

个体多样性自适应的多模态多目标差分进化算法*

毛斐巧, 周倩, 侯伟俊, 曾文君, 梁正平



(深圳大学 计算机与软件学院, 广东 深圳 518060)

通信作者: 梁正平, E-mail: liangzp@szu.edu.cn

摘要: 多模态多目标优化存在个体拥挤度难以合理定义、个体多样性计算难以动态平衡决策空间和目标空间的挑战, 现有多模态多目标优化算法在性能上尚存在较大提升空间. 为此, 提出了一种个体多样性自适应的多模态多目标差分进化算法 (multimodal multiobjective differential evolution algorithm based on adaptive individual diversity, MMODE-AID). 首先, 以个体在决策空间或目标空间的最近邻平均欧氏距离为基础, 通过对个体间相对距离的累乘定义个体的拥挤度, 可以更合理地衡量各个体在相应空间的真实拥挤程度. 其次, 基于决策空间和目标空间各自的整体拥挤度, 得到个体在相应空间的拥挤度相对值, 可以合理地动态平衡进化过程中决策空间和目标空间当前状态对个体多样性计算的影响, 有利于各等效帕累托最优解集的充分搜索. MMODE-AID 以差分进化为基础优化框架, 并基于自适应个体多样性评估个体的适应度, 可在子代生成和环境选择时得到在决策空间分布、目标空间分布、收敛性这 3 方面均表现优异的种群. 为验证 MMODE-AID 的性能, 将其与 7 个先进的多模态多目标优化算法在 39 个基准测试问题和 1 个实际应用问题上进行对比. 实验结果表明 MMODE-AID 对于多模态多目标优化问题的求解具有明显竞争优势. MMODE-AID 的源代码和原始实验数据已在 GitHub 上公开: <https://github.com/CIA-SZU/ZQ>.

关键词: 拥挤度; 多样性; 多模态多目标优化; 差分进化

中图法分类号: TP18

中文引用格式: 毛斐巧, 周倩, 侯伟俊, 曾文君, 梁正平. 个体多样性自适应的多模态多目标差分进化算法. 软件学报. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/7578.htm>

英文引用格式: Mao FQ, Zhou Q, Hou WJ, Zeng WJ, Liang ZP. Multimodal Multiobjective Differential Evolution Algorithm Based on Adaptive Individual Diversity. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software (in Chinese). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/7578.htm>

Multimodal Multiobjective Differential Evolution Algorithm Based on Adaptive Individual Diversity

MAO Fei-Qiao, ZHOU Qian, HOU Wei-Jun, ZENG Wen-Jun, LIANG Zheng-Ping

(College of Computer Science and Software Engineering, Shenzhen University, Shenzhen 518060, China)

Abstract: As multimodal multiobjective optimization faces challenges of reasonably defining the individual crowdedness and dynamically balancing the decision space and objective space in individual diversity calculation, there is still significant room for performance improvement in existing multimodal multiobjective optimization algorithms. To this end, this study proposes a multimodal multiobjective differential evolution algorithm based on adaptive individual diversity (MMODE-AID). First, based on the average Euclidean distance of individuals' nearest neighbors in the decision space or objective space, the crowdedness of individuals can be defined by multiplying the relative distances between individuals, which can more reasonably measure the true crowdedness of each individual in the corresponding space. Second, based on the overall crowdedness of the decision space and objective space, the relative crowdedness of individuals in the corresponding space is obtained, which can reasonably and dynamically balance the influence of the current state of the decision space and objective space on individual diversity calculation during the evolution process, and is conducive to the sufficient search of each equivalent

* 基金项目: 国家自然科学基金 (62572327); 广东省自然科学基金 (2025A1515010260)

收稿时间: 2025-05-28; 修改时间: 2025-08-02, 2025-09-26; 采用时间: 2025-11-28; jos 在线出版时间: 2026-02-04

Pareto optimal solution set. By employing differential evolution as the basic optimization framework, MMODE-AID evaluates individual fitness based on adaptive individual diversity. Meanwhile, it can obtain a population with excellent performance in decision space distribution, objective space distribution and convergence during offspring generation and environmental selection. MMODE-AID is compared with seven advanced multimodal multiobjective optimization algorithms on 39 benchmark test problems and one real-world application problem to validate the algorithm's performance. The experimental results demonstrate that MMODE-AID exhibits significant competitive advantages in solving multimodal multiobjective optimization problems. The source code and original experimental data of MMODE-AID are publicly available on GitHub: <https://github.com/CIA-SZU/ZQ>.

Key words: crowdedness; diversity; multimodal multiobjective optimization; differential evolution

路径规划^[1]、特征选择^[2]、熔炉分组^[3]等应用中存在各种类型的多模态多目标优化问题 (multimodal multi-objective optimization problem, MMOP). 由于不同目标之间可能相互冲突, 且存在帕累托最优解集 (Pareto-optimal set, *PS*) 中的多个最优解对应帕累托前沿 (Pareto front, *PF*) 上同一个点的情况, MMOP 的优化存在巨大挑战^[4,5].

进化算法 (evolutionary algorithm, EA) 通过模仿生物进化过程对问题进行求解, 可同时找到多个帕累托非支配解, 已广泛应用于各类多目标优化问题^[6-8]. 然而, 传统多目标进化算法 (multiobjective evolutionary algorithm, MOEA) 在衡量个体的拥挤状况时, 仅考虑个体在目标空间的拥挤程度, 未考虑个体在决策空间的拥挤程度, 无法同时兼顾目标空间和决策空间个体分布的多样性, 进而难以找到多个等效的帕累托最优解, 限制了其在 MMOP 中的应用.

近年来, 针对多模态多目标优化 (multimodal multiobjective optimization, MMO) 面临的挑战, 学者们在 MOEA 的基础上, 提出了一系列多模态多目标进化算法 (multimodal multiobjective evolutionary algorithms, MMOEA), 极大提升了 MMOP 的求解性能. 根据优化机制和处理策略的不同, 现有 MMOEA 可分为基于支配的 MMOEA^[9-11]、基于分解的 MMOEA^[12-14]、基于指标的 MMOEA^[15-17]等. 其中, 个体拥挤度的定义和个体多样性的计算, 是各类 MMOEA 设计过程中均需考虑的重要内容.

个体拥挤度定义方面, 现有 MMOEA 先后采用了拥挤距离 (crowding distance, CD)^[18]、基于 k 近邻的密度估计 (k NN density estimation, k DE)^[19]、双 k 近邻 (double k NN, DKN)^[20]、调和平均距离 (harmonic average distance, HAD)^[21]、基于聚类的特殊拥挤距离 (clustering-based special crowding distance, CSCD)^[22]等. 上述定义均可从各自角度客观衡量个体的拥挤程度, 但由于不同的等效 *PS* 在某些决策变量维度上可能存在重叠, 上述定义在求解 MMOP 的过程中均容易对个体的实际拥挤程度产生误判, 即拥挤错觉^[23], 且部分拥挤度定义需要设置特定的参数, 依赖人工经验.

个体多样性计算方面, 包括仅使用决策空间拥挤度的方法^[24]、取决策空间和目标空间拥挤度最值的方法^[25]、将决策空间和目标空间拥挤度直接相加^[26]或以固定权重相加^[27]的方法等. 相比传统 MOEA, 上述多样性计算方法有利于在决策空间中找到多个等效 *PS*. 但由于决策空间和目标空间的维度可能不一致, 且种群在决策空间和目标空间的分布可能存在极大差异, 上述方法未能考虑决策空间和目标空间的差异, 以及它们各自的整体拥挤度对个体多样性计算带来的不同影响, 容易产生多样性评估失衡现象, 导致最终获得的解集在决策空间和目标空间的分布难以同时均匀, 难以实现对各等效 *PS* 的充分搜索.

针对现有 MMOEA 在个体拥挤度定义和个体多样性计算方面的不足, 本文提出一种个体多样性自适应的多模态多目标差分进化算法 (multimodal multiobjective differential evolution algorithm based on adaptive individual diversity, MMODE-AID). 差分进化 (differential evolution, DE) 是一种基于个体间的差分向量进行进化的 EA, 具有全局搜索能力强, 收敛速度快的优点^[28]. MMODE-AID 整体以 DE 作为基础优化框架, 并基于所提出的个体拥挤度定义和个体多样性计算方式评估个体的适应度, 可在子代生成和环境选择时得到在决策空间分布、目标空间分布、收敛性这 3 方面均表现优异的种群. 其中, 在个体拥挤度定义方面, 以种群中所有个体在决策空间或目标空间的最近邻平均欧氏距离为基础, 通过对个体间相对距离的累乘, 避免对边界的过度敏感, 可更合理地衡量各个体在相应空间的真实拥挤程度. 个体多样性计算方面, 同样以种群中所有个体在决策空间或目标空间的最近邻平均欧氏距离为基础, 结合对应空间中所有个体的近邻个体数平均值, 得到对应空间的整体拥挤度, 再基于个体拥挤度与

整体拥挤度的商, 得到个体在对应空间的拥挤度相对值, 最后将个体在决策空间和目标空间中的拥挤度相对值相加, 作为个体的多样性, 可根据问题特性自适应调整决策空间和目标空间的占比权重, 从而可合理地动态平衡进化过程中决策空间和目标空间当前状态对个体多样性计算的影响, 有利于各等效 *PS* 的充分搜索.

本文的主要工作和贡献如下.

(1) 提出了一种基于最近邻平均距离的个体拥挤度 (individual crowdedness based on nearest neighbor averaged distance, ICNN) 定义方式, 可降低对边界的敏感程度, 从而避免出现拥挤错觉且不需设置特定的参数.

(2) 提出了一种基于决策空间和目标空间整体拥挤度的个体多样性自适应 (adaptive individual diversity based on global crowdedness of decision space and objective space, AID) 计算方式, 可根据问题特性自适应调整决策空间和目标空间的占比权重, 从而动态平衡进化过程中决策空间和目标空间各自整体拥挤程度对个体多样性的影响.

(3) 提出了一种基于 AID 的多模态多目标差分进化算法 MMODE-AID, 通过合理评估个体的适应度, 可持续引导种群在决策空间和目标空间高效搜索.

(4) 在 39 个多模态多目标基准测试问题和 1 个实际应用问题上, 与 7 个先进的代表性 MMOEA 进行对比, 结果表明 MMODE-AID 在解决 MMOP 时具有明显的竞争优势.

本文第 1 节介绍问题定义和相关工作. 第 2 节介绍所提出的算法. 第 3 节介绍实验方案并对结果进行分析. 最后总结全文并展望未来工作.

1 问题定义和相关工作

1.1 问题定义

多目标优化问题 (multiobjective optimization problem, MOP) 的数学定义如下^[29]:

$$\min_{\mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_M(\mathbf{x})) \text{ s.t. } \mathbf{x} \in \Omega \quad (1)$$

其中, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_D)$ 是决策空间 Ω 中的 D 维决策变量, $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 为待求解的 M 个目标函数. 若决策空间 Ω 中的其他任何个体均不能支配个体 \mathbf{x} , 则称 \mathbf{x} 为 Pareto 最优解. 对于两个不同的 Pareto 最优解 $\mathbf{x}_1^* \in S_1$ 和 $\mathbf{x}_2^* \in S_2$, 若 $\mathbf{F}(\mathbf{x}_1^*) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_2^*)$, 则称 \mathbf{x}_1^* 与 \mathbf{x}_2^* 互为等效 Pareto 最优解, 集合 S_1 和 S_2 互为等效 *PS*. 若某个体 \mathbf{x}^* 不受邻域内其他个体的支配, 则称其为局部 Pareto 最优解. 当至少存在两个等效 Pareto 最优解或一个局部 Pareto 最优解时, 此类 MOP 通常被称为 MMOP^[30].

1.2 相关工作

本节围绕个体拥挤度和个体多样性介绍 MMOEA 的研究现状.

