

面向知识结构分析的模糊概念格模型*

智慧来¹, 李金海^{2,3}

¹(河南理工大学 软件学院, 河南 焦作 454000)

²(昆明理工大学 数据科学研究中心, 云南 昆明 650500)

³(昆明理工大学 理学院, 云南 昆明 650500)

通信作者: 李金海, E-mail: kunminglijinhai@kust.edu.cn



摘要: 知识空间理论使用数学语言对学习者的知识评价与学习指导, 属于数学心理学的研究范畴. 技能与问题是构成知识空间的两个基本要素, 深入研究两者之间的关系是知识状态刻画与知识结构分析的内在要求. 在当前的知识空间理论研究中, 没有明确建立技能与问题之间的双向映射, 从而难以提出直观概念意义下的知识结构分析模型, 也没有明确建立知识状态之间的偏序关系, 不利于刻画知识状态之间的差异, 更不利于规划学习者未来的学习路径. 此外, 现有的成果主要集中在经典的知识空间, 没有考虑实际问题中数据的不确定性. 为此, 将形式概念分析与模糊集引入知识空间理论, 建立面向知识结构分析的模糊概念格模型. 具体地, 分别建立知识空间与闭包空间的模糊概念格模型. 首先, 建立知识空间模糊概念格, 并通过任意两个概念的上确界证明所有概念的外延构成知识空间. 引入粒描述的思想定义技能诱导的问题原子粒, 由问题原子粒的组合判定一个问题组合是否是知识空间中的一个状态, 进而提出由问题组合获取知识空间模糊概念的方法. 其次, 建立闭包空间模糊概念格, 并通过任意两个概念的下确界证明所有概念的外延构成闭包空间. 类似地, 定义问题诱导的技能原子粒, 由技能原子粒的组合判定一个技能组合是否是闭包空间中某一知识状态所需的技能, 进而提出由技能组合获取闭包空间模糊概念的方法. 最后, 通过实验分析问题数量、技能数量、填充因子以及分析尺度对知识空间与闭包空间规模的影响. 结论表明知识空间模糊概念不同于现有的任何概念, 也不能从其他概念派生而来. 闭包空间模糊概念本质上是一种面向属性单边模糊概念. 在二值技能形式背景中, 知识空间与闭包空间中的状态具有一一对应关系, 但这种关系在模糊技能形式背景中并不成立.

关键词: 形式概念分析; 知识空间理论; 粒计算; 粒描述; 模糊概念格

中图法分类号: TP18

中文引用格式: 智慧来, 李金海. 面向知识结构分析的模糊概念格模型. 软件学报, 2024, 35(5): 2466–2484. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/6899.htm>

英文引用格式: Zhi HL, Li JH. Fuzzy Concept Lattice Models for Knowledge Structure Analysis. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2024, 35(5): 2466–2484 (in Chinese). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/6899.htm>

Fuzzy Concept Lattice Models for Knowledge Structure Analysis

ZHI Hui-Lai¹, LI Jin-Hai^{2,3}

¹(School of Software, Henan Polytechnic University, Jiaozuo 454000, China)

²(Data Science Research Center, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500, China)

³(Faculty of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500, China)

* 基金项目: 国家自然科学基金 (11971211); 河南省自然科学基金 (222300420445); 河南省高校基本科研业务费专项 (NSFRF210318)
收稿时间: 2022-08-25; 修改时间: 2022-11-15; 采用时间: 2023-01-05; jos 在线出版时间: 2023-06-28
CNKI 网络首发时间: 2023-06-29

Abstract: Knowledge space theory, which uses mathematical language for the knowledge evaluation and learning guide of learners, belongs to the research field of mathematical psychology. Skills and problems are the two basic elements of knowledge space, and an in-depth study of the relationship between them is the inherent requirement of knowledge state description and knowledge structure analysis. In the existing knowledge space theory, no explicit bi-directional mapping between skills and problems has been established, which makes it difficult to put forward a knowledge structure analysis model under intuitive conceptual meanings. Moreover, the partial order relationship between knowledge states has not been clearly obtained, which is not conducive to depicting the differences between knowledge states and planning the learning path of learners. In addition, the existing achievements mainly focus on the classical knowledge space, without considering the uncertainties of data in practical problems. To this end, this study introduces formal concept analysis and fuzzy sets into knowledge space theory and builds the fuzzy concept lattice models for knowledge structure analysis. Specifically, fuzzy concept lattice models of knowledge space and closure space are presented. Firstly, the fuzzy concept lattice of knowledge space is constructed, and it is proved that the extents of all concepts form a knowledge space by the upper bounds of any two concepts. The idea of granule description is introduced to define the skill-induced atomic granules of problems, whose combinations can help determine whether a combination of problems is a state in the knowledge space. On this basis, a method to obtain the fuzzy concepts in the knowledge space from the problem combinations is proposed. Secondly, the fuzzy concept lattice of closure space is established, and it is proved that the extents of all concepts form the closure space by the lower bounds of any two concepts. Similarly, the problem-induced atomic granules of skills are defined, and their combinations can help determine whether a skill combination is the skills required by a knowledge state in the closure space. In this way, a method to obtain the fuzzy concepts in the closure space from the skill combinations is presented. Finally, the effects of the number of problems, the number of skills, the filling factor, and the analysis scale on the sizes of knowledge space and closure space are analyzed by some experiments. The results show that the fuzzy concepts in the knowledge space are different from any existing concept and cannot be derived from other concepts. The fuzzy concepts in the closure space are attribute-oriented one-sided fuzzy concepts in essence. In the formal context of two-valued skills, there is one-to-one correspondence between the states in knowledge space and closure space, but this relationship does not hold in the formal context of fuzzy skills.

Key words: formal concept analysis; knowledge space theory; granular computing; granule description; fuzzy concept lattice

1985年, 数学心理学家 Doignon 等人提出了知识空间理论 (knowledge space theory), 旨在用数学语言对学习者的知识评价与学习指导^[1-3]. 知识空间理论能够有效地了解学生群体对解决特定学科领域中具体问题的情况, 最初主要用于数学学科, 目前已扩展到物理学、化学、医学等其他学科^[4-8]. 知识结构是知识空间理论中最重要的基本概念之一, 主要用于评估学习者的知识并指导其未来的学习. 知识状态刻画与知识结构分析是知识空间理论的重点研究课题, 同时也是进一步有效地规划学习路径的前提和基础.

技能与问题是知识空间的两个基本要素, 深入研究两者之间的关系是知识状态刻画与知识结构分析的内在要求. 围绕这一核心问题, 已经有众多学者提出了各自的想法. Rusch 等人^[9]建立了知识空间理论与形式概念分析之间的联系, 提出了由形式背景构造知识空间的方法. Spoto 等人^[10]论述了知识结构分析的两种模型, 并提出了一种从原始数据迭代构建技能形式背景的方法. Doignon^[11]提出了一种由技能映射诱导知识状态的方法, 并定义了极小技能映射, 以消除知识结构分析中存在的冗余信息. Stefanutti 等人^[12]将知识空间理论扩展到错误概念的建模, 并利用多层次技能图刻画认知过程中的不确定性. Sun 等人^[13]研究了模糊技能背景的知识状态, 并提出了一种通过技能映射获取知识结构的算法. Heller 等人^[14]提出了学习者的技能评定的一个充要条件. Stefanutti 等人^[15]提出了一种基于知识空间理论的学习能力评价方法, 建立了学习者的能力状态与绩效状态的对应关系. 最近, Sun 等人^[16]在分析不同技能的重要性的基础上, 提出了一种利用模糊技能构建多分知识结构的方法. 孙晓燕等人^[17]将程序性知识的评价结果用于构建项目状态空间, 进而构造了多分知识结构.

综上所述, 在当前的知识空间理论下, 虽然建立了技能与问题之间的联系, 提出了若干技能评估的方法, 但是仍存在以下不足: (1) 没有明确建立技能与问题之间的双向映射, 从而难以提出直观概念意义下的知识结构分析模型. (2) 没有建立知识状态之间的偏序关系, 不利于刻画知识状态间存在的差异, 也不利于规划学习者未来的学习路径. (3) 面向大规模数据的知识结构分析尚未得到深入研究. (4) 现有的成果主要集中在经典的知识空间, 没有考虑实际问题中存在的不完备性与模糊性. 简言之, 目前面向大规模数据的知识结构分析研究在可解释性与效率等方面仍有很大的提升空间.

粒计算 (granular computing) 是现代大规模数据分析的有力工具. 自 1979 年被提出以来, 其思想得到了国际上

众多研究人员的关注^[18-20]. 信息粒化是粒计算的核心机制, 本质上是对问题空间进行划分. 粒计算解决复杂问题的思路是研究多粒度空间中信息粒之间的转换与推理, 从粒度的变换中寻求问题的解决方案. 粒描述是粒计算领域中公认的重要问题之一, 主要研究粒的独有特征的刻画, 并注重概念语义下粒描述的可解释性^[19-21]. 研究表明, 从数学的角度来看, 知识空间是一种偏序结构^[22], 这与问题空间的结构完全一致, 因此采用粒计算实现知识状态刻画与知识结构分析是合理且可行的.

形式概念分析的数学基础是格论与序论, 是粒计算最有效的理论工具之一^[23]. 概念格是形式概念分析的核心数据结构, 直观地刻画了概念间的多重继承关系, 是对同一领域内容观事物及其内在联系的高度抽象与描述, 已经在人工智能领域中广泛应用^[24,25]. 由于概念格的构造是一个 NP-hard 问题, 如何有效快速地建立概念格, 并进行保持某种特定结构不变的约简始终是形式概念分析领域的重要课题, 众多学者提出了各自的方法^[26-30].

此外, 粒计算的思想也逐步融入到形式概念分析这一领域, 更加注重粒在构造复杂概念系统中的作用, 在粒概念、粒规则、粒约简等方面取得了一系列研究成果^[31-37]. 例如, Zhi 等人^[38]将粒描述的思想融入到概念的建模, 提出了一种融合共同属性与必然属性的概念.

为了满足不确定性数据分析的需求, 研究者还提出了面向属性概念^[39]、面向对象概念^[40,41]等概念. 对这些概念做进一步研究吸引了有关学者的兴趣. Medina^[42,43]建立了概念格、面向对象概念格与面向属性概念格三者之间的内在联系. Ma 等人^[44]提出了一种获取面向对象概念的方法. 一些学者还提出了面向对象概念格与面向属性概念格框架下的属性约简方法^[45,46].

为了明确建立技能与问题之间的双向映射, 获得知识状态之间的偏序关系, 并考虑数据的不确定性^[47], 本文将形式概念分析与模糊集^[48]引入知识空间理论, 建立面向知识结构分析的模糊概念格模型. 具体地, 首先建立析取模型下知识空间的模糊概念格模型, 研究由问题原子粒获得知识空间模糊概念的方法; 其次, 建立合取模型下闭包空间的模糊概念格模型, 研究由技能原子粒获得闭包空间模糊概念的方法; 然后, 讨论模糊技能形式背景与二值技能形式背景的知识结构的联系; 最后, 总结全文, 并指出今后需要进一步研究的问题.

1 基础知识

为了本文内容的完整性以及方便读者阅读, 本节介绍下文中即将涉及的基本概念.

1.1 知识与模糊技能形式背景

知识空间理论的基本概念可参考文献^[1-3]. 问题是知识空间的一个基本要素, 知识状态与知识结构是知识空间理论的核心概念. 集合论是形式化表述这些基本概念的有力工具.

问题可以表示为一个有限非空集合 Q , 它的任意一个子集就是一个知识状态, 记为 K ; 进一步, 若 \mathcal{K} 是一个知识状态的集合, 且包含 \emptyset 和 Q , 则称 \mathcal{K} 为 Q 上的一个知识结构. 若已经明确问题集 Q , 则可用 \mathcal{K} 直接表示一个知识结构.

对于 $\forall K_i, K_j \in \mathcal{K}$, 若 $K_i \cup K_j \in \mathcal{K}$ 成立, 则称 \mathcal{K} 为知识空间 (knowledge space); 若 $K_i \cap K_j \in \mathcal{K}$ 成立, 则称 \mathcal{K} 为闭包空间 (closure space).

在知识空间理论中, 技能是与问题紧密联系的又一基本要素, 可以表示为一个有限非空集合 S .

