31}) & (P_{32}, \omega_{32}) & (P_{33}, \omega_{33}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-0.4080, 1.1873, 1.5303, 0.9760) & (-0.6745, -0.0432, -0.3056, 1.1134) & (-0.4909, -1.3716, -0.7268, 0.7589) \\ (0.0018, 1.3110, 0.2479, 0.8488) & (-0.0035, 1.3916, 0.9835, 0.4185) & (0.0037, -1.4967, -0.8110, 1.3788) \\ (0.4066, 1.1869, 1.5273, 0.9772) & (0.6769, -0.0476, -0.3118, 1.1090) & (0.4831, -1.3772, -0.7203, 0.7474) \end{bmatrix},$$

以下两个例子给出了按相应算法得到的分片 Bézier 近似极小曲面, 其边界是给定初始边界的一个近似.

例 3: 给定一张双三次 NURBS 曲面的控制顶点和对应的权因子矩阵 $(P_{ij}, \omega_{ij})_{4 \times 4}$ 如下:

$$\begin{bmatrix} (-1, 1, 0, 1) & (-1, 1, -2, 1/3) & (1, 1, -2, 1/3) & (1, 1, 0, 1) \\ (0.75, 1, 0, 0.2) & Unknown & Unknown & (-0.75, 1, 0, 0.2) \\ (0.5, -1, 0, 0.2) & Unknown & Unknown & (-0.5, -1, 0, 0.2) \\ (-0.5, -1, 0, 1) & (-0.5, -1, -1, 1/3) & (0.5, -1, -1, 1/3) & (0.5, -1, 0, 1) \end{bmatrix},$$

行列节点向量均取 [3,3,3,4,4,4]. 结果得到的与原曲面有近似边界的近似极小 Bézier 曲面如图 3 所示.

例 4: 给定一张双三次 NURBS 曲面的控制顶点和对应的权因子矩阵 $(P_{ij}, \omega_{ij})_{4 \times 4}$ 如下:

$$\begin{bmatrix} (-1, 1, 0, 1) & (-1, 1, -2, 1/3) & (1, 1, -2, 1/3) & (1, 1, 0, 1) \\ (-3, 1, 0, 1/3) & Unknown & Unknown & (3, 1, 0, 1/3) \\ (-3, -1, 0, 1/3) & Unknown & Unknown & (3, -1, 0, 1/3) \\ (-1, -1, 0, 1) & (-1, -1, -2, 1/3) & (1, -1, -2, 1/3) & (1, -1, 0, 1) \end{bmatrix},$$

行列节点向量均取 [3,3,3,4,4,4]. 结果得到的与原曲面有近似边界的近似极小 Bézier 曲面如图 4 所示.

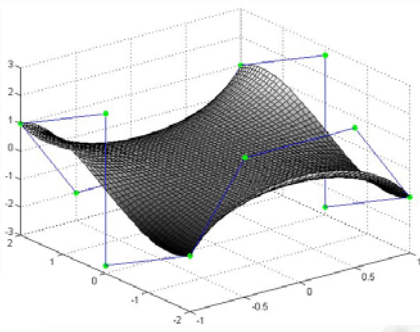


Fig.1 Result of example 1, the green solid points are the control points of the bounds of the surface
图 1 例 1 的计算结果, 实心圆点表示边界控制顶点

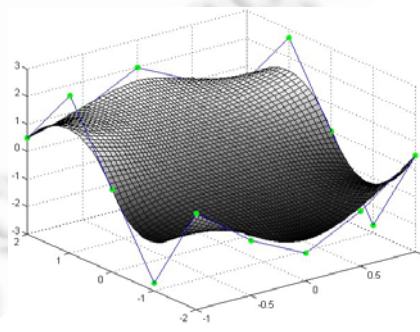


Fig.2 Result of example 2, the green solid points are the control points of the bounds of the surface
图 2 例 2 的计算结果, 实心圆点表示边界控制顶点