1.2.1 个体拥挤度

MMO 中个体的拥挤度是指个体在决策空间或目标空间的拥挤程度. 不同 MMOEA 采用不同的个体拥挤度定义方式. Deb 等人^[31]提出的 Omni-optimizer 首次基于 CD 分别定义个体在决策空间和目标空间的拥挤度, 该方法无需额外参数, 计算过程较简单, 但由于 MMOP 在某个维度上可能对应多个重叠的 *PS*, 容易导致拥挤错觉. Zhang 等人^[32]提出的 MMO-CLRPSO 基于 k DE 分别定义个体在决策空间和目标空间的拥挤度, 能识别不同区域的拥挤状况, 但依赖于 k 值的选择, 无法准确反映个体周围的真实拥挤程度. Liu 等人^[20]提出的 CPDEA 设计了 DKN 对个体在决策空间和目标空间的拥挤度分别进行评估, 比简单的 k DE 更能反映个体在其邻域内的相对拥挤程度, 但仍然存在参数敏感问题. Lin 等人^[33]提出的 MMOEA/DC 采用 HAD 定义个体在决策空间的拥挤度, 能有效克服离群个体的影响, 但无法进一步区分相似拥挤度区域内个体的细微差异, 容易造成拥挤错觉. Liang 等人^[22]提出的 MMODE_CSCD 结合聚类操作, 将 CD 改进为 CSCD 可更好地衡量个体分别在决策空间和目标空间的拥挤程度, 但当聚类不合理时, 单个类别中的个体可能属于不同 *PS*, 仍然存在拥挤错觉现象.

1.2.2 个体多样性

MMO 中个体的多样性是指个体在决策空间和目标空间的综合拥挤程度. 不同 MMOEA 采用的个体多样性计

算方式各不相同. Liang 等人^[34]早期提出的 DN-NSGAI、Li 等人^[15]提出的 MMEA-WI 和 Dang 等人^[35]提出的 DEA-IGNN 分别采用 CD、DKN 和 HAD 仅基于个体在决策空间的拥挤度计算个体的多样性. 尽管在决策空间计算多样性的方式相对单模态多目标优化在目标空间计算多样性的方式更有利于 MMOP 的处理, 但未能考虑个体在目标空间的拥挤程度对解集分布均匀性的影响. Han 等人^[36]提出的 MMOPSOSS 和 Zhao 等人^[37]提出的 MMOWPA-CN 分别采用 CD 和 CSCD 定义个体的拥挤度, 并基于个体在决策空间和目标空间的拥挤度最值计算个体的多样性, 有利于识别个体在决策空间分布稀疏但在目标空间聚集的现象, 进而保留更多潜在的 PS 区域, 但由于每次仅关注决策空间或目标空间的拥挤状态, 无法保证解集在决策空间和目标空间的分布同时均匀. Wang 等人^[38]提出的 CEA-LES 在 CD 最值基础上, 基于 DKN 进一步考虑决策空间和目标空间的综合拥挤程度, 但仍存在仅基于决策空间或目标空间计算个体多样性的情形. Ming 等人^[39]提出的 MMEAPSL 采用决策空间和目标空间的 kDE 直接的相加方式计算个体多样性. Zhang 等人^[27]提出的 MMEAHONF 则将决策空间和目标空间的 CD 均设置相同的权重再相加来计算个体多样性. 尽管两者同时考虑了决策空间和目标空间的拥挤状况, 但固定权重的方式没有考虑两个空间存在的差异, 无法根据当前进化状态自适应调整两个空间各自拥挤程度对个体多样性计算的影响, 存在多样性评估失衡现象, 导致最终解集在决策空间和目标空间的分布难以同时均匀, 不利于各等效 PS 的充分搜索.

1.3 研究动机

现有 MMOEA 所采用个体拥挤度定义均容易产生拥挤错觉, 且部分拥挤度定义需要设置特定的参数, 依赖人工经验, 如 kDE 、DKN 和 CSCD 等. 图 1 以 CD 为例展示了拥挤错觉现象. 图中的绿蓝两条曲线为 MMF8 测试问题的 2 个等效 PS , 5 个红点 a 、 b 、 c 、 d 和 e 为当前种群中的个体. 当需要从这 5 个中删除 1 个并维持种群多样性时, 尽管 b 处于分布稀疏的区域, 且是最靠近 PS_1 右侧区域的个体, 但由于该问题的两个等效 PS 在 x_1 维和 x_2 维上均存在重叠, 且在 x_1 维上 b 位于紧密靠近的 a 和 c 之间, 在 x_2 维上位于紧密靠近的 d 和 e 之间, 导致 b 的 CD 值最小而被认定为处于最拥挤状态, 从而产生拥挤错觉. 为克服现有 MMOEA 所采用个体拥挤度定义的不足, 本文在所提出的 MMODE-AID 中定义了一种基于最近邻平均距离, 无需特定参数的个体拥挤度 ICNN, 可避免对边界的过度敏感, 以更好地衡量决策空间和目标空间中个体的真实拥挤程度.

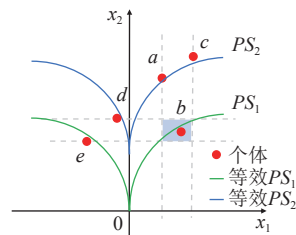


图 1 基于 CD 的拥挤错觉示例

与此同时, 现有 MMOEA 在计算个体多样性时, 要么仅基于个体在决策空间或目标空间的拥挤度, 要么仅以固定权重方式对个体在决策空间和目标空间的拥挤度简单相加, 存在多样性评估失衡现象, 无法合理体现个体在进化过程中的综合拥挤程度. 以基于 kDE 的 MMEAPSL 在 MMF1_e 测试问题上的优化过程为例, 图 2(a) 中绿蓝两条曲线为两个等效 PS , 5 个红点 a 、 b 、 c 、 d 和 e 为当前种群中的个体, 图 2(b) 中灰色曲线为 PF , 黄点为决策空间中对应个体在目标空间的映射. 当需要从这 5 个个体中删除 1 个并维持种群多样性时, 由于 e 在决策空间的 kDE 值为倒数第 2 小, 且在目标空间的 kDE 值最小, 导致其多样性最差, 从而被选择删除. 但从图 2 可见, 各个体在目标空间已分布较均匀, 而在决策空间不够均匀, 且 a 处于最为拥挤的位置. 尽管 a 在决策空间的 kDE 值最小, 但由于 MMEAPSL 在计算个体多样性时仅采用相同权重将个体在决策空间和目标空间的 kDE 值相加, 导致多样性评估失衡, 从而不合理地选择了 e . 在此种情况下, 若加大决策空间分布对个体多样性计算的影响, 则有机会选择实际最为拥挤的 a . 为克服现有 MMOEA 所采用个体多样性计算的不足, 本文提出了一种基于决策空间和目标

空间整体拥挤度的个体多样性自适应计算方式 AID, 根据问题特性动态自适应调整决策空间和目标空间的占比权重, 以更合理地动态衡量个体在进化过程中的综合拥挤程度.

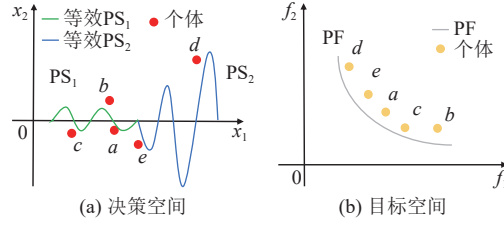


图2 基于 kDE 的多样性评估失衡示例

2 算法设计

本节首先介绍 MMODE-AID 的整体框架, 然后详细介绍所提出的个体拥挤度和自适应个体多样性, 以及子代生成和环境选择, 最后分析 MMODE-AID 的时间复杂度.

2.1 MMODE-AID 整体框架

MMODE-AID 的整体框架如算法 1 所示. 首先, 随机生成大小为 N 的初始种群 P (第 1 行), 当未达到终止条件时, 迭代进行子代生成和环境选择, 不断生成更好的新种群 (第 2-22 行). 在每轮迭代中, 首先计算 P 中个体的适应度 (第 3 行), 然后采用自适应 DE 方式生成子代 (第 4-12 行), 接着基于个体的多样性和适应度进行环境选择 (第 13-20 行).

算法 1. MMODE-AID.

输入: N (种群大小), P (种群);

输出: P (新产生的种群).

1. 初始化种群 P ;
 2. **While** 未达到终止条件 **do**
 3. 计算 P 中个体的适应度;
 4. **For** $i=1$ to N
 5. **If** $P[i]$ 为 P 中非第一 Pareto 支配等级中的个体 **then**
 6. 从 P 的非第一 Pareto 支配等级个体中随机选择 3 个;
 7. 使用 DE/rand/1 和交叉算子生成子代个体 $O[i]$;
 8. **Else**
 9. 从 P 的第一 Pareto 支配等级个体中随机选择 2 个, 并选择 P 中适应度最好的个体作为 x_{best} ;
 10. 使用 DE/pbest/1 和交叉算子生成子代个体 $O[i]$;
 11. **End If**
 12. **End For**
 13. 计算 $P \cup O$ 中个体的适应度;
 14. **If** $P \cup O$ 中非支配个体数小于等于 N **then**
 15. 从 $P \cup O$ 中选取适应度最好的 N 个个体放入 Q 中;
 16. **Else**
 17. 将 $P \cup O$ 中所有非支配个体放入 Q 中;
 18. 计算 Q 中所有个体的多样性;
-

19. 保留 Q 中多样性最好的 N 个个体;
20. **End If**
21. $P = Q$;
22. **End While**

2.2 基于最近邻平均距离的个体拥挤度

MMO 中的个体拥挤度是指个体在决策空间或目标空间中的拥挤程度. 为避免人工参数设置和减少潜在的拥挤错觉, 本文提出了一种基于最近邻平均距离的个体拥挤度 ICNN.

以决策空间中个体拥挤度的定义为例. 首先, 在决策空间中计算所有个体与其最近邻个体欧氏距离的平均值, 记为 r_d . 然后, 按公式 (2) 计算种群中任意两个个体 $P[i]$ 和 $P[j]$ 在决策空间的相对距离 $R_d(i, j)$.

若 $P[i]$ 和 $P[j]$ 的欧氏距离 $E_d(P[i], P[j]) \leq r_d$, 则将 $P[i]$ 和 $P[j]$ 的相对距离 $R_d(i, j)$ 定义为 $E_d(P[i], P[j])/r_d$, 否则将 $R_d(i, j)$ 置为 1:

$$R_d(i, j) = \begin{cases} \frac{E_d(P[i], P[j])}{r_d}, & \text{if } E_d(P[i], P[j]) \leq r_d \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

公式 (2) 以 r_d 为基准设置个体间相对距离的原因, 在于 r_d 可以较好地从整体上体现决策空间中种群分布的疏密程度, 且其取值会随种群分布的变化而动态调整. 当个体间的欧氏距离大于 r_d 时, 意味着它们在决策空间中处于相对疏远的位置. 此时将相对距离设为上限 1, 以降低远距离个体对个体拥挤度定义的影响, 有利于更准确地反映个体在决策空间中的真实拥挤程度.

最后, 将个体 $P[i]$ 与其他所有个体在决策空间的相对距离累乘, 并乘上决策空间中 $P[i]$ 与其最近邻个体的欧氏距离 $X_d[i]$, 定义为 $P[i]$ 在决策空间的拥挤度 $C_d[i]$:

$$C_d[i] = X_d[i] \prod_{j=1 \text{ to } N, j \neq i} R_d(i, j) \quad (3)$$

其中, N 为种群的大小. 对于个体 $P[i]$ 而言, $C_d[i]$ 越小, 说明其在决策空间中所处位置越拥挤.

公式 (3) 基于个体间相对距离的累乘定义拥挤度的原因, 一方面是为了防止远距离个体给个体拥挤度定义带来显著偏差, 另一方面是为了在相似拥挤区域内更敏感地区分个体拥挤度的细微差异, 以减少可能出现的拥挤错觉.

图 3 对 ICNN 的计算过程进行了直观展示. 设决策空间中共有 6 个个体, 其中 a 、 b 、 c 、 d 与 p 、 q 间的绝对距离在图 3(a) 中分别用短划虚线和点虚线上的数字表示, 此时的最近邻平均距离 r_d 为 4. 图 3(b) 中短划虚线和点虚线上的数字分别为根据公式 (2) 计算得到的 a 、 b 、 c 、 d 与 p 、 q 间的相对距离. 进一步根据公式 (3), 可得知 p 和 q 的拥挤度分别为 0.367 和 0.389. 也即 p 和 q 的拥挤度接近, 但 p 比 q 相对更为拥挤, 这与图 3(a) 所呈现的实际情况一致, 未出现拥挤错觉. 相反, 若将公式 (3) 中的累乘改为累加, 则 p 和 q 的拥挤度分别为 3.875 和 3.8, 即 q 比 p 更为拥挤, 此时出现了拥挤错觉. 因此, 本文以最近邻平均距离为基础, 基于个体间相对距离的累乘定义个体拥挤度有利于减少潜在的拥挤错觉.