令 $\tau(q)$ 表示能够解决问题 q 的所有技能. 对技能子集 $T \subseteq S$, T 在析取模型下确定的知识状态为 $K = \{q \in Q | \tau(q) \cap T \neq \emptyset\}$, 且遍历 S 的子集所确定的知识状态构成的集族 \mathcal{K} 为知识空间.

此外, T 在合取模型下确定的知识状态为 $K = \{q \in Q | \tau(q) \subseteq T\}$, 由 S 的子集诱导的知识状态 \mathcal{L} 形成了闭包空间.

模糊集可视为分明集的推广. 给定一个论域 U , 一个模糊集 \tilde{F} 是从 U 到 $[0, 1]$ 的一个映射, 记作 $\tilde{F} = \left\{ \frac{\tilde{F}(u)}{u} \mid u \in U \right\}$. 此外, 在下文中 U 上的全体模糊集记为 $[0, 1]^U$. 若不考虑模糊性, 则 U 的全体子集记为 2^U . 令 $X \times Y \in 2^U \times 2^V$, 则 X 与 Y 之间的模糊二元关系是一个从 $X \times Y$ 到 $[0, 1]$ 的一个映射.

设 \tilde{F}_1 与 \tilde{F}_2 是两个模糊集, 称 \tilde{F}_1 包含于 \tilde{F}_2 当且仅当若对于任意的 $u \in U$ 有 $\tilde{F}_1(u) \leq \tilde{F}_2(u)$, 记作 $\tilde{F}_1 \subseteq \tilde{F}_2$. 此外,

定义 \tilde{F}_1 和 \tilde{F}_2 的交与并运算如下:

$$\tilde{F}_1 \cap \tilde{F}_2 = \left\{ \frac{\tilde{F}_1(u) \wedge \tilde{F}_2(u)}{u} \mid u \in U \right\},$$

$$\tilde{F}_1 \cup \tilde{F}_2 = \left\{ \frac{\tilde{F}_1(u) \vee \tilde{F}_2(u)}{u} \mid u \in U \right\}.$$

定义 1. 称三元组 $\tilde{\Pi} = (Q, S, \tilde{I})$ 是一个模糊技能形式背景, 其中 Q 是问题的有限集合, S 是技能的有限集合, \tilde{I} 是 Q 与 S 之间的模糊二元关系.

例 1: 一个模糊技能形式背景 $\tilde{\Pi}$ 包含 5 个问题和 4 个技能, 如表 1 所示.

表 1 模糊技能形式背景 $\tilde{\Pi}$

问题	s_1	s_2	s_3	s_4
q_1	0	0.6	0.8	0
q_2	0.8	0	0.7	0.6
q_3	0	0.7	0	0
q_4	0	0.5	0.9	0
q_5	0	0	0.7	0

利用 $q^{\&} = \left\{ \frac{\tilde{I}(q, s)}{s} \mid s \in S \right\}$ 表示能够解决问题 q 的所需技能. 直观地, $q^{\&}$ 表示模糊技能形式背景 $\tilde{\Pi}$ 的一行. 例如, 对于表 1 的模糊技能形式背景 $\tilde{\Pi}$ 有 $q_1^{\&} = \left\{ \frac{0.6}{s_2}, \frac{0.8}{s_3} \right\}$.

1.2 面向对象概念格与面向属性概念格

为了利用形式概念分析的基本理论建立知识空间与闭包空间的模糊概念格模型, 本节简要介绍相关的基本概念.

一个形式背景 $\Pi = (G, M, R)$ 是用一组属性 M 通过二元关系 R 刻画一组对象 G . 记对象 a 拥有的全体属性为 a^* , 拥有属性 b 的全体对象为 b^* .

定义 2^[39,40]. 在形式背景 $\Pi = (G, M, R)$ 中, 设 $A \subseteq G, B \subseteq M$. 记:

$$A^\square = \{b \in M \mid b^* \subseteq A\},$$

$$B^\diamond = \{a \in G \mid a^* \cap B \neq \emptyset\}.$$

如果 $A = B^\diamond$ 且 $B = A^\square$, 则称二元组 (A, B) 是一个面向对象概念.

形式背景 $\Pi = (G, M, R)$ 的所有面向对象概念通过层次序构成一个完备格, 称为面向对象概念格. 类似地, 定义对象集上的 \diamond 运算与属性集上的 \square 运算, 可以得到如下的面向属性概念与面向属性概念格.

定义 3^[39]. 在形式背景 $\Pi = (G, M, R)$ 中, 设 $A \subseteq G, B \subseteq M$. 记:

$$A^\diamond = \{b \in M \mid b^* \cap A \neq \emptyset\},$$

$$B^\square = \{a \in G \mid a^* \subseteq B\}.$$

如果 $A = B^\square$ 且 $B = A^\diamond$, 则称二元组 (A, B) 是一个面向属性概念.

形式背景 $\Pi = (G, M, R)$ 的所有面向属性概念通过层次序构成一个完备格, 称为面向属性概念格.

从数学上, 技能背景与形式背景是完全一致的. 区别仅在于形式背景中的对象集 G 被替换为 Q , 以表示知识空间理论中的问题集, 同时将属性集 M 替换为 S , 以表示知识空间理论中的技能集. 因此, 在不影响理解的前提下, 下文中不区分技能背景与形式背景.

2 知识空间模糊概念格

本节定义知识空间模糊概念格, 并采用粒描述的思想给出识别知识空间中知识状态的方法.

定义 4. 设 $\tilde{\Pi} = (Q, S, \tilde{I})$ 是一个模糊技能形式背景, $q \in Q, s \in S, A \subseteq Q$. 定义 $(q, s)^\perp = \{q' | 0 < \tilde{I}(q', s) \leq \tilde{I}(q, s), q' \in Q\}$, $\Delta(A, s) = \{q | \emptyset \neq (q, s)^\perp \subseteq A, q \in Q\}$.

定义 5. 设 $\tilde{\Pi} = (Q, S, \tilde{I})$ 是一个模糊技能形式背景, $A \in 2^Q, \tilde{B} \in [0, 1]^S$. 定义:

$$f(A) = \left\{ \frac{\alpha}{s} \mid s \in S \right\}, \alpha = \begin{cases} \max_{q \in \Delta(A, s)} \tilde{I}(q, s), \Delta(A, s) \neq \emptyset, \\ 0, \Delta(A, s) = \emptyset, \end{cases}$$

$$g(\tilde{B}) = \bigcup_{s \in S} \{q \in Q | 0 < \tilde{I}(q, s) \leq \tilde{B}(s)\}.$$

若 $f(A) = \tilde{B}$ 且 $g(\tilde{B}) = A$, 则称 (A, \tilde{B}) 是一个知识空间模糊概念.

从语义上看, $f(A)$ 表示能够解决 A 中问题, 但不能解决 A 之外任一问题的技能.

例 2: 对于表 1 中的模糊技能形式背景 $\tilde{\Pi}$, 令 $A = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$. 由于 $(q_1, s_3)^\perp = \{q_1, q_2, q_5\}$, $(q_2, s_3)^\perp = \{q_2, q_5\}$, $(q_3, s_3)^\perp = \emptyset$, $(q_4, s_3)^\perp = \{q_1, q_2, q_4, q_5\}$, $(q_5, s_3)^\perp = \{q_2, q_5\}$, 可知 $\Delta(A, s_3) = \emptyset$. 类似地, 可得 $\Delta(A, s_1) = \{q_2\}$, $\Delta(A, s_2) = \{q_1, q_3, q_4\}$, $\Delta(A, s_4) = \{q_2\}$. 因此, $f(A) = \left\{ \frac{0.8}{s_1}, \frac{0.7}{s_2}, \frac{0.6}{s_4} \right\}$.

令 $\tilde{B} = \left\{ \frac{0.8}{s_1}, \frac{0.7}{s_2}, \frac{0.6}{s_4} \right\}$. 由于 $0 < \tilde{I}(q_2, s_1) \leq \tilde{B}(s_1)$, $0 < \tilde{I}(q_1, s_2), \tilde{I}(q_3, s_2), \tilde{I}(q_4, s_2) \leq \tilde{B}(s_2)$, $0 < \tilde{I}(q_2, s_4) \leq \tilde{B}(s_4)$, 所以有 $g(\tilde{B}) = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$.

综上, 可知 $\left(\{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \left\{ \frac{0.8}{s_1}, \frac{0.7}{s_2}, \frac{0.6}{s_4} \right\} \right)$ 是一个知识空间模糊概念.

命题 1. 对于 $A, A_1, A_2 \in 2^Q$ 和 $\tilde{B}, \tilde{B}_1, \tilde{B}_2 \in [0, 1]^S$, 下面的命题成立:

- (1) $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2), \tilde{B}_1 \subseteq \tilde{B}_2 \Rightarrow g(\tilde{B}_1) \subseteq g(\tilde{B}_2)$.
- (2) $g(f(A)) \subseteq A, f(g(\tilde{B})) \supseteq \tilde{B}$.
- (3) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2), g(\tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2) = g(\tilde{B}_1) \cup g(\tilde{B}_2)$.
- (4) 算子 f 和 g 在 $(2^Q, \subseteq)$ 与 $([0, 1]^S, \subseteq)$ 之间形成一个 Galois 连接.
- (5) $(g(f(A)), f(A))$ 与 $(g(\tilde{B}), f(g(\tilde{B})))$ 是两个知识空间模糊概念.

证明: 1) 若 $A_1 \subseteq A_2$, 则对任意的 $s \in S$ 有 $\Delta(A_1, s) \subseteq \Delta(A_2, s)$, 进而 $\max_{q \in \Delta(A_1, s)} \tilde{I}(q, s) \leq \max_{q \in \Delta(A_2, s)} \tilde{I}(q, s)$. 根据函数 f 的定义可得 $f(A_1) \subseteq f(A_2)$.

同理, 若 $\tilde{B}_1 \subseteq \tilde{B}_2$, 根据函数 g 的定义可证 $g(\tilde{B}_1) \subseteq g(\tilde{B}_2)$.

2) 对任意 $q \in g(f(A))$, 存在 $s_0 \in S$ 使得 $0 < \tilde{I}(q, s_0) \leq (f(A))(s_0)$, 即 $0 < \tilde{I}(q, s_0) \leq \max_{q' \in \Delta(A, s_0)} \tilde{I}(q', s_0)$, 故存在 $q_0 \in \Delta(A, s_0)$ 使得 $0 < \tilde{I}(q, s_0) \leq \tilde{I}(q_0, s_0)$, 由此可知 $q \in A$. 否则 $(q, s_0)^\perp \subseteq A$ 不成立, 推出 $q_0 \notin \Delta(A, s_0)$, 矛盾. 所以 $g(f(A)) \subseteq A$. 对于任意 $\tilde{B}(s) > 0$, 记 $g(\tilde{B}(s)) = \{q \in Q | 0 < \tilde{I}(q, s) \leq \tilde{B}(s)\}$, 则 $g(\tilde{B}) = \bigcup_{s \in S, \tilde{B}(s) > 0} g(\tilde{B}(s))$. 注意 $\tilde{B}(s) \in \{\tilde{I}(q, s) | q \in Q\}$, 因此 $\tilde{B}(s) = \max_{q' \in g(\tilde{B}(s))} \tilde{I}(q', s)$. 对于任意 $s \in S$, 若 $\tilde{B}(s) = 0$, 则显然 $\tilde{B}(s) \leq (f(g(\tilde{B}))) (s)$. 若 $\tilde{B}(s) > 0$, 则 $(f(g(\tilde{B}))) (s) = \max_{q \in \Delta(g(\tilde{B}), s)} \tilde{I}(q, s) \geq \max_{q' \in g(\tilde{B}(s))} \tilde{I}(q', s) = \tilde{B}(s)$. 综上, 对于任意 $s \in S$, 都有 $\tilde{B}(s) \leq (f(g(\tilde{B}))) (s)$, 即 $\tilde{B} \subseteq f(g(\tilde{B}))$.

3) 根据函数 f 和 g 的定义, 易证此命题成立.

4) 根据 (1)、(2) 以及 Galois 连接的定义可知此命题成立.