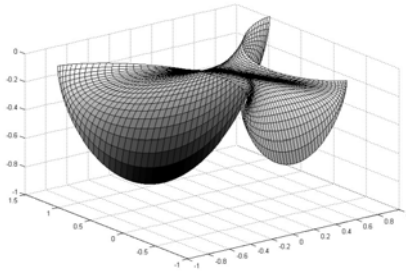


Fig.3 The result of example 3

图3 例3的计算结果

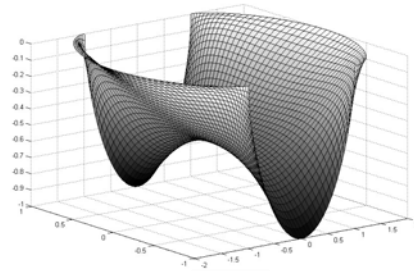


Fig.4 The result of example 4

图4 例4的计算结果

3 结论

本文成功地构造了已知边界条件求取矩形域上一般 NURBS 近似极小曲面的算法,并对实际应用最为广泛的双三次 NURBS 曲面,用实例验证了方法的正确和有效.需要指出的是,在计算分片 Bézier 极小曲面时,本文其实是对每个子片分别进行计算的,没有统一地考虑整体曲面的性质,而且算法中多次用到了迭代过程,需要付出一定的运算时间代价.因此,如何基于整体曲面性质的考虑去加速构造性质更优良的 NURBS 曲面,乃是今后需要继续深入研究的课题之一.

致谢 在此,我们向对本文的工作给予支持和建议的同行表示感谢.

References:

- [1] Chen X. Design of rational Bézier minimal surface: an extension of Dirichlet approach [MS. Thesis]. Hangzhou: Zhejiang University, 2006 (in Chinese with English abstract).
- [2] Farin G, Hansford D. Discrete Coons patches. *Computer Aided Geometric Design*, 1999,16,691-700.
- [3] Monderde J. The Plateau-Bézier problem. In: *The Proc. of the X Conf. on Mathematics of Surfaces*, Leeds, UK. In: LNCS 2768, Springer-Verlag, Berlin/New York, 2003. 262-273.
- [4] Monderde J. Bézier surfaces of minimal area: The Dirichlet approach. *Computer Aided Geometric Design*, 2004,21,117-136. [doi: 10.1016/j.cagd.2003.07.009]
- [5] Man JJ, Wang GZ. Approximating to nonparameterized minimal surface with B-spline surface. *Journal of Software*, 2003,14: 824-829 (in Chinese with English abstract).
- [6] Miao YW, Shou HH, Feng JQ, Peng QS, Robin FA. Bézier surfaces of minimal internal energy. *Mathematics of Surface*, 2005, 318-335.
- [7] Cosin C, Monderde J. Bézier surfaces of minimal area. *International Conference on Computational Science*, 2002, 72-81.
- [8] Monderde J, Ugail H. On harmonic and biharmonic Bézier surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 2004,21,697-715. [doi: 10.1016/j.cagd.2004.07.003]
- [9] Wang GJ, Wang GZ, Zheng JM. *Computer Aided Geometric Design*. Beijing: China Higher Education Press; Heidelberg: Springer-Verlag, 2001 (in Chinese).

附中文参考文献:

- [1] 陈笑.有理 Bézier 极小曲面设计: Dirichlet 方法的推广[硕士学位论文].杭州:浙江大学,2006.
- [5] 满家巨,汪国昭.B-样条函数极小曲面造型.软件学报,2003,14:824-829.
- [9] 王国瑾,汪国昭,郑建民.计算机辅助几何设计.北京:高等教育出版社;海德堡:施普林格出版社,2001.



吴花精灵(1986—),男,浙江嵊州人,主要研究领域为计算机辅助几何设计,计算机图形学.



王国瑾(1944—),男,教授,博士生导师,主要研究领域为计算机辅助几何设计,数字几何处理,几何逼近.