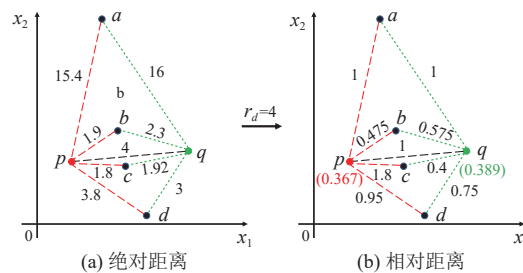


图 3 决策空间中的 ICNN 示例

个体 $\mathbf{P}[i]$ 在目标空间的拥挤度 $C_o[i]$ 与其在决策空间的拥挤度 $C_d[i]$ 的定义类似. $C_o[i]$ 越小, 表示其在目标空间中所处位置越拥挤:

$$C_o[i] = X_o[i] \prod_{j=1 \text{ to } N, j \neq i} R_o(i, j) \quad (4)$$

其中, $X_o[i]$ 为目标空间中 $\mathbf{P}[i]$ 与其最近邻个体的欧氏距离, $R_o(i, j)$ 为 $\mathbf{P}[i]$ 与 $\mathbf{P}[j]$ 在目标空间的相对距离:

$$R_o(i, j) = \begin{cases} \frac{E_o(\mathbf{P}[i], \mathbf{P}[j])}{r_o}, & \text{if } E_o(\mathbf{P}[i], \mathbf{P}[j]) \leq r_o \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5)$$

其中, $E_o(\mathbf{P}[i], \mathbf{P}[j])$ 表示个体 $\mathbf{P}[i]$ 与 $\mathbf{P}[j]$ 在目标空间的欧氏距离, r_o 为目标空间中所有个体与其最近邻个体的平均距离.

2.3 自适应个体多样性

MMO 中的个体多样性是指个体在决策空间和目标空间中的综合拥挤程度. 为合理地动态平衡进化过程中决策空间和目标空间的当前状态对个体多样性计算的影响, 本文提出了一种基于决策空间和目标空间整体拥挤度的个体多样性自适应计算方式 AID.

首先, 基于决策空间中每个个体 $\mathbf{P}[i]$ 与其他个体的相对距离 $R_d(i, j)$ ($j = 1 \text{ to } N, j \neq i$), 得到 $\mathbf{P}[i]$ 的近邻个体数 $M_d[i]$. 其中, 近邻个体是指相对距离小于 1 的个体. 然后, 计算决策空间中所有个体的近邻个体数平均值 τ_d :

$$\tau_d = \frac{\sum_{i=1 \text{ to } N} M_d[i]}{N} \quad (6)$$

进一步, 采用公式 (7) 定义决策空间的整体拥挤度 ρ_d :

$$\rho_d = \frac{r_d}{\tau_d} \quad (7)$$

其中, r_d 为决策空间中所有个体与其最近邻个体欧氏距离的平均值. r_d 越小, 则 ρ_d 越小, 表示决策空间整体上越拥挤. 与此相反, τ_d 越小, 则 ρ_d 越大, 表示决策空间整体上越稀疏.

目标空间的整体拥挤度 ρ_o 的定义与公式 (7) 类似:

$$\rho_o = \frac{r_o}{\tau_o} \quad (8)$$

其中, r_o 为目标空间中所有个体与其最近邻个体欧氏距离的平均值, τ_o 为目标空间中所有个体的近邻个体数平均值:

$$\tau_o = \frac{\sum_{i=1 \text{ to } N} M_o[i]}{N} \quad (9)$$

其中, $M_o[i]$ 为目标空间中与 $\mathbf{P}[i]$ 的相对距离小于 1 的近邻个体数.

类似的, r_o 越小, 则 ρ_o 越小, 表示目标空间整体上越拥挤; τ_o 越小, 则 ρ_o 越大, 表示目标空间整体上越稀疏.

最后, 将个体 $\mathbf{P}[i]$ 的多样性 $D[i]$ 定义为:

$$D[i] = \frac{C_d[i]}{\rho_d} + \frac{C_o[i]}{\rho_o} \quad (10)$$

由于 $C_d[i]$ 为个体 $\mathbf{P}[i]$ 在决策空间的拥挤度, ρ_d 为决策空间的整体拥挤度, 因此, $C_d[i]/\rho_d$ 可视作 $\mathbf{P}[i]$ 在决策空间的拥挤度相对值. 同理, $C_o[i]/\rho_o$ 可视作 $\mathbf{P}[i]$ 在目标空间的拥挤度相对值. 故采用公式 (10) 定义个体的多样性时, 不会出现由于决策空间和目标空间维度不一致, 以及两个空间各自整体拥挤度不一致而给个体多样性计算带来空间失衡.

总体上, $D[i]$ 的值越小, 表示个体 $\mathbf{P}[i]$ 在决策空间和目标空间所处位置的综合拥挤程度越大, 多样性越差, 反之越好.

2.4 子代生成

为避免单一子代生成算子存在的搜索偏好, MMODE-AID 在子代生成过程中自适应地采用了两个经典 DE 算子, 分别为 DE/rand/1 和 DE/pbest/1.

DE/rand/1 通过在一定范围内随机选择个体进行变异, 具有强大的全局搜索能力, 如公式 (11) 所示:

$$v_i = x_{r_1} + F_1(x_{r_2} - x_{r_3}) \quad (11)$$

其中, x_{r_1} 、 x_{r_2} 和 x_{r_3} 为随机选择的 3 个个体, F_1 为缩放因子.

DE/pbest/1 以最佳个体引导变异, 具有收敛速度快的优点, 如公式 (12) 所示:

$$v_i = x_{\text{best}} + F_1(x_{r_1} - x_{r_2}) \quad (12)$$

其中, x_{r_1} 和 x_{r_2} 为随机选择的 2 个个体, x_{best} 为当前种群中的最佳个体, F_1 为缩放因子.

MMODE-AID 的子代生成过程如算法 1 中第 4–12 行所示: 首先, 依次从当前种群 P 中选择一个个体 $P[i]$ (第 4 行), 若其不属于 P 的第一 Pareto 支配等级 (第 5 行), 则从 P 的非第一 Pareto 支配等级个体中随机选择 3 个 (第 6 行), 采用 DE/rand/1 生成 1 个中间个体, 再通过二项式交叉算子^[29]生成子代个体 $O[i]$ (第 7 行). 若 $P[i]$ 属于 P 的第一 Pareto 支配等级 (第 8 行), 则先从 P 的第一 Pareto 支配等级个体中随机选择 2 个, 并将 P 中适应度最好的个体作为最佳个体 x_{best} (第 9 行), 采用 DE/pbest/1 生成 1 个中间个体, 再同样通过二项式交叉算子生成子代个体 $O[i]$ (第 10 行).

MMODE-AID 基于个体的 Pareto 支配等级自适应选择 DE 算子的原因, 在于对非第一 Pareto 支配等级的个体而言, 其尚未接近 PF , 此时通过随机选择个体采用 DE/rand/1 进行变异, 有利于更好地对各潜在等效 PS 所处的区域进行全局探索. 而当所选个体已处于第一 Pareto 支配等级时, 表示其已具备较好的收敛性, 此时基于适应度最好的个体 x_{best} 采用 DE/pbest/1 进行变异, 有利于更好地对潜在等效 PS 所处的区域进行局部开发.

类似 MMO 领域的常见做法^[40], 个体 $P[i]$ 的适应度 $F[i]$ 定义如下:

$$F[i] = \frac{1}{D[i]} + R[i] \quad (13)$$

其中, $D[i]$ 为 $P[i]$ 的多样性, $R[i]$ 为 $P[i]$ 的收敛性. $R[i]$ 基于 $P[i]$ 在 P 中的 Pareto 支配关系进行评估, $R[i]$ 的值越小, 表示 $P[i]$ 的收敛性越好, 反之越差.

由于 $D[i]$ 在计算过程中考虑了 $P[i]$ 在决策空间和目标空间多样性的动态平衡, 且根据公式 (13), $P[i]$ 的多样性和收敛性越好, 则其适应度越好. 因此, MMODE-AID 所采用的上述子代生成方式有利于得到在决策空间分布、目标空间分布、收敛性这 3 方面均表现优异的子代种群.

2.5 环境选择

MMODE-AID 的环境选择借鉴多目标优化领域经典算法 SPEA2 的做法^[19], 如算法 1 中第 13–20 行所示: 首先, 采用公式 (13) 计算父代种群 P 和子代种群 O 的并集 $P \cup O$ 中各个体的适应度 (第 13 行), 若 $P \cup O$ 中非支配个体数小于等于种群大小 N (第 14 行), 则从 $P \cup O$ 中直接选取适应度最好的 N 个个体作为下一代种群 (第 15 行). 若 $P \cup O$ 中非支配个体数大于 N (第 16 行), 则先将 $P \cup O$ 中所有非支配个体放入集合 Q 中 (第 17 行), 接着在 Q 中计算所有个体的多样性 (第 18 行), 最后选取 Q 中多样性最好的 N 个个体作为下一代种群 (第 19 行).

与 SPEA2 的主要区别在于, MMODE-AID 的环境选择基于本文所提出的个体拥挤度定义和个体多样性计算方式, 以及在此基础上定义的个体适应度. 同样由于在个体多样性的计算过程中考虑了决策空间和目标空间的动态平衡, 且个体的多样性和收敛性越好, 其适应度越好. 因此, 类似子代生成所具备的优点, MMODE-AID 所采用的环境选择方式有利于得到在决策空间分布、目标空间分布、收敛性这 3 方面均表现优异的下一代种群.

2.6 时间复杂度

MMODE-AID 的每轮迭代包括子代生成和环境选择两个方面. 子代生成过程中, 首先需对种群进行非支配排序, 时间复杂度为 $O(MN^2)$, 其中 M 为目标维度, N 为种群大小. 当采用 DE/rand/1 算子生成子代时, 对应时间复杂度为 $O(N)$. 当采用 DE/pbest/1 算子生成子代时, 所需时间主要在于种群中所有个体适应度的计算, 包括所有个体多样性和收敛性的计算. 各个体多样性的计算需先计算其在决策空间和目标空间的拥挤度, 均为 $O(N^2)$, 所有个体多样性的计算则需要花费 $O((D+M)N^2)$, 其中 D 为决策变量维度, 所有个体收敛性的计算需要花费 $O(MN^2)$, 故子

代生成所对应时间复杂度为 $O((D+M)N^2)$. 环境选择过程中同样涉及种群中所有个体适应度的计算, 对应时间复杂度亦为 $O((D+M)N^2)$. 故每轮迭代的总体时间复杂度为 $O((D+M)N^2)$.

3 实验结果与分析

本节在 3 个 MMO 基准测试问题集和 1 个实际应用问题上, 对 MMODE-AID 的性能进行综合分析, 并与 7 个先进的 MMOEA 进行对比.

3.1 实验设计

3.1.1 基准测试问题集

所采用的基准测试问题集包括 CEC 2019 MMOP^[41]、MPolygon^[42]和 HYL^[43]. 其中, CEC 2019 MMOP 是 MMO 领域的经典测试问题集, 包含 16 个 2 目标测试问题和 6 个 3 目标测试问题, 单个测试问题所包含的等效 *PS* 数目最多达到了 27. MPolygon 包含目标数更多的 12 个测试问题, 最大目标数为 8. HYL 包含 5 个测试问题, 每个测试问题的等效 *PS* 均具有无限且非明显分离的特点.

3.1.2 对比算法与参数设置

7 个先进的 MMOEA 被用于与 MMODE-AID 进行对比, 分别为 DN-NSGAI^[34]、MMEA-WI^[15]、MMOEA-GPD^[44]、MO_Ring_PSO_SCD^[45]、MMODE_SPDN^[46]、CEA-LES^[38]和 CMMO^[26]. 其中, DN-NSGAI、MMEA-WI 和 MMOEA-GPD 是在决策空间分别采用 CD、DKN 和 HAD 计算个体多样性的 MMOEA. MO_Ring_PSO_SCD 和 MMODE_SPDN 是分别采用 CD 和 CSCD, 并均基于个体在决策空间和目标空间的拥挤度最大值计算个体多样性的 MMOEA. CEA-LES 是基于个体在决策空间和目标空间的 CD 最大值, 再结合 DKN 计算个体多样性的 MMOEA. CMMO 是基于个体在决策空间和目标空间的 *k*DE 直接相加方式计算个体多样性的 MMOEA.