5) 算子 f 和 g 在 $(2^Q, \subseteq)$ 与 $([0, 1]^S, \subseteq)$ 之间形成一个 Galois 连接, 所以 $f(g(f(A))) = f(A)$ 与 $g(f(g(\tilde{B}))) = g(\tilde{B})$ 成立. 再根据知识空间模糊概念的定义可知此命题成立. 证毕.

定义知识空间模糊概念之间的偏序关系 \leq 如下:

$$(A_1, \tilde{B}_1) \leq (A_2, \tilde{B}_2) \Leftrightarrow A_1 \subseteq A_2 \Leftrightarrow \tilde{B}_1 \subseteq \tilde{B}_2,$$

则模糊技能形式背景的所有知识空间模糊概念在此偏序关系下构成一个层次结构, 记作 $KSL(\tilde{\Pi})$, 其结构由下面的定理 1 确定.

定理 1. 设 $\tilde{\Pi} = (Q, S, \tilde{I})$ 是一个模糊技能形式背景, 则 $KSL(\tilde{\Pi})$ 是一个完全格, 且任意两个概念 (A_1, \tilde{B}_1) 和 (A_2, \tilde{B}_2) 的上确界与下确界如下:

$$(A_1, \tilde{B}_1) \vee (A_2, \tilde{B}_2) = (A_1 \cup A_2, f(g(\tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2))),$$

$$(A_1, \tilde{B}_1) \wedge (A_2, \tilde{B}_2) = (g(f(A_1 \cap A_2)), \tilde{B}_1 \cap \tilde{B}_2).$$

证明: 由 Q 与 S 的有限性可知, $KSL(\tilde{\Pi})$ 是有限的. 因此, 要证明 $KSL(\tilde{\Pi})$ 是一个完全格, 只需要证明 $KSL(\tilde{\Pi})$ 是一个格.

一方面, 对于任意一个知识空间模糊概念 (A, \tilde{B}) 都有 $g(\tilde{B}) = A$, 因此有 $A_1 \cup A_2 = g(\tilde{B}_1) \cup g(\tilde{B}_2)$. 又根据命题 1 (3) $g(\tilde{B}_1) \cup g(\tilde{B}_2) = g(\tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2)$, 可得 $(A_1 \cup A_2, f(g(\tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2))) = (g(\tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2), f(g(\tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2)))$. 根据命题 1 (5) 可知 $(g(\tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2), f(g(\tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2)))$ 是一个知识空间模糊概念, 进而得到 $(A_1 \cup A_2, f(g(\tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2)))$ 是一个知识空间模糊概念.

另一方面, 由于 $A_1 \cup A_2$ 包含 A_1 与 A_2 , 可知 $(A_1 \cup A_2, f(g(\tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2)))$ 是 (A_1, \tilde{B}_1) 和 (A_2, \tilde{B}_2) 的父概念, 也就是 (A_1, \tilde{B}_1) 和 (A_2, \tilde{B}_2) 的一个上界. 此外, 对于 (A_1, \tilde{B}_1) 和 (A_2, \tilde{B}_2) 的任意一个上界 (A, \tilde{B}) , 都有 $A \supseteq A_1 \cup A_2$. 据此可推断 $(A, \tilde{B}) \supseteq (A_1 \cup A_2, f(g(\tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2)))$ 成立, 进而可知 $(A_1 \cup A_2, f(g(\tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2)))$ 是 (A_1, \tilde{B}_1) 和 (A_2, \tilde{B}_2) 的最小上界.

综上两方面, 可得 $(A_1, \tilde{B}_1) \vee (A_2, \tilde{B}_2) = (A_1 \cup A_2, f(g(\tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2)))$. 另一个式子 $(A_1, \tilde{B}_1) \wedge (A_2, \tilde{B}_2) = (g(f(A_1 \cap A_2)), \tilde{B}_1 \cap \tilde{B}_2)$ 同理可证. 证毕.

给定一个模糊技能形式背景 $\tilde{\Pi} = (Q, S, \tilde{I})$, 称 $KSL(\tilde{\Pi})$ 为 $\tilde{\Pi}$ 的知识空间模糊概念格.

定理 1 指出了知识空间模糊概念格的结构, 同时 (A_1, \tilde{B}_1) 和 (A_2, \tilde{B}_2) 的上确界为 $(A_1 \cup A_2, f(g(\tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2)))$ 也表明此模糊概念格中概念的外延构成了 $\tilde{\Pi}$ 的知识空间.

例 3: 表 1 中 $\tilde{\Pi}$ 诱导的知识空间模糊概念格如图 1 所示, 其中节点信息如下:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 : \left(\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \left\{ \frac{0.8}{s_1}, \frac{0.7}{s_2}, \frac{0.9}{s_3}, \frac{0.6}{s_4} \right\} \right) \\ C_2 : \left(\{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \left\{ \frac{0.8}{s_1}, \frac{0.7}{s_2}, \frac{0.6}{s_4} \right\} \right) \\ C_3 : \left(\{q_1, q_2, q_4, q_5\}, \left\{ \frac{0.8}{s_1}, \frac{0.6}{s_2}, \frac{0.9}{s_3}, \frac{0.6}{s_4} \right\} \right) \\ C_4 : \left(\{q_1, q_3, q_4\}, \left\{ \frac{0.7}{s_2} \right\} \right) \\ C_5 : \left(\{q_1, q_2, q_4\}, \left\{ \frac{0.8}{s_1}, \frac{0.6}{s_2}, \frac{0.6}{s_4} \right\} \right) \\ C_6 : \left(\{q_2, q_4, q_5\}, \left\{ \frac{0.8}{s_1}, \frac{0.5}{s_2}, \frac{0.7}{s_3}, \frac{0.6}{s_4} \right\} \right) \\ C_7 : \left(\{q_1, q_2, q_5\}, \left\{ \frac{0.8}{s_1}, \frac{0.8}{s_3}, \frac{0.6}{s_4} \right\} \right) \\ C_8 : \left(\{q_1, q_4\}, \left\{ \frac{0.6}{s_2} \right\} \right) \\ C_9 : \left(\{q_2, q_4\}, \left\{ \frac{0.8}{s_1}, \frac{0.5}{s_2}, \frac{0.6}{s_4} \right\} \right) \\ C_{10} : \left(\{q_2, q_5\}, \left\{ \frac{0.8}{s_1}, \frac{0.7}{s_3}, \frac{0.6}{s_4} \right\} \right) \\ C_{11} : \left(\{q_4\}, \left\{ \frac{0.5}{s_2} \right\} \right) \\ C_{12} : \left(\{q_2\}, \left\{ \frac{0.8}{s_1}, \frac{0.6}{s_4} \right\} \right) \\ C_{13} : (\emptyset, \emptyset) \end{array} \right.$$

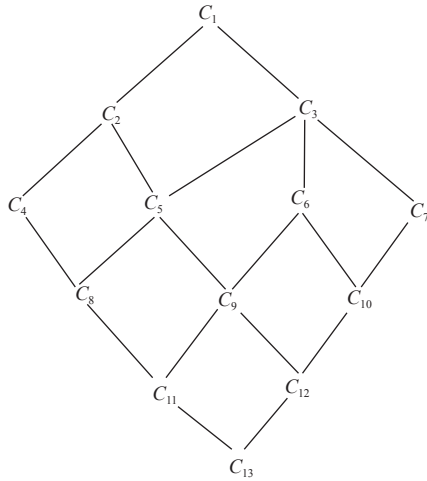


图 1 知识空间模糊概念格 $KSL(\tilde{\Pi})$

表 2 $\tilde{\Pi}$ 的问题原子粒

技能	问题原子粒	技能	问题原子粒
$\frac{0.8}{s_1}$	$\{q_2\}$	$\frac{0.7}{s_3}$	$\{q_2, q_5\}$
$\frac{0.5}{s_2}$	$\{q_4\}$	$\frac{0.8}{s_3}$	$\{q_1, q_2, q_5\}$
$\frac{0.6}{s_2}$	$\{q_1, q_4\}$	$\frac{0.9}{s_3}$	$\{q_1, q_2, q_4, q_5\}$
$\frac{0.7}{s_2}$	$\{q_1, q_3, q_4\}$	$\frac{0.6}{s_4}$	$\{q_2\}$

定义 6. 设 $\tilde{\Pi} = (Q, S, \tilde{I})$ 是一个模糊技能形式背景. 若 $\tilde{I}(q, s) = t > 0$, 则称 $(g(\frac{t}{s}), f(g(\frac{t}{s})))$ 是技能 $\frac{t}{s}$ 诱导的知识空间模糊概念, 简称技能诱导概念, 并称 $g(\frac{t}{s})$ 为技能 $\frac{t}{s}$ 诱导的问题原子粒, 简称原子粒.

例 4: 表 1 中 $\tilde{\Pi}$ 的所有问题原子粒见表 2.

在形式概念分析理论中, 直观图是粒度转换和识别不可约元的有力工具^[49]. 下面将直观图的概念推广到模糊技能形式背景.

定义 7. 设 $\tilde{\Pi} = (Q, S, \tilde{I})$ 是一个模糊技能形式背景, $\Sigma = \{(g(\frac{t}{s}), \frac{t}{s}) | \tilde{I}(q, s) = t > 0\}$ 为全体原子粒及其诱导技能. 称 (Σ, \leq) 为原子粒直观图, 其中 $(A_1, \frac{t_1}{s_1}) \leq (A_2, \frac{t_2}{s_2})$ 当且仅当 $A_1 \subseteq A_2$.

设 $\Upsilon \subseteq \Sigma$, 若 Υ 中任意两个元素都是可比的, 则称 Υ 是原子粒直观图 (Σ, \leq) 中的一个链.

例 5: 表 1 中 $\tilde{\Pi}$ 的原子粒直观图 (Σ, \leq) 如图 2 所示.

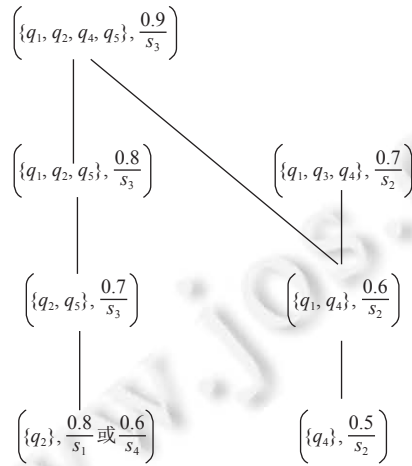


图 2 $\tilde{\Pi}$ 的原子粒直观图 (Σ, \leq)

下面借鉴粒描述中判定可定义粒的思想^[21]来讨论一个问题组合是否是知识空间中的一个状态.

定理 2. 设 $\tilde{\Pi} = (Q, S, \tilde{I})$, $A \in 2^Q$, $A_t (t \in T)$ 是 Σ 的问题原子粒且 $\bigcup_{t \in T} A_t = A$, 则 A 是 $\tilde{\Pi}$ 的知识空间的一个知识状态, 且有对应技能 $\bigcup_{t \in T} j(A_t)$, 其中 $j(A_t)$ 是 A_t 的一个诱导技能.

证明: 显然, 对 Σ 中的原子粒 A_i , $(A_i, f(A_i))$ 是 $\tilde{\Pi}$ 的一个知识空间模糊概念. 由定理 1 可得 $(\bigcup_{i \in T} A_i, f(\bigcup_{i \in T} f(A_i)))$ 也是 $\tilde{\Pi}$ 的一个知识空间模糊概念. 又 $A = \bigcup_{i \in T} A_i$, 则 $(A, f(\bigcup_{i \in T} f(A_i)))$ 是 $\tilde{\Pi}$ 的一个知识空间模糊概念, 进而可知 A 是 $\tilde{\Pi}$ 的一个知识状态.

根据命题 1 (3) 以及 $(A_i, f(A_i))$ 是一个知识空间模糊概念可得 $f(\bigcup_{i \in T} f(A_i)) = f(\bigcup_{i \in T} A_i) = f(A)$, 故 $g(\bigcup_{i \in T} f(A_i)) = A$. 又因为 A_i 是一个问题原子粒, 所以有 $g(\bigcup_{i \in T} j(A_i)) = A$, 即 A 有对应技能 $\bigcup_{i \in T} j(A_i)$. 证毕.

根据以上论述, 下面提出知识空间中知识状态的判定算法.

算法 1. 知识空间中知识状态的判定.

输入: 模糊技能形式背景 $\tilde{\Pi} = (Q, S, \tilde{I})$, $A \in 2^Q$;

输出: 判定 A 是否是一个知识状态, 若是则进一步输出它对应的一个技能.

- (1) 建立问题原子粒直观图 (Σ, \leq) ;
- (2) 用 Θ 表示技能的集合, 并令 $\Theta = \emptyset$;
- (3) 遍历 (Σ, \leq) 中的每一个链 Υ , 找出最大的 $(g(\frac{t}{s}), \frac{t}{s}) \in \Upsilon$ 使得 $g(\frac{t}{s}) \subseteq A$, 并将 $\frac{t}{s}$ 加入 Θ ;
- (4) 若 $A \neq \bigcup_{\frac{t}{s} \in \Theta} g(\frac{t}{s})$, 则 A 不是 $\tilde{\Pi}$ 的一个知识状态, 算法结束;
- (5) 若 $A = \bigcup_{\frac{t}{s} \in \Theta} g(\frac{t}{s})$, 则 A 是 $\tilde{\Pi}$ 的一个知识状态, 且 A 有一个对应的技能组合 Θ , 算法结束.

若 $\tilde{\Pi} = (Q, S, \tilde{I})$ 中包含 n 个非零的取值, 则问题原子粒直观图 (Σ, \leq) 中最多包含 n 个元素. 又因为算法 1 至多一次访问 (Σ, \leq) 中的全部元素, 所以算法 1 访问的元素个数不超过 n 个.

例 6: 对于表 1 中的模糊技能形式背景 $\tilde{\Pi}$, 令 $A = \{q_2, q_4, q_5\}$. 根据算法 1 可得, $\Theta = \left\{ \frac{0.5}{s_2}, \frac{0.7}{s_3} \right\}$, 且 $g\left(\frac{0.5}{s_2}\right) \cup g\left(\frac{0.7}{s_3}\right) = \{q_2, q_5\} \cup \{q_4\} = A$. 因此, $\{q_2, q_4, q_5\}$ 是 $\tilde{\Pi}$ 的一个知识状态, 且存在对应的技能 $\frac{0.5}{s_2}$ 和 $\frac{0.7}{s_3}$.

算法 1 得到的知识状态及其对应技能并不一定是一个内涵完备的知识空间模糊概念. 下面定义伪知识空间模糊概念, 并讨论如何由不完备的知识空间模糊概念获取完备的知识空间模糊概念.

定义 8. 设 $\tilde{\Pi} = (Q, S, \tilde{I})$, $A \in 2^Q$ 是 $\tilde{\Pi}$ 的一个知识状态. 如果 $g(C) = A$, 那么称 (A, C) 是一个伪知识空间模糊概念. 为了得到知识空间模糊概念, 需要对已有属性 C 进行扩充, 从而获得 A 的完备技能.

定义 9. 设 $\tilde{\Pi} = (Q, S, \tilde{I})$, (A, C) 是 $\tilde{\Pi}$ 的一个伪知识空间模糊概念. 定义技能扩充 $ens(C) = C \cup \left\{ \frac{\tilde{I}(q, s)}{s} \mid (q, s)^1 \subseteq A, \frac{\tilde{I}(q, s)}{s} \notin C \right\}$.

由知识空间模糊概念的定义容易验证, 伪知识空间模糊概念 (A, C) 通过技能扩充, 得到的二元组 $(A, ens(C))$ 是 $\tilde{\Pi}$ 的一个知识空间模糊概念.

值得注意的是, 上述过程提供了一种构造知识空间模糊概念的有效方法. 该方法可分为以下 3 个步骤.

- (1) 找出所有知识状态, 并计算对应的技能.
- (2) 对获得的伪知识空间模糊概念进行技能扩充从而获得知识空间模糊概念.
- (3) 基于外延或内涵之间的包含关系对获得的知识空间模糊概念进行排序, 进而建立知识空间模糊概念格.

3 闭包空间模糊概念格

本节定义闭包空间模糊概念格, 并采用粒描述的思想给出判定技能组合是否是闭包空间中某一知识状态所需技能的方法.

定义 10. 设 $\tilde{\Pi} = (Q, S, \tilde{I})$ 是一个模糊技能形式背景, $A \in 2^Q$, $\bar{B} \in [0, 1]^S$. 定义:

$$u(A) = \left\{ \frac{\alpha}{s} \mid s \in S \right\}, \alpha = \max_{q \in A} (\tilde{I}(q, s)),$$

$$v(B) = \{ q \mid q^{\&} \leq B, q \in Q \}.$$

若 $u(A) = \tilde{B}$ 且 $v(\tilde{B}) = A$, 则称 (A, \tilde{B}) 是一个闭包空间模糊概念.

例 7: 对于表 1 中的模糊技能形式背景 $\tilde{\Pi}$, 令 $A = \{q_1, q_2, q_3, q_5\}$, 可得 $u(A) = \left\{ \frac{0.8}{s_1}, \frac{0.7}{s_2}, \frac{0.8}{s_3}, \frac{0.6}{s_4} \right\}$.

令 $\tilde{B} = \left\{ \frac{0.8}{s_1}, \frac{0.7}{s_2}, \frac{0.8}{s_3}, \frac{0.6}{s_4} \right\}$, 则有 $v(\tilde{B}) = \{q_1, q_2, q_3, q_5\}$.

综上, 可知 $(\{q_1, q_2, q_3, q_5\}, \left\{ \frac{0.8}{s_1}, \frac{0.7}{s_2}, \frac{0.8}{s_3}, \frac{0.6}{s_4} \right\})$ 是 $\tilde{\Pi}$ 的一个闭包空间模糊概念.

命题 2. 对于 $A, A_1, A_2 \in 2^Q$ 和 $\tilde{B}, \tilde{B}_1, \tilde{B}_2 \in [0, 1]^S$, 下面的命题成立:

(1) $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow u(A_1) \subseteq u(A_2), \tilde{B}_1 \subseteq \tilde{B}_2 \Rightarrow v(\tilde{B}_1) \subseteq v(\tilde{B}_2)$.

(2) $v(u(A)) \supseteq A, u(v(\tilde{B})) \subseteq \tilde{B}$.

(3) $u(A_1 \cup A_2) = u(A_1) \cup u(A_2), v(\tilde{B}_1 \cap \tilde{B}_2) = v(\tilde{B}_1) \cap v(\tilde{B}_2)$.

(4) 算子 u 和 v 在 $(2^Q, \subseteq)$ 与 $([0, 1]^S, \subseteq)$ 之间形成一个 Galois 连接.

(5) $(v(u(A)), u(A))$ 与 $(v(\tilde{B}), u(v(\tilde{B})))$ 是两个闭包空间模糊概念.

证明: 1) 若 $A_1 \subseteq A_2$, 则对任意的 $s \in S$ 都有 $\max_{q \in A_1} (\tilde{I}(q, s)) \leq \max_{q \in A_2} (\tilde{I}(q, s))$ 成立. 根据函数 u 的定义可得 $u(A_1) \subseteq u(A_2)$.

同理, 若 $\tilde{B}_1 \subseteq \tilde{B}_2$, 根据函数 v 的定义可证 $v(\tilde{B}_1) \subseteq v(\tilde{B}_2)$.

2) 对任意 $q \in A, s \in S$, 有 $q^{\&}(s) \leq (u(A))(s)$. 故 $q^{\&} \leq u(A)$, 所以有 $q \in v(u(A))$. 因此 $v(u(A)) \supseteq A$ 得证.

对于任意 $s \in S$, 假设 $\frac{t}{s} \in u(v(\tilde{B}))$, 则有 $t = \max_{q \in v(\tilde{B})} (\tilde{I}(q, s))$. 另一方面, 对任意 $q \in v(\tilde{B})$, 有 $q^{\&} \in \tilde{B}$, 所以对任意 $s \in S, \max_{q \in v(\tilde{B})} (\tilde{I}(q, s)) \leq \tilde{B}(s)$. 因此, $t \leq \tilde{B}(s)$, 即 $u(v(\tilde{B})) \subseteq \tilde{B}$.

3) 根据算子 u 和 v 的定义, 易证此命题成立.

4) 根据 (1)、(2) 以及 Galois 连接的定义可知此命题成立.

5) 算子 u 和 v 在 $(2^Q, \subseteq)$ 与 $([0, 1]^S, \subseteq)$ 之间形成一个 Galois 连接, 所以 $u(v(u(A))) = u(A)$ 与 $v(u(v(\tilde{B}))) = v(\tilde{B})$ 成立. 再根据闭包空间模糊概念的定义可知此命题成立. 证毕.

记 $\tilde{\Pi}$ 的全体闭包空间模糊概念为 $CSL(\tilde{\Pi})$, 并定义其上的偏序关系 \leq 如下:

$$(A_1, \tilde{B}_1) \leq (A_2, \tilde{B}_2) \Leftrightarrow A_1 \subseteq A_2 \wedge \tilde{B}_1 \subseteq \tilde{B}_2.$$

定理 3. 设 $\tilde{\Pi} = (Q, S, \tilde{I})$ 是一个模糊技能形式背景. $CSL(\tilde{\Pi})$ 是一个完全格, 且任意两个概念 (A_1, \tilde{B}_1) 和 (A_2, \tilde{B}_2) 的上确界与下确界如下:

$$(A_1, \tilde{B}_1) \vee (A_2, \tilde{B}_2) = (v(u(A_1 \cup A_2)), \tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2),$$

$$(A_1, \tilde{B}_1) \wedge (A_2, \tilde{B}_2) = (A_1 \cap A_2, u(v(\tilde{B}_1 \cap \tilde{B}_2))).$$

证明: 由 Q 与 S 的有限性可知, $CSL(\tilde{\Pi})$ 是有限的. 因此, 只要证明 $CSL(\tilde{\Pi})$ 是一个格就可以得到 $CSL(\tilde{\Pi})$ 是一个完全格.

一方面, 对于任意一个闭包空间模糊概念 (A, \tilde{B}) 都有 $u(A) = \tilde{B}$, 因此有 $\tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2 = u(A_1) \cup u(A_2)$. 根据命题 2 (3) 有 $u(A_1 \cup A_2) = u(A_1) \cup u(A_2)$, 可得 $(v(u(A_1 \cup A_2)), \tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2) = (v(u(A_1 \cup A_2)), u(A_1 \cup A_2))$. 根据命题 2 (5) 可知 $(v(u(A_1 \cup A_2)), u(A_1 \cup A_2))$ 是一个闭包空间模糊概念, 这意味着 $(v(u(A_1 \cup A_2)), \tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2)$ 也是一个闭包空间模糊概念.

另一方面, 由于 $\tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2$ 包含 \tilde{B}_1 与 \tilde{B}_2 , 可知 $(v(u(A_1 \cup A_2)), \tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2)$ 是 (A_1, \tilde{B}_1) 和 (A_2, \tilde{B}_2) 的父概念, 也就是 (A_1, \tilde{B}_1) 和 (A_2, \tilde{B}_2) 的一个上界. 此外, 对于 (A_1, \tilde{B}_1) 和 (A_2, \tilde{B}_2) 的任意一个上界 (A, \tilde{B}) , 都有 $\tilde{B} \supseteq \tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2$. 据此可推断 $(A, \tilde{B}) \geq (v(u(A_1 \cup A_2)), \tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2)$ 成立. 因此, 可知 $(v(u(A_1 \cup A_2)), \tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2)$ 是 (A_1, \tilde{B}_1) 和 (A_2, \tilde{B}_2) 的最小上界.

综上两方面, 可得 $(A_1, \tilde{B}_1) \vee (A_2, \tilde{B}_2) = (v(u(A_1 \cup A_2)), \tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2)$. 另一个式子 $(A_1, \tilde{B}_1) \wedge (A_2, \tilde{B}_2) = (A_1 \cap A_2, u(v(\tilde{B}_1 \cap \tilde{B}_2)))$ 同理可证. 证毕.

给定一个模糊技能形式背景 $\tilde{\Pi} = (Q, S, \tilde{I})$, 称 $CSL(\tilde{\Pi})$ 为 $\tilde{\Pi}$ 的闭包空间模糊概念格.