为确保公平比较, MMODE-AID 与各对比算法在各测试问题上的种群大小和最大评估次数设置, 均参照 MMO 领域的常见做法^[41-43], 如表 1 所示. 其中, *D* 为决策变量维度, *M* 为目标维度. 对于 HYL 中各测试问题, 目标维度不同时, 种群大小和最大评估次数设置亦不同. 对于 CEC 2019 MMOP 和 MPolygon 中的各测试问题, 则不论各测试问题的目标维度为多少, 均采用相同方式设置种群大小和最大评估次数. 各对比算法的特有参数均与原始文献保持一致.

表 1 参数设置

参数	CEC 2019 MMOP	MPolygon	HYL		
			<i>M</i> =2	<i>M</i> =3	<i>M</i> =4
种群大小	100 <i>D</i>	300	100	105	165
最大评估次数	5000 <i>D</i>	10 000	50 000	52 500	82 500

在 Matlab R2021a 平台上运行 MMODE-AID 和各对比算法, 所采用操作系统为 Windows 10, CPU 为 Intel(R) Core(TM) i7-7700H, RAM 为 32 GB.

3.1.3 评价指标

采用 MMO 领域常用的 3 种评价指标, 分别为决策空间中的反向世代距离 (inverted generational distance in the decision Space, *IGDX*)^[47]、目标空间中的反向世代距离 (inverted generational distance in the objective space, *IGDF*)^[48]和 Pareto 解集近似性 (Pareto set proximity, *PSP*)^[45].

IGDX 和 *IGDF* 的计算公式分别如下:

$$IGDX = \frac{\sum_{i=1}^{|PS|} Dist_i}{|PS|} \quad (14)$$

$$IGDF = \frac{\sum_{i=1}^{|PF|} Dist_i}{|PF|} \quad (15)$$

其中, $Dist_i$ 表示第 i 个参考点与算法得到的最近个体间的欧氏距离, $|PS|$ 表示真实 PS 中参考点的个数, $|PF|$ 表示真实 PF 中参考点的个数. $IGDX$ 值越小, 说明算法在决策空间获得的 PS 越好, 即算法在决策空间由多样性和收敛性构成的综合优化性能越好, $IGDF$ 值越小, 说明算法在目标空间获得的 PF 越好, 即算法在目标空间由多样性和收敛性构成的综合优化性能越好.

PSP 的计算公式如下:

$$PSP = \frac{CR}{IGDX} \quad (16)$$

其中, CR 表示算法得到的 PS 覆盖真实 PS 的程度, PSP 值越大, 说明算法得到的 PS 与真实 PS 的相似度越高.

在各测试问题上, 每个算法均运行 30 次, 采用置信水平为 95% 的 Wilcoxon 秩和检验^[49]和 Friedman 检验^[50]对 MMODE-AID 与各对比算法的性能进行衡量, 符号“+”“-”和“=”分别表示对比算法的性能明显优于、劣于和近似于 MMODE-AID. 后文中所有“S”开头的表格均来自本文补充材料, 展示了各算法在各测试问题上的具体运行结果, 详见 <https://github.com/CIA-SZU/ZQ>.

3.2 对比实验

(1) CEC 2019 MMOP 上各算法的实验结果与分析

表 2 为 MMODE-AID 与 7 个对比算法在 CEC 2019 MMOP 的全部 22 个测试问题上, 基于独立运行 30 次得到的平均 $IGDX$ 值、 $IGDF$ 值和 PSP 值, 以及对标准差, 进行秩和检验后的对比结果统计.

表 2 MMODE-AID 与 7 个对比算法在 CEC 2019 MMOP 上获得的运行结果的对比统计

评价指标	DN-NSGAI	MMEA-WI	MMOEA-GPD	MO_Ring_ PSO_SCD	MMODE_SPDN	CEA-LES	CMMO	MMODE-AID
$IGDX$	0/22/0	0/22/0	1/20/1	0/22/0	3/19/0	0/22/0	1/17/4	+/-/=
$IGDF$	0/22/0	0/22/0	1/20/1	0/22/0	0/22/0	0/22/0	0/19/3	+/-/=
PSP	0/22/0	0/22/0	1/21/0	0/22/0	0/19/3	0/22/0	0/20/2	+/-/=

可以看出, MMODE-AID 在绝大部分测试问题上, 均比各对比算法具有相对更好的 $IGDX$ 、 $IGDF$ 和 PSP 结果. 其中, 对于 $IGDX$ 指标, 分别在 22、22、20、22、19、22 和 17 个测试问题上优于各对比算法. 对于 $IGDF$ 指标, 分别在 22、22、20、22、22、22 和 19 个测试问题上优于各对比算法. 对于 PSP 指标, 分别在 22、22、21、22、19、22 和 20 个测试问题上优于各对比算法. 说明本文所提出的 ICNN 和 AID 可以明显提升 MMODE-AID 在 CEC 2019 MMOP 上的综合优化性能.

从表 S1-S3 则可看出, 在所有对比算法中, MMODE_SPDN 在 MMF2 和 MMF3 上获得了最佳的 $IGDX$ 结果, 原因在于其引入了串并联组合策略和 3 种邻域突变算子, 在解决决策空间中多维度重叠且无拐点的 MMF2 和 MMF3 上具有优越的竞争力. CMMO 在 MMF10 上获得了最佳的 $IGDX$ 结果, 原因在于其所采用的收敛松弛技术, 可更准确地定位决策空间低固有维数且 PS 呈长直线特征的 MMF10. MMOEA-GPD 在 MMF14_a 上获得了最佳的 $IGDX$ 和 PSP 结果, 原因在于其所提出的 3 阶段协同优化机制有利于更好地探索三维决策空间中 PS 具有弯曲特性的 MMF14_a. MMOEA-GPD 则在 MMF7 上获得了最佳的 $IGDF$ 结果, 原因在于其所提出的 3 阶段协同优化机制所采用搜索策略, 亦有利于解决决策空间 PS 波动明显且目标空间 PF 为凸型的 MMF7.

为更直观地呈现 MMODE-AID 的优势, 图 4 和图 5 分别展示了 MMODE-AID 与各对比算法在 Omni_test 测试问题上, 在决策空间和目标空间的实际运行结果. Omni_test 是 CEC 2019 MMOP 中优化难度最大的测试问题, 含有 27 个等效 PS , 且所有等效 PS 在每个决策变量维度上均重叠. 从图 4 可以看出, MMODE-AID 与 CEA-LES 均成功找到了决策空间中所有的等效 PS , 但 CEA-LES 的收敛性不如 MMODE-AID, 而其他算法均未能找全所有等效 PS . 从图 5 可以看出, MMODE-AID 得到的解均匀地分布在 PF 上, 而其他算法要么尚未收敛, 要么未能均匀地分布在 PF 上. 综上, 说明 MMODE-AID 在 Omni_test 测试问题上相较于各对比算法, 在决策空间和目标空间上具有最佳的综合优化性能.

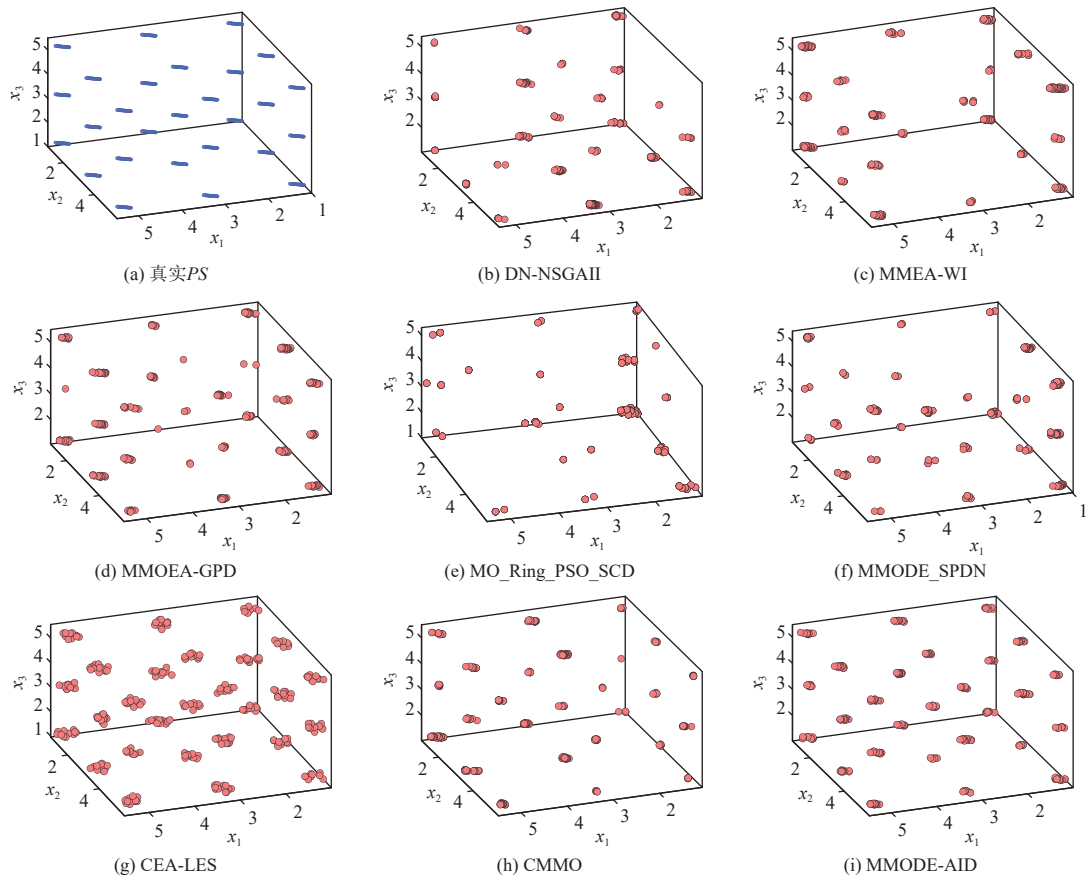


图4 MMODE-AID与7个对比算法在Omni_test测试问题上得到的PS分布

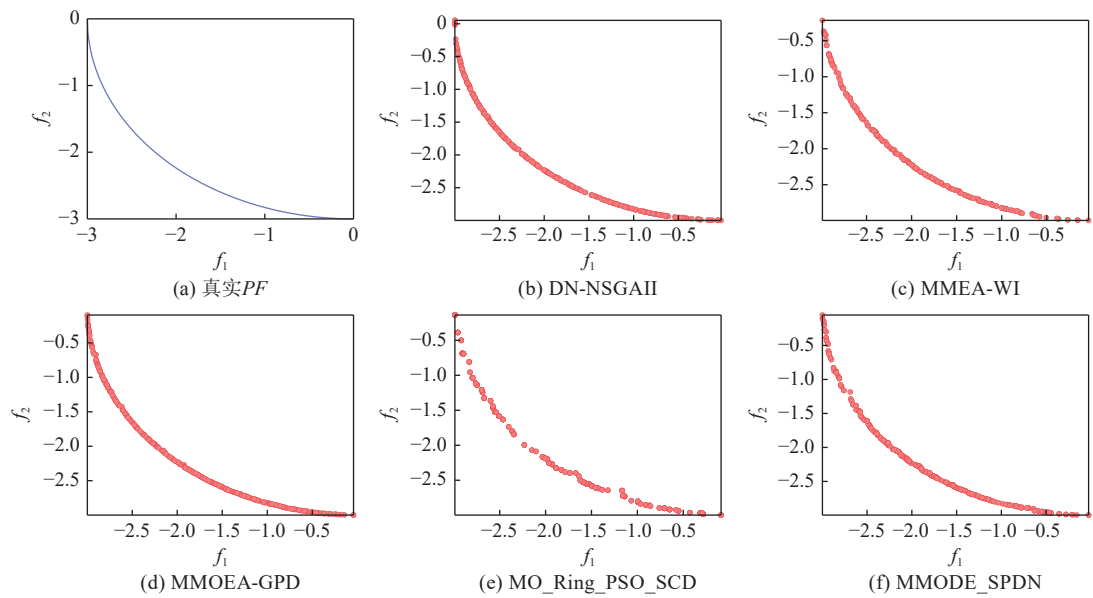


图5 MMODE-AID与7个对比算法在Omni_test测试问题上得到的PF分布

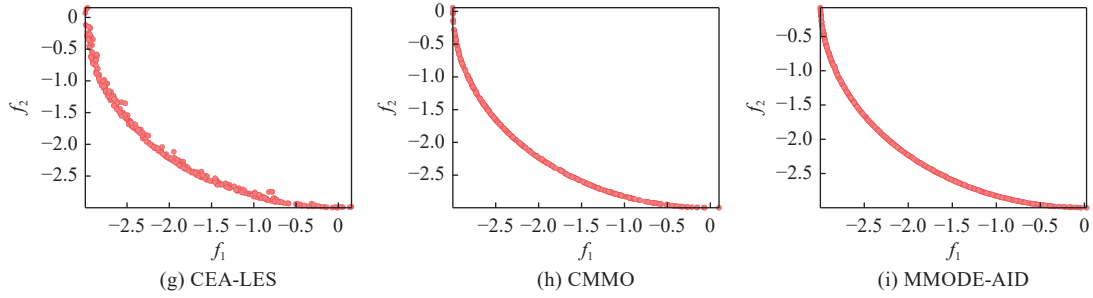


图5 MMODE-AID与7个对比算法在Omni_test测试问题上得到的PF分布(续)

(2) MPolygon上各算法的实验结果与分析

表3为MMODE-AID与7个对比算法在MPolygon的全部12个测试问题上,基于独立运行30次得到的平均IGDX值、IGDF值和PSP值,以及对应标准差,进行秩和检验后的对比结果统计.

表3 MMODE-AID与7个对比算法在MPolygon上获得运行结果的对比统计

评价指标	DN-NSGAI	MMEA-WI	MMOEA-GPD	MO_Ring_PSO_SCD	MMODE_SPDN	CEA-LES	CMMO	MMODE-AID
IGDX	0/12/0	0/12/0	0/12/0	0/12/0	0/12/0	0/12/0	0/11/1	+/-/=
IGDF	0/12/0	0/12/0	0/11/1	1/11/0	0/12/0	0/11/1	0/12/0	+/-/=
PSP	0/12/0	0/12/0	0/12/0	0/12/0	0/12/0	0/12/0	0/11/1	+/-/=

可以看出,MMODE-AID在绝大部分测试问题上,均比各对比算法具有相对更好的IGDX、IGDF和PSP结果.其中,对于IGDX指标,分别在12、12、12、12、12、12和11个测试问题上优于各对比算法.对于IGDF指标,分别在12、12、11、11、12、11和12个测试问题上优于各对比算法.对于PSP指标,分别在12、12、12、12、12、12和11个测试问题上优于各对比算法.同样说明本文所提出的ICNN和AID可以明显提升MMODE-AID在MPolygon上的综合优化性能.

从表S4-S6则可看出,在所有对比算法中,MO_Ring_PSO_SCD在最简单的MPolygon1测试问题上获得了最佳的IGDF结果,原因在于其采用环形拓扑进行搜索,有利于在决策空间和目标空间的维度均很低时搜索到更多等效PS.

图6和图7分别展示了MMODE-AID与各对比算法在MPolygon12测试问题上,在决策空间和目标空间的实际运行结果.MPolygon12是MPolygon中优化难度最大的测试问题,包括8个目标函数,且每个等效PS均为八边形.从图6可以看出,MMODE-AID能更好地收敛至各真实八边形PS上并均匀分布.从图7可以看出,MMODE-AID具有最好的收敛性,且得到的解均匀地分布在PF上.综上,说明MMODE-AID在MPolygon12测试问题上相较于各对比算法,在决策空间和目标空间上具有最优的综合优化性能.

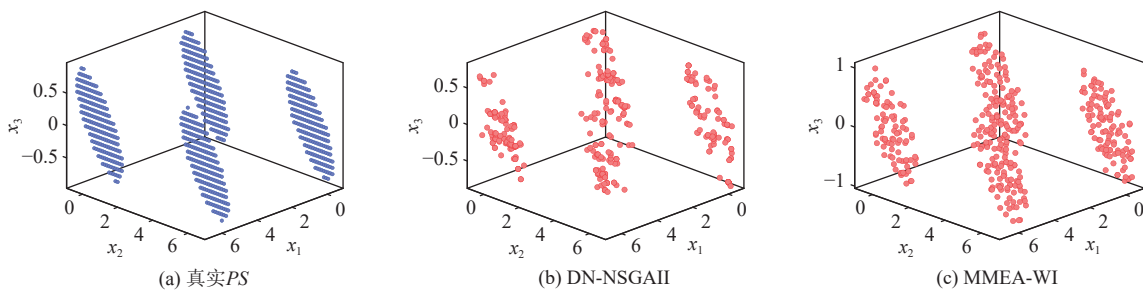


图6 MMODE-AID与7个对比算法在MPolygon12测试问题上得到的PS分布

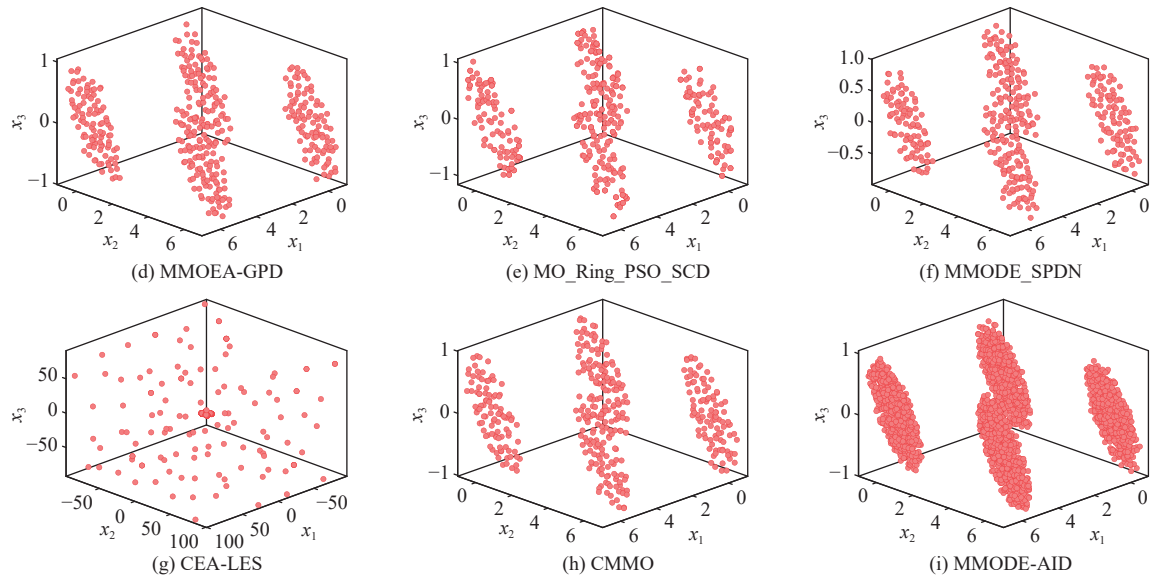


图6 MMODE-AID与7个对比算法在MPolygon12测试问题上得到的PS分布(续)

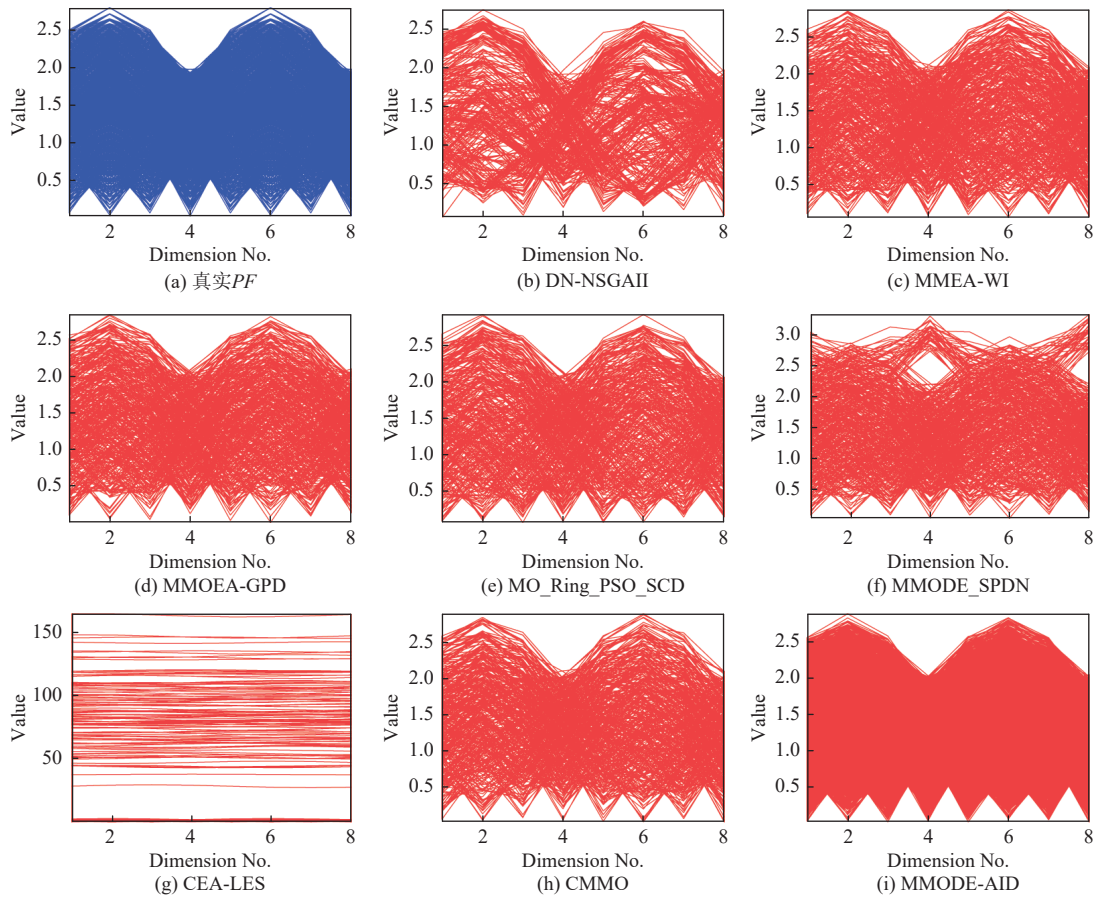


图7 MMODE-AID与7个对比算法在MPolygon12测试问题上得到的PF分布

(3) HYL 上各算法的实验结果与分析

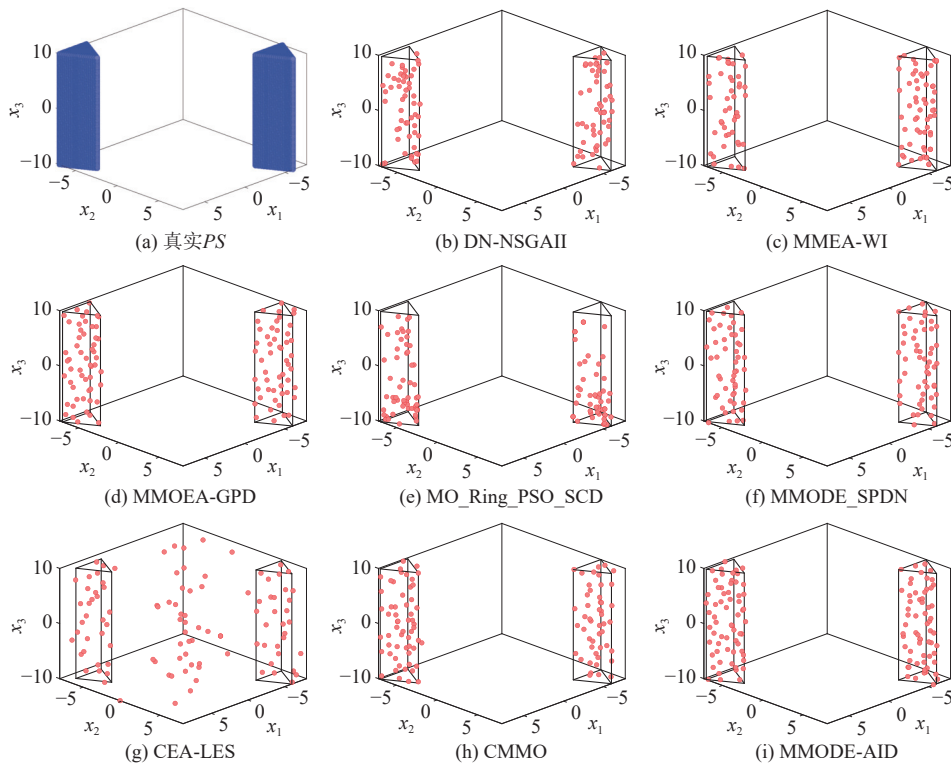
表 4 为 MMODE-AID 与 7 个对比算法在 HYL 的全部 5 个测试问题上, 基于独立运行 30 次得到的平均 $IGDX$ 值、 $IGDF$ 值和 PSP 值, 以及对应标准差, 进行秩和检验后的对比结果统计.