定理 3 指出了闭包空间模糊概念格的结构, 同时 (A_1, \bar{B}_1) 和 (A_2, \bar{B}_2) 的下确界为 $(A_1 \cap A_2, u(v(\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2)))$ 也表明此模糊概念格中概念的外延构成了闭包空间.

例 8: 表 1 中 $\tilde{\Pi}$ 的闭包空间模糊概念格如图 3 所示, 其中节点信息如下:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 : \left(\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \left\{ \frac{0.8}{s_1}, \frac{0.7}{s_2}, \frac{0.9}{s_3}, \frac{0.6}{s_4} \right\} \right) \\ C_2 : \left(\{q_1, q_2, q_3, q_5\}, \left\{ \frac{0.8}{s_1}, \frac{0.7}{s_2}, \frac{0.8}{s_3}, \frac{0.6}{s_4} \right\} \right) \\ C_3 : \left(\{q_1, q_2, q_4, q_5\}, \left\{ \frac{0.8}{s_1}, \frac{0.6}{s_2}, \frac{0.9}{s_3}, \frac{0.6}{s_4} \right\} \right) \\ C_4 : \left(\{q_1, q_3, q_4, q_5\}, \left\{ \frac{0.7}{s_2}, \frac{0.9}{s_3} \right\} \right) \\ C_5 : \left(\{q_2, q_3, q_5\}, \left\{ \frac{0.8}{s_1}, \frac{0.7}{s_2}, \frac{0.7}{s_3}, \frac{0.6}{s_4} \right\} \right) \\ C_6 : \left(\{q_1, q_2, q_5\}, \left\{ \frac{0.8}{s_1}, \frac{0.6}{s_2}, \frac{0.8}{s_3}, \frac{0.6}{s_4} \right\} \right) \\ C_7 : \left(\{q_1, q_3, q_5\}, \left\{ \frac{0.7}{s_2}, \frac{0.8}{s_3} \right\} \right) \\ C_8 : \left(\{q_2, q_4, q_5\}, \left\{ \frac{0.8}{s_1}, \frac{0.5}{s_2}, \frac{0.9}{s_3}, \frac{0.6}{s_4} \right\} \right) \\ C_9 : \left(\{q_1, q_4, q_5\}, \left\{ \frac{0.6}{s_2}, \frac{0.9}{s_3} \right\} \right) \\ C_{10} : \left(\{q_2, q_5\}, \left\{ \frac{0.8}{s_1}, \frac{0.7}{s_3}, \frac{0.6}{s_4} \right\} \right) \\ C_{11} : \left(\{q_3, q_5\}, \left\{ \frac{0.7}{s_2}, \frac{0.7}{s_3} \right\} \right) \\ C_{12} : \left(\{q_1, q_5\}, \left\{ \frac{0.6}{s_2}, \frac{0.8}{s_3} \right\} \right) \\ C_{13} : \left(\{q_4, q_5\}, \left\{ \frac{0.5}{s_2}, \frac{0.9}{s_3} \right\} \right) \\ C_{14} : \left(\{q_5\}, \left\{ \frac{0.7}{s_3} \right\} \right) \\ C_{15} : \left(\{q_3\}, \left\{ \frac{0.7}{s_2} \right\} \right) \\ C_{16} : (\emptyset, \emptyset) \end{array} \right.$$

与第 2 节类似, 也可以引入原子粒直观图, 并借鉴粒描述的思想来判定一个技能组合是否是闭包空间中某一个知识状态所需的技能.

定义 11. 设 $\tilde{\Pi} = (Q, S, \tilde{I})$ 是一个模糊技能形式背景, $q \in Q$. 称 $(v(u(q)), u(q))$ 是问题 q 诱导的闭包空间模糊概念, 简称问题诱导概念, 并称 $u(q)$ 为问题 q 诱导的技能原子粒, 简称原子粒.

例 9: 表 1 中 $\tilde{\Pi}$ 的问题诱导概念与技能原子粒见表 3.

定义 12. 设 $\tilde{\Pi} = (Q, S, \tilde{I})$ 是一个模糊技能形式背景, $E = \{(u(q), q) | q \in Q\}$ 为全体技能原子粒及其诱导问题. 称 (E, \leq) 为技能原子粒直观图, 其中 $(\bar{B}_1, q_1) \leq (\bar{B}_2, q_2)$ 当且仅当 $\bar{B}_1 \subseteq \bar{B}_2$.

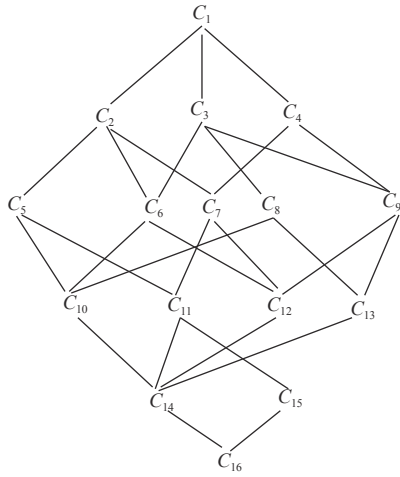


图 3 $\tilde{\Pi}$ 的闭包空间模糊概念格 $CSL(\tilde{\Pi})$

设 $E' \subseteq E$, 若 E' 中任意两个元素都是可比的, 则称 E' 是直观图 (E, \leq) 中的一个链.

例 10: 表 1 中 $\tilde{\Pi}$ 的原子粒直观图 (E, \leq) 如图 4 所示.

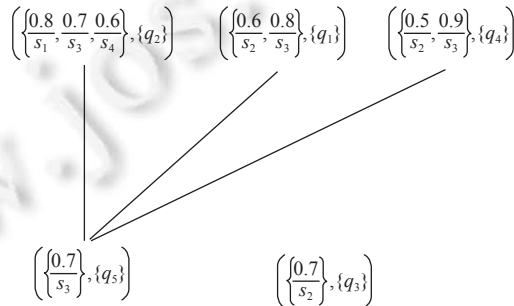


图 4 $\tilde{\Pi}$ 的技能原子粒直观图 (E, \leq)

定理 4. 设 $\tilde{\Pi} = (Q, S, \tilde{I})$, $\tilde{B} \in [0, 1]^s$, $B_t (t \in T)$ 是 E 的技能原子粒且 $\bigcup_{t \in T} \tilde{B}_t = \tilde{B}$, 则 \tilde{B} 是 $\tilde{\Pi}$ 的闭包空间的一个知识状态的所需技能, 并且这个技能诱导的知识状态包含问题 $\bigcup_{t \in T} w(\tilde{B}_t)$, 其中 $w(\tilde{B}_t)$ 是 \tilde{B}_t 的一个诱导问题.

证明: 对于 E 中任意的技能原子粒 \tilde{B}_t , 根据问题概念的定义可知 $(v(\tilde{B}_t), \tilde{B}_t)$ 是 $\tilde{\Pi}$ 的一个闭包空间模糊概念. 由定理 3 可得 $(v(u(\bigcup_{t \in T} v(\tilde{B}_t))), \bigcup_{t \in T} \tilde{B}_t)$ 也是 $\tilde{\Pi}$ 的一个闭包空间模糊概念. 又 $\tilde{B} = \bigcup_{t \in T} \tilde{B}_t$, 则 $(v(u(\bigcup_{t \in T} v(\tilde{B}_t))), \tilde{B})$ 是 $\tilde{\Pi}$ 的一个闭包空间模糊概念, 进而可知 \tilde{B} 是 $\tilde{\Pi}$ 的闭包空间的一个知识状态的所需技能.

根据命题 2 (3) 以及 $(v(\tilde{B}_t), \tilde{B}_t)$ 是一个闭包空间模糊概念可得 $v(u(\bigcup_{t \in T} v(\tilde{B}_t))) = v(\bigcup_{t \in T} \tilde{B}_t) = v(\tilde{B})$, 所以有 $u(\bigcup_{t \in T} v(\tilde{B}_t)) = \tilde{B}$. 又因为 \tilde{B}_t 是一个技能原子粒, 则可知 $u(\bigcup_{t \in T} w(\tilde{B}_t)) = \tilde{B}$, 即这个知识状态包含问题 $\bigcup_{t \in T} w(\tilde{B}_t)$. 证毕.

根据上面的论述, 算法 2 给出闭包空间中知识状态所需技能的判定方法.

算法 2. 判定一个技能组合是否是闭包空间中某一知识状态的所需技能.

输入: 模糊技能形式背景 $\tilde{\Pi} = (Q, S, \tilde{I})$, $\tilde{B} \in [0, 1]^s$;

输出: 判定 \tilde{B} 是否是闭包空间中某一知识状态的所需技能, 若是, 则进一步输出此技能诱导的知识状态包含的一个问题组合.

(1) 建立技能原子粒直观图 (E, \leq) ;

表 3 $\tilde{\Pi}$ 的问题诱导概念与技能原子粒

问题	问题诱导概念	技能原子粒
q_1	C_{12}	$\left\{ \frac{0.6}{s_2}, \frac{0.8}{s_3} \right\}$
q_2	C_{10}	$\left\{ \frac{0.8}{s_1}, \frac{0.7}{s_3}, \frac{0.6}{s_4} \right\}$
q_3	C_{15}	$\left\{ \frac{0.7}{s_2} \right\}$
q_4	C_{13}	$\left\{ \frac{0.5}{s_2}, \frac{0.9}{s_3} \right\}$
q_5	C_{14}	$\left\{ \frac{0.7}{s_3} \right\}$

- (2) 用 Ω 表示问题的集合, 并令 $\Omega = \emptyset$;
- (3) 遍历 (E, \leq) 中的每一个链 E' , 找出最大的 $(u(q), q) \in E'$ 使得 $u(q) \subseteq \tilde{B}$, 并将 q 加入 Ω ;
- (4) 若 $\tilde{B} \neq \bigcup_{q \in \Omega} u(q)$, 则 \tilde{B} 不是 $\tilde{\Pi}$ 的某个知识状态的所需技能, 算法结束;
- (5) 若 $\tilde{B} = \bigcup_{q \in \Omega} u(q)$, 则 \tilde{B} 是 $\tilde{\Pi}$ 的一个知识状态的所需技能, 且 \tilde{B} 诱导的知识状态包含 Ω , 算法结束.

若 $\tilde{\Pi} = (Q, S, \tilde{I})$ 中包含 n 个问题, 则技能原子粒直观图 (E, \leq) 中最多包含 n 个元素. 又因为算法 2 至多一次访问 (E, \leq) 中的全部元素, 所以要判定闭包空间中一个知识状态的所需技能需要访问的直观图元素个数不超过 n 个.

例 11: 对于表 1 中的模糊技能形式背景 $\tilde{\Pi}$, 令 $\tilde{B} = \left\{ \frac{0.8}{s_1}, \frac{0.7}{s_2}, \frac{0.7}{s_3}, \frac{0.6}{s_4} \right\}$. 根据算法 2 可得, $\Omega = \{q_2, q_3\}$, 且 $u(q_2) \cup u(q_3) = \left\{ \frac{0.8}{s_1}, \frac{0.7}{s_3}, \frac{0.6}{s_4} \right\} \cup \left\{ \frac{0.7}{s_2} \right\} = \tilde{B}$. 因此, \tilde{B} 是 $\tilde{\Pi}$ 的一个知识状态的所需技能, 且其诱导的知识状态包含问题 q_2 和 q_3 .

算法 2 得到了闭包空间中某一知识状态的所需技能, 以及此技能诱导的知识状态包含的问题. 但两者并不构成一个闭包空间模糊概念, 而是一个伪闭包空间模糊概念.

定义 13. 设 $\tilde{\Pi} = (Q, S, \tilde{I})$, $A \in 2^Q$, $\tilde{B} \in [0, 1]^S$ 是 $\tilde{\Pi}$ 的闭包空间中某一知识状态的所需技能. 如果 $u(A) = \tilde{B}$, 那么称 (A, \tilde{B}) 是一个伪闭包空间模糊概念.

为了得到闭包空间模糊概念, 需要对已有问题集 A 进行扩充, 从而获得一个完备问题集.

定义 14. 设 $\tilde{\Pi} = (Q, S, \tilde{I})$, (A, \tilde{B}) 是 $\tilde{\Pi}$ 的一个伪闭包空间模糊概念. 定义问题扩充 $enq(A) = A \cup \{q \mid q^* \subseteq B, q \notin A\}$.