表 4 MMODE-AID 与 7 个对比算法在 HYL 上获得运行结果的对比统计

评价指标	DN-NSGAI	MMEA-WI	MMOEA-GPD	MO_Ring_PSO_SCD	MMODE_SPDN	CEA-LES	CMMO	MMODE-AID
$IGDX$	0/5/0	0/5/0	0/5/0	0/5/0	0/5/0	0/5/0	0/5/0	+/-/=
$IGDF$	0/5/0	0/5/0	0/5/0	0/5/0	0/5/0	0/5/0	0/5/0	+/-/=
PSP	0/5/0	0/5/0	0/5/0	0/5/0	0/5/0	0/5/0	0/5/0	+/-/=

可以看出, MMODE-AID 在所有测试问题上, 均比各对比算法具有相对更好的 $IGDX$ 、 $IGDF$ 和 PSP 结果. 亦说明本文所提出的 ICNN 和 AID 可以明显提升 MMODE-AID 在 HYL 上的综合优化性能.

图 8 和图 9 分别展示了 MMODE-AID 与各对比算法在 HYL3 测试问题上, 在决策空间和目标空间的实际运行结果. HYL3 是 HYL 中优化难度最大的测试问题, 其 PS 由两个三棱柱构成. 从图 8 可以看出, 各算法都可以找到所有 PS 的位置, 说明各算法在决策空间均具有良好的收敛性. 但 MMODE-AID 具有明显更好的多样性. 从图 9 可以看出, MMODE-AID 亦具有最好的收敛性, 且得到的解均匀地分布在 PF 上. 综上, 说明 MMODE-AID 在 HYL3 测试问题上相较于各对比算法, 在决策空间和目标空间上也具有最优的综合优化性能.

图 8 MMODE-AID 与 7 个对比算法在 HYL3 测试问题上得到的 PS 分布

为进一步直观呈现 MMODE-AID 和各对比算法在全部 3 个测试问题集上的整体优化性能对比, 图 10 列出了 MMODE-AID 和各对比算法在各测试问题集上 30 次独立运行的平均 $IGDX$ 、 $IGDF$ 和 PSP 结果的 Friedman 检验排名. Friedman 检验排名结果值越小, 相应算法的综合优化性能越好.

可以看到, 在各测试问题集的各评价指标上, MMODE-AID 的 Friedman 检验排名结果值均最小, 且在全部测

试问题集上在各评价指标上的总排名, MMODE-AID 的 Friedman 检验排名结果值亦最小, 说明 MMODE-AID 的综合优化性能最好.

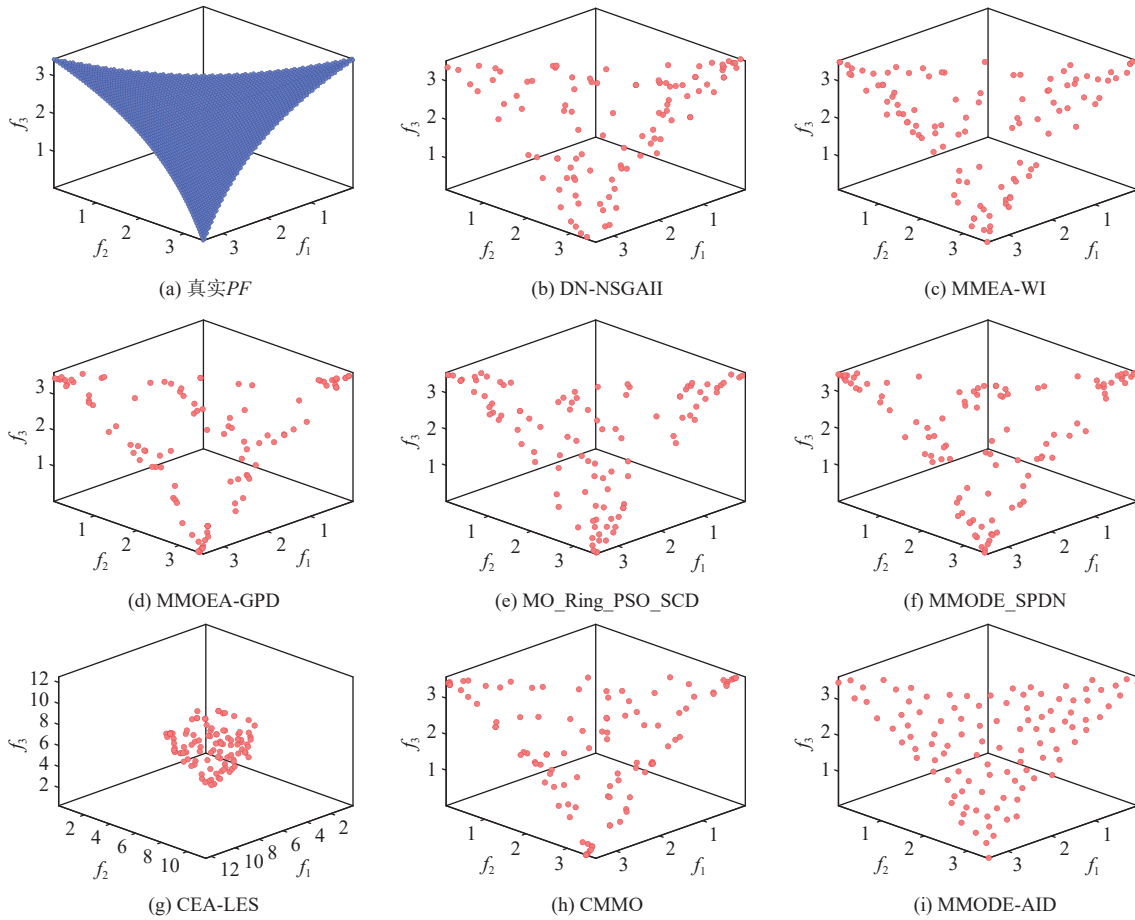


图9 MMODE-AID 与 7 个对比算法在 HYL3 测试问题上得到的 PF 分布

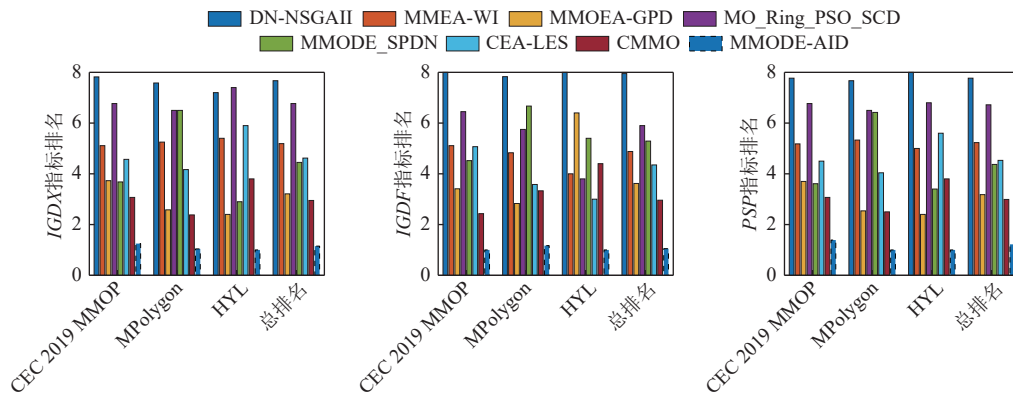


图10 MMODE-AID 与 7 个对比算法在全部 3 个测试问题集上得到的指标排名

3.3 消融实验

为分析 MMODE-AID 所采用各种优化策略对其性能的影响程度, 对 MMODE-AID 开展消融实验. 除明确提

到的差异之外,各变种算法的其他部分均与 MMODE-AID 保持一致. 其中,变种算法 MMODE-AID-v1 将 ICNN 中两个个体相对距离的计算直接定义为这两个个体的绝对距离与 r_d 的商, MMODE-AID-v2 将 ICNN 中相对距离的累乘改为累加, MMODE-AID-v3 将个体的多样性改为个体在决策空间拥挤度和目标空间拥挤度之和, MMODE-AID-v4 将子代生成过程中的自适应 DE 改成 DE/rand/1, MMODE-AID-v5 则将子代生成过程中的自适应 DE 改成 DE/pbest/1.

表 5 为 MMODE-AID 与各变种算法在全部 3 个测试问题集上,基于独立运行 30 次得到的平均 $IGDX$ 值、 $IGDF$ 值和 PSP 值,以及对应标准差,进行秩和检验后的对比结果统计. 可以看出,各变种算法在各评价指标上的性能,均明显弱于 MMODE-AID,说明 MMODE-AID 所采用的各种优化策略,对于提升 MMODE-AID 在决策空间和目标空间的综合优化性能,均具有重要作用.

表 5 MMODE-AID 与 5 个变种算法在全部 3 个测试问题集上获得运行结果的对比统计

测试问题集	评价指标	MMODE-AID-v1	MMODE-AID-v2	MMODE-AID-v3	MMODE-AID-v4	MMODE-AID-v5	MMODE-AID
CEC 2019 MMOP	$IGDX$	0/22/0	0/22/0	1/19/2	0/19/3	0/20/2	+/-/=
	$IGDF$	0/22/0	0/22/0	0/20/2	1/13/8	0/13/9	+/-/=
	PSP	0/22/0	0/22/0	1/20/1	0/19/3	0/21/1	+/-/=
MPolygon	$IGDX$	0/12/0	0/12/0	0/12/0	0/11/1	1/9/2	+/-/=
	$IGDF$	0/12/0	1/11/0	0/12/0	1/10/1	0/11/1	+/-/=
	PSP	0/12/0	0/12/0	0/12/0	0/12/0	0/10/2	+/-/=
HYL	$IGDX$	0/5/0	0/5/0	0/5/0	1/2/2	0/5/0	+/-/=
	$IGDF$	0/5/0	0/4/1	0/4/1	0/4/1	0/2/3	+/-/=
	PSP	0/5/0	0/5/0	0/5/0	0/3/2	0/5/0	+/-/=

为更直观地呈现消融实验效果,图 11-图 13 分别在各测试问题集的代表性测试问题 Omni_test、MPolygon12 和 HYL3 上,独立运行 30 次的平均 $IGDX$ 、 $IGDF$ 和 PSP 结果变化趋势. 可以看出, MMODE-AID 在各测试问题上,均获得了最好的运行结果.