由闭包空间模糊概念的定义容易验证, 伪闭包空间模糊概念 (A, \tilde{B}) 通过问题扩充, 得到的二元组 $(enq(A), \tilde{B})$ 是 $\tilde{\Pi}$ 的一个闭包空间模糊概念.

综上所述, 从计算知识状态的所需技能出发可以构造闭包空间模糊概念格:

步骤 1. 找出知识状态的所需技能, 并计算技能诱导的知识状态包含的问题.

步骤 2. 对获得的伪闭包空间模糊概念进行问题扩充从而获得闭包空间模糊概念.

步骤 3. 对获得的闭包空间模糊概念基于外延或内涵之间的包含关系进行排序, 建立闭包空间模糊概念格.

4 实验分析

本节研究问题数量、技能数量、填充因子以及分析尺度对知识空间与闭包空间规模的影响. 为了方便分析, 先介绍两个度量模糊技能形式背景的重要指标: 填充因子与分析尺度.

填充因子 (fill ratio) 指的是模糊技能形式背景中非零元素所占比例, 即:

$$r = \frac{|\{\tilde{I}(q, s) \mid \tilde{I}(q, s) \neq 0, \tilde{I}(q, s) \in \tilde{I}\}|}{|\tilde{I}|}$$

分析尺度 (analysis scale) 指填充数据的非零精度取值个数. 例如, 若取分析尺度为 5, 即考虑 5 个分析层次, 则 $\tilde{I}(q, s)$ 的取值范围为 $\{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$. 又比如, 若取分析尺度为 10, 即考虑 10 个分析层次, 则 $\tilde{I}(q, s)$ 的取值范围为 $\{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$.

实验采用随机的方式生成不同规模的模糊形式背景. 此外, 为了更加客观, 每个规模的模糊形式背景重复生成 20 次, 以获取模糊概念数量取均值.

(1) 问题数量对知识空间与闭包空间规模的影响

这一部分研究问题数量与知识空间及闭包空间规模的关系. 具体地, 保持技能数量、填充因子以及分析尺度不变, 仅仅改变问题数量, 随机生成模糊形式背景, 记录不同规模模糊形式背景中问题数量与规模的关系.

在实验中, 固定技能数量为 10, 填充因子为 0.5, 取分析尺度为 10, 逐渐增大问题数量. 问题数量与知识空间及闭包空间规模的关系如图 5 所示. 实验结果表明, 随着问题数量的增加, 知识空间与闭包空间的规模逐渐增大, 并且问题数量越大, 知识空间与闭包空间的规模增长的速度越快.

(2) 技能数量对知识空间与闭包空间规模的影响

这一部分研究技能数量与知识空间及闭包空间规模的关系. 具体地, 固定问题数量为 15, 填充因子为 0.5, 且取分析尺度为 10, 逐渐增大技能数量, 采用随机的方式生成模糊形式背景, 记录不同规模模糊形式背景中技能数量与规模的关系.

技能数量与知识空间及闭包空间规模的关系如图 6 所示. 实验结果表明, 随着技能数量的增加, 知识空间与闭包空间的规模逐渐增大, 并且技能数量越大, 知识空间与闭包空间的规模增长的速度越快.

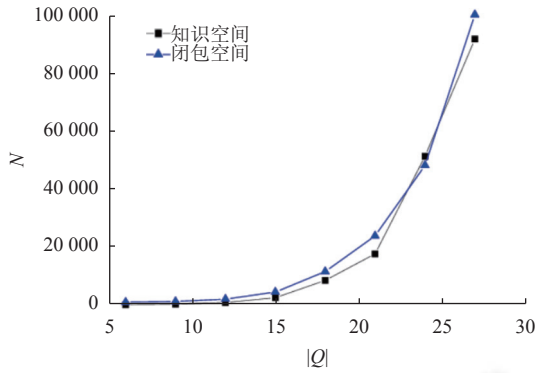


图 5 问题数量与知识空间及闭包空间规模的关系

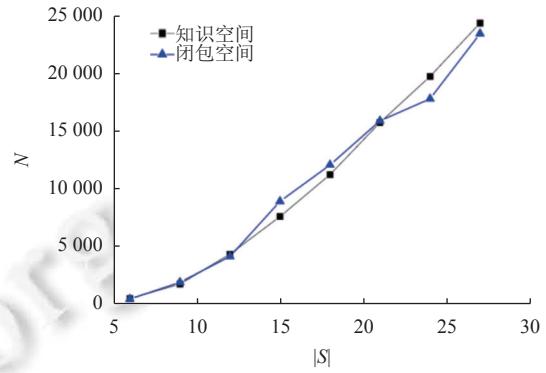


图 6 技能数量与知识空间及闭包空间规模的关系

(3) 填充因子对知识空间与闭包空间规模的影响

这一部分研究填充因子与知识空间及闭包空间规模的关系. 实验中问题数量取 15, 技能数量取 15, 且分析尺度取 10, 逐渐增大填充因子, 采用随机的方式生成模糊形式背景.

填充因子与知识空间及闭包空间规模的关系如图 7 所示.

实验结果表明, 当填充因子小于 0.5 时, 随着填充因子的增加, 知识空间与闭包空间的规模快速增大; 当填充因子大于 0.5 时, 知识空间与闭包空间的规模不再持续增大, 且有波动和下降的趋势.

(4) 分析尺度对知识空间与闭包空间规模的影响

这一部分研究分析尺度与知识空间及闭包空间规模的关系. 实验中问题数量、技能数量与填充因子分别取 10、10 与 0.5, 逐步增大分析尺度, 以研究分析尺度对规模的影响.

分析尺度与知识空间及闭包空间规模的关系如图 8 所示. 实验结果表明, 在初始阶段, 即分析尺度小于 10 时, 知识空间与闭包空间的规模迅速增大. 当分析尺度大于 10 小于 25 时, 知识空间与闭包空间的规模保持增大, 但增长趋势减缓. 当分析尺度大于 25 时, 知识空间与闭包空间的规模不再增大.

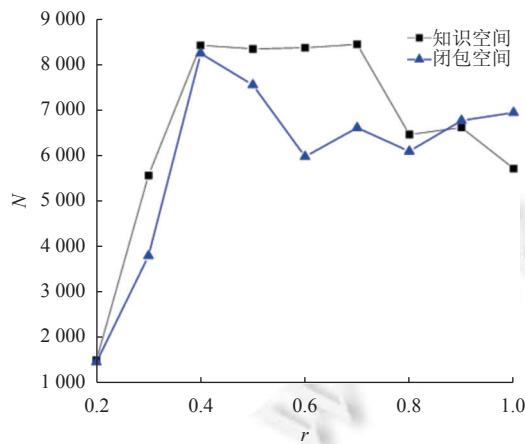


图 7 填充因子与知识空间及闭包空间规模的关系

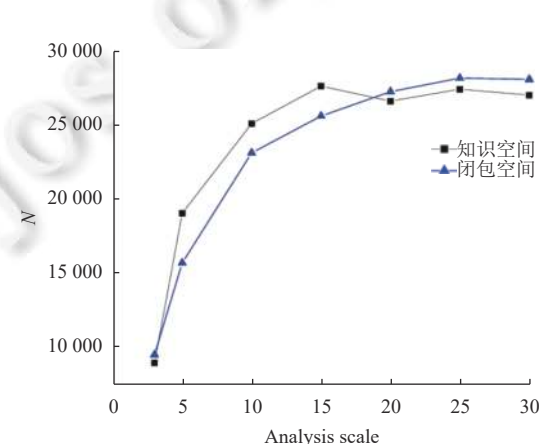


图 8 分析尺度与知识空间及闭包空间规模的关系

通过上述分析可以得到以下 3 个结论.

- (1) 问题数量与技能数量和知识空间与闭包空间的规模之间呈正向关联, 问题数量与技能数量越大, 知识空间与闭包空间的规模也越大.
- (2) 当填充因子取 0.5 左右时, 知识空间与闭包空间的规模最大.
- (3) 增大分析尺度可以增大知识空间与闭包空间的规模, 但是分析尺度达到一定数量之后, 知识空间与闭包空间的规模趋于稳定.

5 面向知识结构分析的模糊概念格模型与经典模糊概念格模型之间的联系

面向知识结构分析的模糊概念格模型包括知识空间模糊概念格与闭包空间模糊概念格, 这两种模糊概念格均是单边模糊概念格. 所谓单边模糊概念格是指在构成概念的外延与内涵中, 其中有一元是模糊集, 另一元是经典集^[34].

设三元组 $\tilde{Z} = (G, M, \tilde{R})$ 是一个模糊形式背景, \tilde{X} 是 G 上的模糊集, \tilde{Y} 是 M 上的模糊集. 定义从 $[0, 1]^G$ 到 $[0, 1]^M$ 的 4 个运算 $\#, P, N, D$ 如下:

$$\begin{cases} \tilde{X}^\#(m) = \bigwedge_{g \in G} (\tilde{X}(g) \rightarrow \tilde{R}(g, m)) \\ \tilde{X}^P(m) = \bigvee_{g \in G} (\tilde{X}(g) * \tilde{R}(g, m)) \\ \tilde{X}^N(m) = \bigwedge_{g \in G} (\tilde{R}(g, m) \rightarrow \tilde{X}(g)) \\ \tilde{X}^D(m) = \bigvee_{g \in G} (\sim \tilde{X}(g) * \sim \tilde{R}(g, m)) \end{cases}$$

对偶地, 定义从 $[0, 1]^M$ 到 $[0, 1]^G$ 的 4 个运算 $\#, P, N, D$ 如下:

$$\begin{cases} \tilde{Y}^\#(g) = \bigwedge_{m \in M} (\tilde{Y}(m) \rightarrow \tilde{R}(g, m)) \\ \tilde{Y}^P(g) = \bigvee_{m \in M} (\tilde{Y}(m) * \tilde{R}(g, m)) \\ \tilde{Y}^N(g) = \bigwedge_{m \in M} (\tilde{R}(g, m) \rightarrow \tilde{Y}(m)) \\ \tilde{Y}^D(g) = \bigvee_{m \in M} (\sim \tilde{Y}(m) * \sim \tilde{R}(g, m)) \end{cases}$$

通常, 称 $\#, P, N, D$ 分别为充分性算子、可能性算子、必然性算子和对偶充分性算子.

利用这些算子, 可定义经典模糊概念、面向对象模糊概念、面向属性模糊概念, 以及对偶模糊概念. 关于这些算子和模糊概念的讨论, 可参考文献 [50]. 此外, 这 4 种模糊概念均可以建立对应的格结构, 即模糊概念格, 这里不再赘述.

下文中, 在不引起歧义的情况下, 统称这 4 种模糊概念为模糊概念. 下面仅简要讨论与本文相关的两种模糊概念, 也就是面向对象模糊概念与面向属性模糊概念.

定义 15. 设 $\tilde{Z} = (G, M, \tilde{R})$ 是一个模糊形式背景. 若 $\tilde{X}^N = \tilde{Y}$ 且 $\tilde{Y}^P = \tilde{X}$, 则称二元组 (\tilde{X}, \tilde{Y}) 是 \tilde{Z} 的一个面向对象模糊概念.

此外, 若 $\tilde{X}^P = \tilde{Y}$ 且 $\tilde{Y}^N = \tilde{X}$, 则称二元组 (\tilde{X}, \tilde{Y}) 是一个面向属性模糊概念. 模糊概念 (\tilde{X}, \tilde{Y}) 的第一元 \tilde{X} 和第二元 \tilde{Y} 分别称为模糊概念的外延和内涵.

单边模糊概念是模糊概念的特例. 外延为经典集合, 内涵为模糊集的面向属性单边模糊概念如下.

定义 16. 设 $\tilde{Z} = (G, M, \tilde{R})$ 是一个模糊形式背景, $X \in 2^G$ 是 G 上的经典集, $\tilde{Y} \in [0, 1]^M$ 是 M 上的模糊集. 定义运算如下:

$$X^P(m) = \max_{g \in X} \tilde{R}(g, m),$$

$$\tilde{Y}^N = \{g \in G \mid \forall m \in M, \tilde{R}(g, m) \leq \tilde{Y}(m)\}.$$

若 $X^P = \tilde{Y}$ 且 $\tilde{Y}^N = X$, 则称二元组 (X, \tilde{Y}) 是 \tilde{Z} 的一个面向属性单边模糊概念.