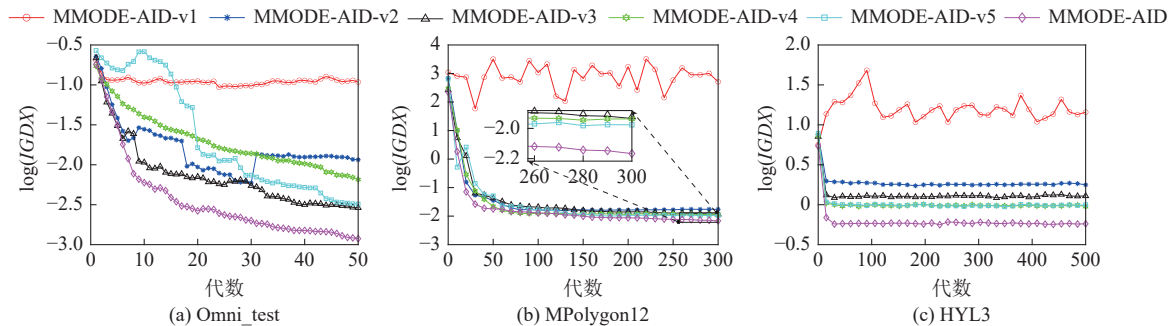


图 11 MMODE-AID 与 5 个变种算法在 3 个代表性测试问题上得到的 $IGDX$ 均值变化趋势

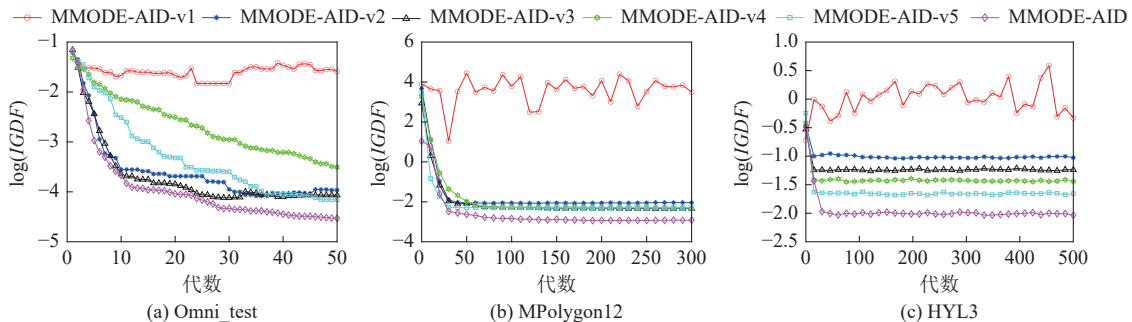


图 12 MMODE-AID 与 5 个变种算法在 3 个代表性测试问题上得到的 $IGDF$ 均值变化趋势

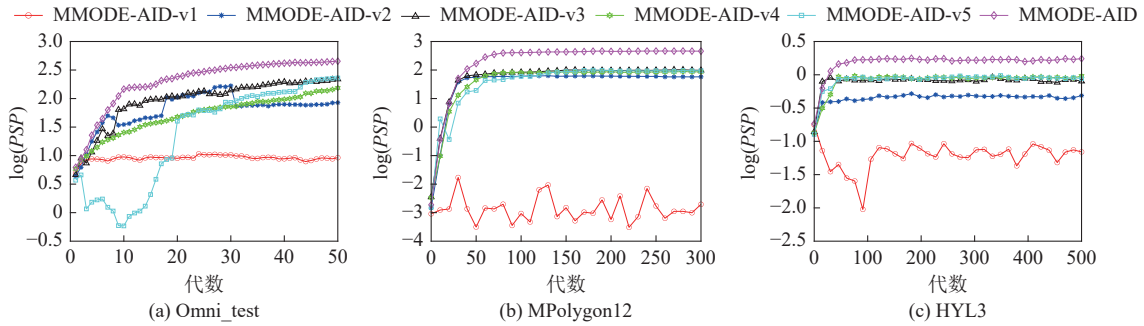


图 13 MMODE-AID 与 5 个变种算法在 3 个代表性测试问题上得到的 PSP 均值变化趋势

3.4 策略有效性

MMODE-AID 的核心优化策略是基于个体拥挤度 ICNN 的自适应个体多样性计算 AID. 为进一步分析该策略的有效性, 用 AID 策略替换 4 个代表性多模态多目标进化算法 DN-NSGAI, MMEA-WI, MMOEA-GPD 和 MO_Ring_PSO_SCD 中原有的多样性计算方式, 各原始算法的其余部分保持不变, 对应的变种算法分别称为 DN-NSGAI-AID, MMEA-WI-AID, MMOEA-GPD-AID 和 MO_Ring_PSO_SCD-AID.

表 6 为各原始算法与对应变种算法在全部 3 个测试问题集上, 基于独立运行 30 次得到的平均 $IGDX$ 值、 $IGDF$ 值和 PSP 值, 以及对标准差, 进行秩和检验后的两两对比结果统计. 可以看出, 在采用 AID 后, 4 个变种算法在大部分测试问题上均获得了比原始算法更好的优化性能, 说明 MMODE-AID 所采用的 AID 对于提升各类 MMOEA 的性能均具有理想的效果.

表 6 4 个代表算法及对应变种算法在 3 个测试问题集上获得运行结果的对比统计

测试问题集	评价指标	DN-NSGAI	DN-NSGAI-AID	MMEA-WI	MMEA-WI-AID	MMOEA-GPD	MMOEA-GPD-AID	MO_Ring_PSO_SCD	MO_Ring_PSO_SCD-AID
CEC 2019	$IGDX$	0/22/0	+/-/=	0/22/0	+/-/=	3/17/2	+/-/=	1/20/1	+/-/=
	$IGDF$	0/22/0	+/-/=	0/21/1	+/-/=	1/20/1	+/-/=	0/21/1	+/-/=
	PSP	0/22/0	+/-/=	0/20/2	+/-/=	3/17/2	+/-/=	1/21/0	+/-/=
MPolygon	$IGDX$	0/12/0	+/-/=	0/10/2	+/-/=	1/10/1	+/-/=	0/12/0	+/-/=
	$IGDF$	0/12/0	+/-/=	0/12/0	+/-/=	0/11/1	+/-/=	0/10/2	+/-/=
	PSP	0/12/0	+/-/=	0/10/2	+/-/=	1/9/2	+/-/=	0/11/1	+/-/=
HYL	$IGDX$	0/5/0	+/-/=	0/5/0	+/-/=	0/5/0	+/-/=	0/5/0	+/-/=
	$IGDF$	0/5/0	+/-/=	0/5/0	+/-/=	0/4/1	+/-/=	0/5/0	+/-/=
	PSP	0/5/0	+/-/=	0/5/0	+/-/=	0/5/0	+/-/=	0/5/0	+/-/=

图 14-图 16 分别采用 $IGDX$ 、 $IGDF$ 和 PSP , 以柱状图形式直观呈现了 DN-NSGAI、MMEA-WI、MMOEA-GPD、MO_Ring_PSO_SCD 及其对应的 AID 变种算法在 3 个代表性测试问题 Omni_test、MPolygon12 和 HYL3 上独立运行 30 次所得平均运行结果的对比. 可以看出, 采用了 AID 策略的各变种算法在各个评价指标上均获得了更好的优化结果.

3.5 运行时间对比

为进一步衡量 MMODE-AID 与 7 个对比算法在各测试问题上所需运行时间的对比, 图 17 呈现了 MMODE-AID 与 7 个对比算法在全部 3 个测试问题集上独立运行 30 次后, 基于在各测试问题上的运行时间, 通过 Friedman 检验在各测试问题集, 以及全部测试问题上得到的总体排名. 结果显示, DN-NSGAI 在各测试问题集及全部测试问题上的总体运行时间均最短, 而 MMODE_SPDN 在各测试问题集及全部测试问题上的总体运行时间均最长. 原因在于 DN-NSGAI 中个体多样性的计算只基于决策空间中各个体的 CD 值, 计算量相对较少, 因此运行时间相对较短. 而 MMODE_SPDN 采用了串并行组合的多存档协同更新机制, 在每轮迭代中需要处理远超单一存档算法的

计算量, 导致其运行时间显著增加. 对于 MMODE-AID 而言, 尽管其自适应个体多样性的计算同时涉及决策空间和目标空间, 但从图 17 可以看出, 其在所有对比算法中仅次于 DN-NSGAI, 说明 MMODE-AID 在运行时间上亦具有较好的比较优势.

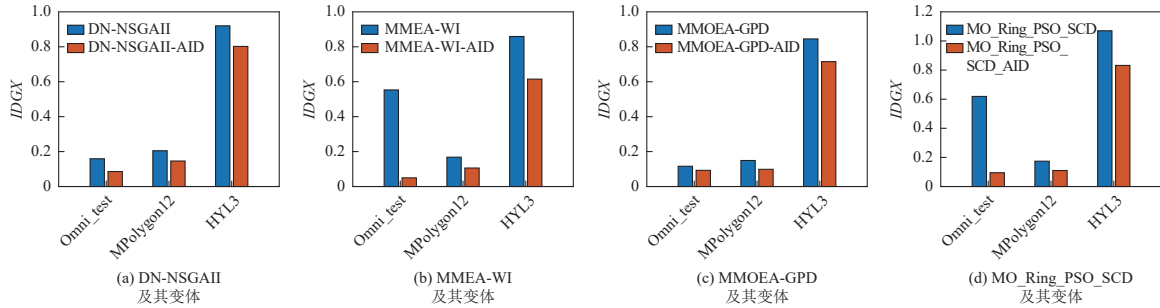


图 14 4 个代表算法及对应变种算法在 3 个代表性测试问题上的 $IGDX$ 均值对比

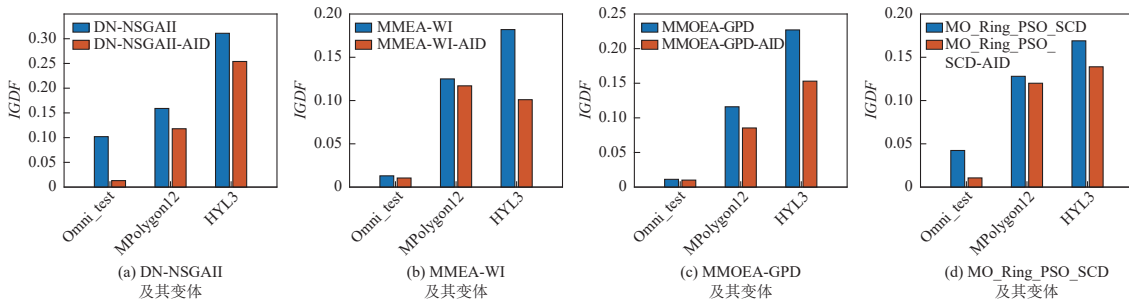


图 15 4 个代表算法及对应变种算法在 3 个代表性测试问题上的 $IGDF$ 均值对比

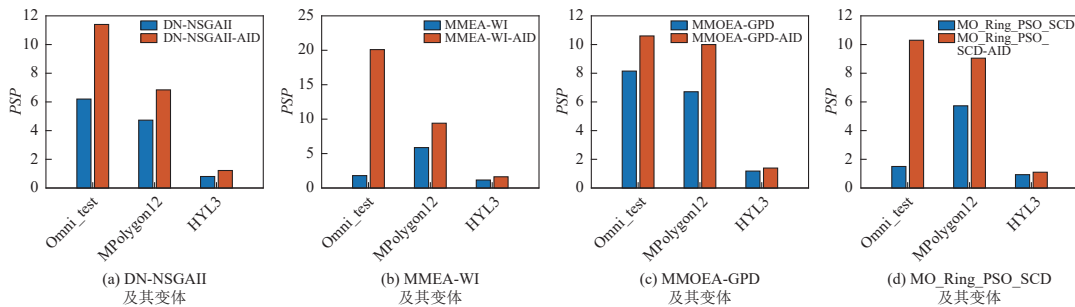


图 16 4 个代表算法及对应变种算法在 3 个代表性测试问题上的 PSP 均值对比

3.6 实际问题实验

为进一步验证 MMODE-AID 在解决实际问题时的效果, 在真实地图问题^[51]上, 对 MMODE-AID 和各对比算法的性能进行比较. 该问题基于一张真实地图构建, 包含 6 所小学、3 所初中、13 家便利店和 3 个火车站, 核心需求是在地图上寻找多个等效最优的起始位置, 使得到最近的上述 4 类目的地的距离最小, 详细信息请参阅文献^[51].

表 7 为 MMODE-AID 与各算法在该实际问题上的, 独立运行 30 次的 $IGDX$ 、 $IGDF$ 和 PSP 的均值和标准差 (括号中的值). 可以看出, MMODE-AID 在该问题上的表现均优于其他对比算法, 说明本文所提出的 ICNN 和 AID 可以明显提升 MMODE-AID 在真实地图问题上的综合优化性能.