显而易见, 闭包空间模糊概念是一个面向属性单边模糊概念. 那么, 是否存在与知识空间模糊概念实质等价的面向对象单边模糊概念呢? 经过简单分析, 答案是否定的. 要得到外延是经典集, 内涵是模糊集的面向对象单边模糊概念, 首先要考虑从外延到内涵的必然性算子 N .

如前文所述, 从 $[0, 1]^G$ 到 $[0, 1]^M$ 的必然性算子 N 的定义为:

$$\tilde{X}^N(m) = \bigwedge_{g \in G} (\tilde{R}(g, m) \rightarrow \tilde{X}(g)).$$

要得到从 2^G 到 $[0, 1]^M$ 的必然性算子 N , 实质上是限制 $\tilde{X}(g)$ 从 $\{0, 1\}$ 取值. 当 $\tilde{X}(g)$ 取 1 时, $\tilde{R}(g, m) \rightarrow \tilde{X}(g)$ 恒等于 1. 当 $\tilde{X}(g)$ 取 0 时, 意味着 g 不属于要分析的对象集. 因此, 可知无法定义有意义的从 2^G 到 $[0, 1]^M$ 的必然性算子 N , 从而也无法定义外延是经典集, 内涵是模糊集的面向对象单边模糊概念.

综上所述, 可得以下结论.

- (1) 知识空间模糊概念不同于现有的任何概念, 也不能从其他概念派生而来, 是一种具有独特结构的概念.
- (2) 闭包空间模糊概念本质上是一种面向属性单边模糊概念.

6 模糊技能形式背景与二值技能形式背景的知识结构之间的联系

模糊技能形式背景可以通过对问题与技能之间的模糊二元关系设置阈值取截集, 将模糊技能形式背景转化为二值技能形式背景.

例 12: 对于表 1 的模糊技能形式背景 $\tilde{\Pi}$, 取 $\lambda = 0.5$ 得到的二值技能形式背景 Π 如表 4 所示.

表 4 二值技能形式背景 Π

问题	s_1	s_2	s_3	s_4
q_1	0	1	1	0
q_2	1	0	1	1
q_3	0	1	0	0
q_4	0	1	1	0
q_5	0	0	1	0

对于一个二值技能形式背景 $\Pi = (Q, S, R)$, 定义 5 中的算子 f 与 g 退化为:

$$f(A) = \{s \in S \mid s^* \subseteq A\},$$

$$g(B) = \{q \in Q \mid q^* \cap B \neq \emptyset\}.$$

依照上述算子计算出所有知识空间概念, 得到的知识空间概念格如图 9 所示.

同样, 对于一个二值技能形式背景 $\Pi = (Q, S, R)$, 定义 10 中的算子 u 与 v 退化为:

$$u(A) = \{s \in S \mid s^* \cap A \neq \emptyset\},$$

$$v(B) = \{q \in Q \mid q^* \subseteq B\}.$$

依照上述算子计算出所有闭包空间概念, 得到的闭包空间概念格如图 10 所示.

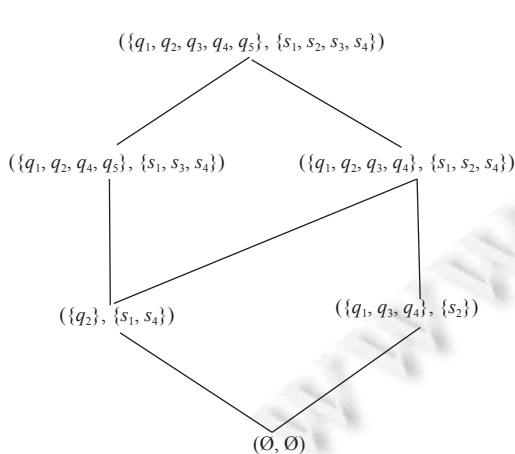


图 9 Π 的知识空间模糊概念格 $KSL(\Pi)$

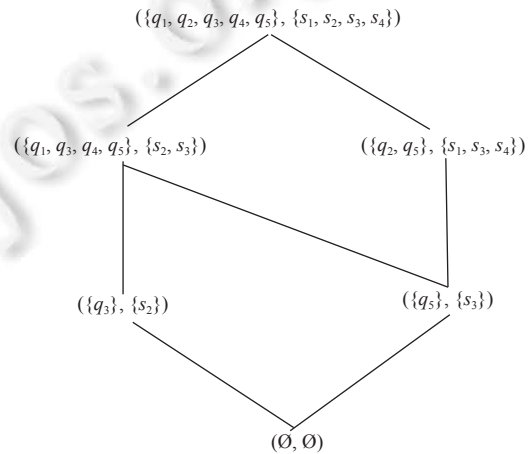


图 10 Π 的闭包空间模糊概念格 $CSL(\Pi)$

实际上, 若将 Q 与 S 分别视为对象集与属性集, 则 Π 的知识空间概念格等同于 Π 的面向对象概念格, 而 Π 的闭包空间概念格等同于 Π 的面向属性概念格.

由同一形式背景上面向对象概念格与面向属性概念格的关系可知, 若 A 属于 Π 的知识空间, 则 $(Q-A)$ 一定属于 Π 的闭包空间. 换言之, 对于同一个二值技能形式背景, 若已经知道知识空间的结构, 则可以直接得到闭包空间的结构.

但是, 依据 $\tilde{\Pi}$ 的知识空间模糊概念格与闭包空间模糊概念格, $\tilde{\Pi}$ 的知识空间中的状态与 $\tilde{\Pi}$ 的闭包空间中的状态不存在一一对应关系, 二值技能形式背景的上述结论在模糊技能形式背景中不成立.

7 结 论

本文引入模糊集与形式概念分析理论, 构造面向知识结构分析的模糊概念格模型, 讨论了面向知识结构分析的模糊概念格模型与现有模糊概念格模型之间的联系, 以及模糊技能形式背景与二值技能形式背景的知识结构之间的联系. 知识空间模糊概念不同于现有的任何概念, 也不能从其他概念派生而来, 是一种具有独特结构的概念. 闭包空间模糊概念本质上是一种面向属性单边模糊概念. 此外, 从语义上看, 知识空间模糊概念格可以视为一种广义的面向对象模糊概念格, 而闭包空间模糊概念格是一种面向属性单边模糊概念格. 对于面向知识结构分析, 二值形式背景上成立的结论在模糊形式背景上不成立.

面向知识结构分析的模糊概念格模型可以直接服务于学习者的知识状态的精准评测, 在技能与问题之间建立了近似推理关系, 提高了知识状态刻画与知识结构分析能力, 而且对基于模糊概念的不确定数据分析也具有参考价值 and 借鉴意义.

为了更好地实现面向大规模数据的知识状态刻画与知识结构分析, 在可解释性与计算效率等方面需要进一步研究的工作如下.

- (1) 知识空间模糊概念格的渐进式构造.
- (2) 知识空间模糊概念格与闭包空间模糊概念格之间的联系、区别和转换机制.
- (3) 不完备模糊技能形式背景的知识空间模糊概念格构造.
- (4) 基于知识空间模糊概念格的迭代深度概念挖掘.
- (5) 知识空间模糊概念格的技能约简.
- (6) 知识空间模糊概念格与概念认知学习的结合机制.

此外, 鉴于实际应用中数据的快速增长与模态的多样性^[47], 利用多粒度、多层次^[51]、概念认知学习^[52]的思想开展知识结构的刻画与分析同样也是值得深入研究的重要课题.

References:

- [1] Doignon JP, Falmagne JC. Spaces for the assessment of knowledge. *Int'l Journal of Man-machine Studies*, 1985, 23(2): 175–196. [doi: 10.1016/S0020-7373(85)80031-6]
- [2] Falmagne JC, Albert D, Doble C, Eppstein D, Hu XG. *Knowledge Spaces: Applications in Education*. Berlin: Springer, 2013. [doi: 10.1007/978-3-642-35329-1]
- [3] Doble C, Matayoshi J, Cosyn E, Uzun H, Karami A. A data-based simulation study of reliability for an adaptive assessment based on knowledge space theory. *Int'l Journal of Artificial Intelligence in Education*, 2019, 29(2): 258–282. [doi: 10.1007/s40593-019-00176-0]
- [4] Ferreira A, Felipussi SC, Alfaro C, Fonseca P, Vargas-Muñoz JE, dos Santos JA, Rocha A. Behavior knowledge space-based fusion for copy-move forgery detection. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2016, 25(10): 4729–4742. [doi: 10.1109/TIP.2016.2593583]
- [5] Facco P, Dal Pasto F, Meneghetti N, Bezzo F, Barolo M. Bracketing the design space within the knowledge space in pharmaceutical product development. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 2015, 54(18): 5128–5138. [doi: 10.1021/acs.iecr.5b00863]
- [6] Noventa S, Spoto A, Heller J, Kelava A. On a generalization of local independence in item response theory based on knowledge space theory. *Psychometrika*, 2019, 84(2): 395–421. [doi: 10.1007/s11336-018-9645-6]
- [7] Segedinac MT, Horvat S, Rodić DD, Rončević TN, Savić G. Using knowledge space theory to compare expected and real knowledge spaces in learning stoichiometry. *Chemistry Education Research and Practice*, 2018, 19(3): 670–680. [doi: 10.1039/c8rp00052b]

- [8] Reimann P, Kickmeier-Rust M, Albert D. Problem solving learning environments and assessment: A knowledge space theory approach. *Computers & Education*, 2013, 64: 183–193. [doi: 10.1016/j.compedu.2012.11.024]
- [9] Rusch A, Wille R. Knowledge spaces and formal concept analysis. In: Bock HH, Polasek W, eds. *Data Analysis and Information Systems*. Berlin: Springer, 1996. 427–436. [doi: 10.1007/978-3-642-80098-6_36]
- [10] Spoto A, Stefanutti L, Vidotto G. An iterative procedure for extracting skill maps from data. *Behavior Research Methods*, 2016, 48(2): 729–741. [doi: 10.3758/s13428-015-0609-9]
- [11] Doignon JP. Knowledge spaces and skill assignments. In: Fischer GH, Laming D, eds. *Contributions to Mathematical Psychology, Psychometrics, and Methodology*. New York: Springer, 1994. 111–121. [doi: 10.1007/978-1-4612-4308-3_8]
- [12] Stefanutti L, de Chiusole D, Gondan M, Maurer A. Modeling misconceptions in knowledge space theory. *Journal of Mathematical Psychology*, 2020, 99: 102435. [doi: 10.1016/j.jmp.2020.102435]
- [13] Sun W, Li JJ, Ge X, Lin YD. Knowledge structures delineated by fuzzy skill maps. *Fuzzy Sets and Systems*, 2021, 407: 50–66. [doi: 10.1016/j.fss.2020.10.004]
- [14] Heller J, Anselmi P, Stefanutti L, Robusto E. A necessary and sufficient condition for unique skill assessment. *Journal of Mathematical Psychology*, 2017, 79: 23–28. [doi: 10.1016/j.jmp.2017.05.004]
- [15] Stefanutti L, de Chiusole D. On the assessment of learning in competence based knowledge space theory. *Journal of Mathematical Psychology*, 2017, 80: 22–32. [doi: 10.1016/j.jmp.2017.08.003]
- [16] Sun W, Li JJ, Lin FC, He ZR. Constructing polytomous knowledge structures from fuzzy skills. *Fuzzy Sets and Systems*, 2023, 461: 108395. [doi: 10.1016/j.fss.2022.09.003]
- [17] Sun XY, Li JJ. Item state transition functions and polytomous knowledge structures based on procedural knowledge learning. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2022, 35(3): 223–242 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.16451/j.cnki.issn1003-6059.202203003]
- [18] Zadeh LA. Toward a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic. *Fuzzy Sets and Systems*, 1997, 90(2): 111–127. [doi: 10.1016/S0165-0114(97)00077-8]
- [19] Fujita H, Gaeta A, Loia V, Orciuoli F. Resilience analysis of critical infrastructures: A cognitive approach based on granular computing. *IEEE Trans. on Cybernetics*, 2019, 49(5): 1835–1848. [doi: 10.1109/TCYB.2018.2815178]
- [20] Miao DQ, Zhang QH, Qian YH, Liang JY, Wang GY, Wu WZ, Gao Y, Shang L, Gu SM, Zhang HY. From human intelligence to machine implementation model: Theories and applications based on granular computing. *CAAI Trans. on Intelligent Systems*, 2016, 11(6): 743–757 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.11992/tis.201612014]
- [21] Zhi HL, Li JH. Granule description based on necessary attribute analysis. *Chinese Journal of Computers*, 2018, 41(12): 2702–2719 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.11897/SP.J.1016.2018.02702]
- [22] Falmagne JC, Doignon JP. *Learning Spaces: Interdisciplinary Applied Mathematics*. Berlin: Springer, 2011. [doi: 10.1007/978-3-642-01039-2]
- [23] Ganter B, Wille R. *Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations*. Berlin: Springer, 1999. [doi: 10.1007/978-3-642-59830-2]
- [24] Poelmans J, Ignatov DI, Kuznetsov SO, Dedene G. Formal concept analysis in knowledge processing: A survey on applications. *Expert Systems with Applications*, 2013, 40(16): 6538–6560. [doi: 10.1016/j.eswa.2013.05.009]
- [25] Xu WH, Li JH, Wei L, Zhang T. *Formal Concept Analysis: Theory and Application*. Beijing: Science Press, 2016 (in Chinese).
- [26] Zou L, Feng KH, Liu X. Linguistic-valued intuitionistic fuzzy concept lattice and its application. *Journal of Computer Research and Development*, 2018, 55(8): 1726–1734 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.7544/issn1000-1239.2018.20180240]
- [27] Liu ZT, Qiang Y, Zhou W, Li X, Huang ML. A fuzzy concept lattice model and its incremental construction algorithm. *Chinese Journal of Computers*, 2007, 30(2): 184–188 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.3321/j.issn:0254-4164.2007.02.004]
- [28] Li JJ, Zhang YL, Wu WZ, Chen JK. Attribute reduction for formal context and consistent decision formal context and concept lattice generation. *Chinese Journal of Computers*, 2014, 37(8): 1768–1774 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.3724/SP.J.1016.2014.01768]
- [29] Ma Y, Ma WS. Construction of multi-attributes decrement for concept lattice. *Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software*, 2015, 26(12): 3162–3173 (in Chinese with English abstract). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/4818.htm> [doi: 10.13328/j.cnki.jos.004818]
- [30] Wei L, Cao L, Qi JJ, Zhang WX. Concept reduction and concept characteristics in formal concept analysis. *Scientia Sinica Informationis*, 2020, 50(12): 1817–1833 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.1360/N112018-00272]
- [31] Li JH, Wu WZ. Granular computing approach for formal concept analysis and its research outlooks. *Journal of Shandong University (Natural Science)*, 2017, 52(7): 1–12 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.6040/j.issn.1671-9352.0.2017.279]
- [32] Li JH, Mei CL, Xu WH, Qian YH. Concept learning via granular computing: A cognitive viewpoint. *Information Sciences*, 2015, 298:

- 447–467. [doi: [10.1016/j.ins.2014.12.010](https://doi.org/10.1016/j.ins.2014.12.010)]
- [33] Xu WH, Pang JZ, Luo SQ. A novel cognitive system model and approach to transformation of information granules. *Int'l Journal of Approximate Reasoning*, 2014, 55(3): 853–866. [doi: [10.1016/j.ijar.2013.10.002](https://doi.org/10.1016/j.ijar.2013.10.002)]
- [34] Xu WH, Li WT. Granular computing approach to two-way learning based on formal concept analysis in fuzzy datasets. *IEEE Trans. on Cybernetics*, 2016, 46(2): 366–379. [doi: [10.1109/TCYB.2014.2361772](https://doi.org/10.1109/TCYB.2014.2361772)]
- [35] Wu WZ, Leung Y, Mi JS. Granular computing and knowledge reduction in formal contexts. *IEEE Trans. on Knowledge and Data Engineering*, 2009, 21(10): 1461–1474. [doi: [10.1109/TKDE.2008.223](https://doi.org/10.1109/TKDE.2008.223)]
- [36] Wei L, Zhang XH, Qi JJ. Granular reduction of property-oriented concept lattices. In: *Proc. of the 18th Int'l Conf. on Conceptual Structures*. Sarawak: Springer, 2010. 154–164. [doi: [10.1007/978-3-642-14197-3_16](https://doi.org/10.1007/978-3-642-14197-3_16)]
- [37] Qiu GF, Ma JM, Yang HZ, Zhang WX. A mathematical model for concept granular computing systems. *Science China Information Sciences*, 2010, 53(7): 1397–1408 (in Chinese with English abstract). [doi: [10.1007/s11432-010-3092-z](https://doi.org/10.1007/s11432-010-3092-z)]
- [38] Zhi HL, Qi JJ. Common-possible concept analysis: A granule description viewpoint. *Applied Intelligence*, 2022, 52(3): 2975–2986. [doi: [10.1007/S10489-021-02499-9](https://doi.org/10.1007/S10489-021-02499-9)]
- [39] Duntsch N, Gediga G. Modal-style operators in qualitative data analysis. In: *Proc. of the 2002 IEEE Int'l Conf. on Data Mining*. Maebashi: IEEE, 2002. 155–162. [doi: [10.1109/ICDM.2002.1183898](https://doi.org/10.1109/ICDM.2002.1183898)]
- [40] Yao YY. Concept lattices in rough set theory. In: *Proc. of the 2004 IEEE Annual Meeting of the Fuzzy Information*. Banff: IEEE, 2004. 796–801. [doi: [10.1109/NAFIPS.2004.1337404](https://doi.org/10.1109/NAFIPS.2004.1337404)]
- [41] Yao YY. A comparative study of formal concept analysis and rough set theory in data analysis. In: *Proc. of the 4th Int'l Conf. on Rough Sets and Current Trends in Computing*. Uppsala: Springer, 2004. 59–68. [doi: [10.1007/978-3-540-25929-9_6](https://doi.org/10.1007/978-3-540-25929-9_6)]
- [42] Medina J. Relating attribute reduction in formal, object-oriented and property-oriented concept lattices. *Computers & Mathematics with Applications*, 2012, 64(6): 1992–2002. [doi: [10.1016/j.camwa.2012.03.087](https://doi.org/10.1016/j.camwa.2012.03.087)]
- [43] Medina J. Multi-adjoint property-oriented and object-oriented concept lattices. *Information Sciences*, 2012, 190: 95–106. [doi: [10.1016/j.ins.2011.11.016](https://doi.org/10.1016/j.ins.2011.11.016)]
- [44] Ma JM, Cai MJ, Zou CJ. Concept acquisition approach of object-oriented concept lattices. *Int'l Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 2017, 8(1): 123–134. [doi: [10.1007/s13042-016-0576-1](https://doi.org/10.1007/s13042-016-0576-1)]
- [45] Shao MW, Guo L, Li L. A novel attribute reduction approach based on the object oriented concept lattice. In: *Proc. of the 6th Int'l Conf. on Rough Sets and Knowledge Technology*. Banff: Springer, 2011. 71–80. [doi: [10.1007/978-3-642-24425-4_12](https://doi.org/10.1007/978-3-642-24425-4_12)]
- [46] Wang X, Zhang WX. Relations of attribute reduction between object and property oriented concept lattices. *Knowledge-based Systems*, 2008, 21(5): 398–403. [doi: [10.1016/j.knosys.2008.02.005](https://doi.org/10.1016/j.knosys.2008.02.005)]
- [47] Liang JY, Qian YH, Li DY, Hu QH. Theory and method of granular computing for big data mining. *Scientia Sinica Informationis*, 2015, 45(11): 1355–1369 (in Chinese with English abstract). [doi: [10.1360/N112015-00092](https://doi.org/10.1360/N112015-00092)]
- [48] Zadeh LA. Fuzzy sets. *Information and Control*, 1965, 8(3): 338–353. [doi: [10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X)]
- [49] Wei L, Wan Q. Granular transformation and irreducible element judgment theory based on pictorial diagrams. *IEEE Trans. on Cybernetics*, 2016, 46(2): 380–387. [doi: [10.1109/TCYB.2014.2371476](https://doi.org/10.1109/TCYB.2014.2371476)]
- [50] Djouadi Y, Prade H. Possibility-theoretic extension of derivation operators in formal concept analysis over fuzzy lattices. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 2011, 10(4): 287–309. [doi: [10.1007/s10700-011-9106-5](https://doi.org/10.1007/s10700-011-9106-5)]
- [51] Zhi HL, Li JH, Li YN. Multilevel conflict analysis based on fuzzy formal contexts. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 2022, 30(12): 5128–5142. [doi: [10.1109/TFUZZ.2022.3167789](https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2022.3167789)]
- [52] Xu WH, Guo DD, Qian YH, Ding WP. Two-way concept-cognitive learning method: A fuzzy-based progressive learning. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 2023, 31(6): 1885–1899. [doi: [10.1109/TFUZZ.2022.3216110](https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2022.3216110)]

附中文参考文献:

- [17] 孙晓燕, 李进金. 基于程序性知识学习的项目状态转移函数与多分知识结构. *模式识别与人工智能*, 2022, 35(3): 223–242. [doi: [10.16451/j.cnki.issn1003-6059.202203003](https://doi.org/10.16451/j.cnki.issn1003-6059.202203003)]
- [20] 苗夺谦, 张清华, 钱宇华, 梁吉业, 王国胤, 吴伟志, 高阳, 商琳, 顾沈明, 张红云. 从人类智能到机器实现模型——粒计算理论与方法. *智能系统学报*, 2016, 11(6): 743–757. [doi: [10.11992/tis.201612014](https://doi.org/10.11992/tis.201612014)]
- [21] 智慧来, 李金海. 基于必然属性分析的粒描述. *计算机学报*, 2018, 41(12): 2702–2719. [doi: [10.11897/SP.J.1016.2018.02702](https://doi.org/10.11897/SP.J.1016.2018.02702)]
- [25] 徐伟华, 李金海, 魏玲, 张涛. *形式概念分析理论与应用*. 北京: 科学出版社, 2016.
- [26] 邹丽, 冯凯华, 刘新. 语言值直觉模糊概念格及其应用. *计算机研究与发展*, 2018, 55(8): 1726–1734. [doi: [10.7544/issn1000-1239](https://doi.org/10.7544/issn1000-1239)]

- 2018.20180240]
- [27] 刘宗田, 强宇, 周文, 李旭, 黄美丽. 一种模糊概念格模型及其渐进式构造算法. 计算机学报, 2007, 30(2): 184–188. [doi: 10.3321/j.issn:0254-4164.2007.02.004]
- [28] 李进金, 张燕兰, 吴伟志, 陈锦坤. 形式背景与协调决策形式背景属性约简与概念格生成. 计算机学报, 2014, 37(8): 1768–1774. [doi: 10.3724/SP.J.1016.2014.01768]
- [29] 马垣, 马文胜. 概念格多属性渐减式构造. 软件学报, 2015, 26(12): 3162–3173. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/4818.htm> [doi: 10.13328/j.cnki.jos.004818]
- [30] 魏玲, 曹丽, 祁建军, 张文修. 形式概念分析中的概念约简与概念特征. 中国科学: 信息科学, 2020, 50(12): 1817–1833. [doi: 10.1360/N112018-00272]
- [31] 李金海, 吴伟志. 形式概念分析的粒计算方法及其研究展望. 山东大学学报(理学版), 2017, 52(7): 1–12. [doi: 10.6040/j.issn.1671-9352.0.2017.279]
- [37] 仇国芳, 马建敏, 杨宏志, 张文修. 概念粒计算系统的数学模型. 中国科学F辑: 信息科学, 2010, 53(7): 1397–1408. [doi: 10.1007/s11432-010-3092-z]
- [47] 梁吉业, 钱宇华, 李德玉, 胡清华. 大数据挖掘的粒计算理论与方法. 中国科学: 信息科学, 2015, 45(11): 1355–1369. [doi: 10.1360/N112015-00092]



智慧来(1981—), 男, 博士, 副教授, CCF 专业会员, 主要研究领域为形式概念分析, 粗糙集, 粒计算.



李金海(1984—), 男, 博士, 教授, 主要研究领域为概念格, 粗糙集, 模糊集, 粒计算, 认知计算.