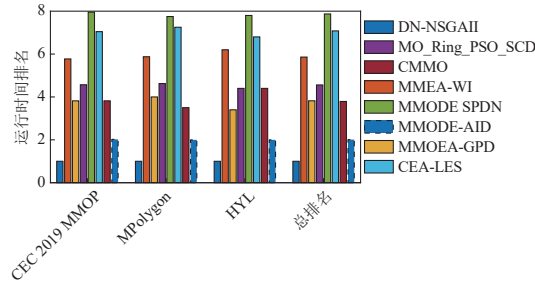


图 17 MMODE-AID 与 7 个对比算法在各测试问题集上得到的运行时间排名

表 7 MMODE-AID 与 7 个对比算法在真实地图问题上获得的运行结果对比

评价指标	DN-NSGAI	MMEA-WI	MMOEA-GPD	MO_Ring_PSO_SCD	MMODE_SP DN	CEA-LES	CMMO	MMODE-AID
<i>IGDX</i>	1.3342E+0 (2.48E-1)–	9.5534E-1 (2.96E-1)–	7.5598E-1 (1.65E-2)–	1.0415E+0 (3.53E-2)–	8.6243E-1 (6.85E-2)–	1.8327E+0 (4.89E-2)–	7.4690E-1 (1.14E-2)–	7.1795E-1 (1.47E-2)
<i>IGDF</i>	1.6543E+0 (2.28E-1)–	1.1885E+0 (2.34E-1)–	9.8402E-1 (2.04E-2)–	1.3238E+0 (3.96E-2)–	1.1274E+0 (9.01E-2)–	9.5747E-1 (1.45E-2)–	9.5747E-1 (1.45E-2)–	9.2040E-1 (1.70E-2)
<i>PSP</i>	7.2414E-1 (1.13E-1)–	1.0773E+0 (2.28E-1)–	1.3198E+0 (3.00E-2)–	9.5564E-1 (3.35E-2)–	1.1661E+0 (8.78E-2)–	5.4600E-1 (1.44E-2)–	1.3281E+0 (2.21E-2)–	1.3751E+0 (2.72E-2)

图 18 展示了 MMODE-AID 与各对比算法在真实地图问题上, 在决策空间的实际运行结果. 图 19 以放大形式更清晰地呈现了各算法在关键区域的优化结果. 图中红色菱形表示小学的位置, 蓝色六角形表示初中的位置, 绿色方框表示便利店的位置, 黄色三角形表示火车站的位置. 图 18(a) 中的蓝色圆形表示真实最优解, 图 18(b)–(i) 中的红色圆形表示各算法得到的最优解. 与此同时, 由于同时包括教育、生活服务等多种功能设施的密集区域可更好地检验各算法在多类型设施布局场景下的优化能力, 选取同时包含小学、初中及便利店的密集区域作为关键区域. 结合图 18 和图 19 可以看出, MMODE-AID 既具有最好的收敛性, 且得到的解均匀分布在各 *PS* 上.

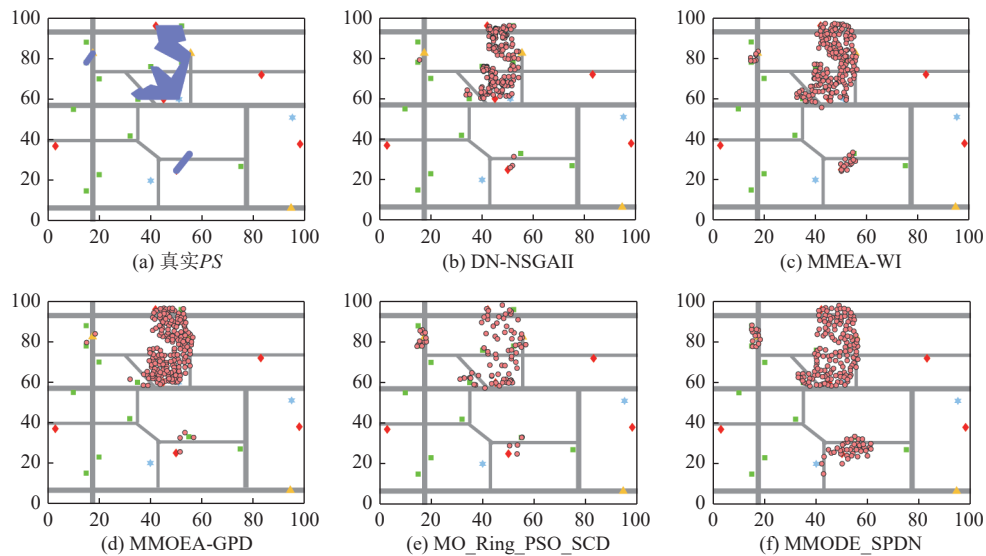


图 18 MMODE-AID 与 7 个对比算法在真实地图问题上得到的 *PS* 分布

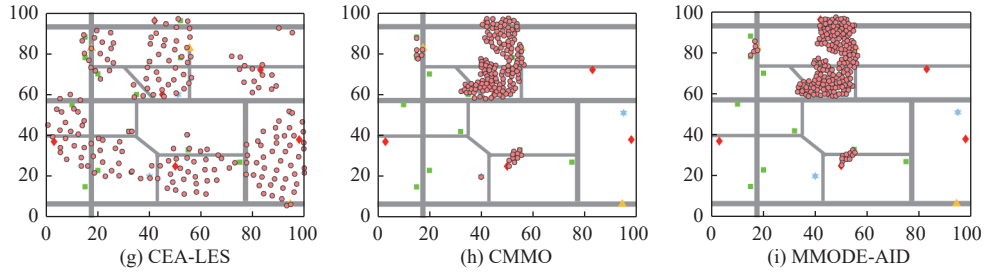
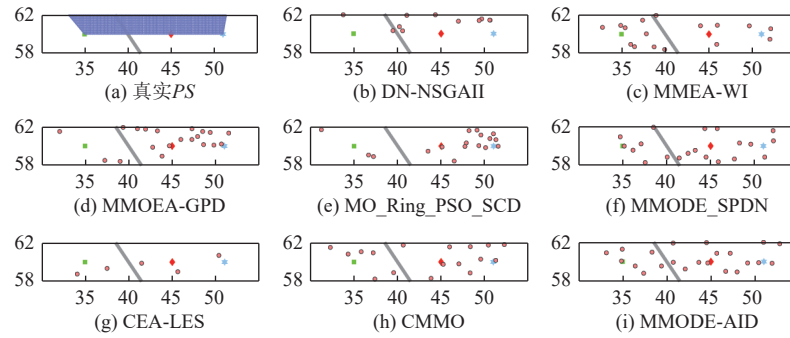
图 18 MMODE-AID 与 7 个对比算法在真实地图问题上得到的 PS 分布 (续)

图 19 MMODE-AID 与 7 个对比算法在真实地图问题上得到的关键区域放大图

综上,说明 MMODE-AID 在真实地图问题上相较于各对比算法具有最优的综合优化性能.

4 结论

针对现有 MMOEA 在个体拥挤度定义和个体多样性计算方面存在的不足,本文提出了一种个体多样性自适应的多模态多目标差分进化算法 MMODE-AID. 其中,在个体拥挤度定义方面,基于个体在决策空间或目标空间的最近邻平均距离,通过个体间相对距离的累乘,定义个体在相应空间的拥挤度,避免对边界的过度敏感,可更合理地衡量各个体在相应空间的真实拥挤程度. 在个体多样性计算方面,基于决策空间和目标空间各自的整体拥挤度,得到个体在相应空间的拥挤度相对值,可根据问题特性自适应调整决策空间和目标空间的占比权重,从而合理地动态平衡决策空间和目标空间当前状态对个体多样性计算的影响,有利于各等效 PS 的充分搜索. 实验结果表明,相比其他 MMOEA, MMODE-AID 具有明显更好的综合优化性能.

未来工作中,我们将进一步研究如何自适应地设置个体适应度计算时多样性和收敛性的占比,以在 MMO 场景下更合理地评估个体适应度,从而更好地提升子代生成和环境选择时种群的质量. 与此同时,如何结合更多实际 MMOP 的不同特点,对 MMODE-AID 进行针对性改进,以进一步提升在各类实际问题上的优化性能,亦需开展深入研究.

References

- [1] Liu YP, Xu LT, Han YY, Zeng XX, Yen GG, Ishibuchi H. Evolutionary multimodal multiobjective optimization for traveling salesman problems. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 2024, 28(2): 516–530. [doi: 10.1109/TEVC.2023.3239546]
- [2] Liang J, Yang JT, Yue CT, Bi Y, Yu KJ, Qu BY. A joint-encoding evolutionary algorithm for multimodal multiobjective feature selection in classification. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 2025, 29(6): 2834–2848. [doi: 10.1109/TEVC.2025.3529977]
- [3] Zhang H, Ma LB, Wang JY, Wang L. Furnace-grouping problem modeling and multi-objective optimization for special aluminum. *IEEE Trans. on Emerging Topics in Computational Intelligence*, 2022, 6(3): 544–555. [doi: 10.1109/TETCI.2021.3051973]
- [4] Zheng WJ, Doerr B. Theoretical analyses of multiobjective evolutionary algorithms on multimodal objectives. *Evolutionary Computation*, 2023, 31(4): 337–373. [doi: 10.1162/evco_a_00328]

- [5] Li WH, Zhang T, Wang R, Huang SJ, Liang J. Multimodal multi-objective optimization: Comparative study of the state-of-the-art. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2023, 77: 101253. [doi: [10.1016/j.swevo.2023.101253](https://doi.org/10.1016/j.swevo.2023.101253)]
- [6] Gao WF, Liu LL, Wang ZK, Gong MG. Survey on multiobjective optimization evolutionary algorithm based on decomposition. *Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software*, 2023, 34(10): 4743–4771 (in Chinese with English abstract). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/6672.htm> [doi: [10.13328/j.cnki.jos.006672](https://doi.org/10.13328/j.cnki.jos.006672)]
- [7] Liang J, Lin HY, Yue CT, Suganthan PN, Wang YN. Multiobjective differential evolution for higher-dimensional multimodal multiobjective optimization. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2024, 11(6): 1458–1475. [doi: [10.1109/JAS.2024.1243777](https://doi.org/10.1109/JAS.2024.1243777)]
- [8] Zhao H, Ning XH, Li JY, Liu J. Evolutionary multi-task framework with bi-knowledge transfer for multimodal optimization problems. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 2025. [doi: [10.1109/TEVC.2025.3551728](https://doi.org/10.1109/TEVC.2025.3551728)]
- [9] He JJ, Yang Q, Xu ZW, Zhang K, Zhang XY, Ge MF. Two-stage multimodal multi-objective evolutionary algorithm based on global density updating strategy. *Scientia Sinica Informationis*, 2024, 54(10): 2385–2408 (in Chinese with English abstract). [doi: [10.1360/SSI-2022-0294](https://doi.org/10.1360/SSI-2022-0294)]
- [10] Zou J, Deng Q, Liu Y, Yang XJ, Yang SX, Zheng JH. A dynamic-niching-based Pareto domination for multimodal multiobjective optimization. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 2024, 28(5): 1529–1543. [doi: [10.1109/TEVC.2023.3316723](https://doi.org/10.1109/TEVC.2023.3316723)]
- [11] Dang QL, Zhang GH, Wang L, Yu Y, Yang S, He XY. Transformer-based intelligent prediction model for multimodal multi-objective optimization. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 2025, 20(1): 34–49. [doi: [10.1109/MCI.2024.3486284](https://doi.org/10.1109/MCI.2024.3486284)]
- [12] Gao WF, Xu W, Gong MG, Yen GG. A decomposition-based evolutionary algorithm using an estimation strategy for multimodal multi-objective optimization. *Information Sciences*, 2022, 606: 531–548. [doi: [10.1016/j.ins.2022.05.075](https://doi.org/10.1016/j.ins.2022.05.075)]
- [13] Xiong MH, Xiong W, Liu Z, Liu YL, Han C. A multi-modal multi-objective evolutionary algorithm based on dual decomposition and subset selection. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2024, 84: 101431. [doi: [10.1016/j.swevo.2023.101431](https://doi.org/10.1016/j.swevo.2023.101431)]
- [14] Hu TH, Wang XP, Tang LX, Zhang QF. A clustering-assisted adaptive evolutionary algorithm based on decomposition for multimodal multiobjective optimization. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2024, 91: 101691. [doi: [10.1016/j.swevo.2024.101691](https://doi.org/10.1016/j.swevo.2024.101691)]
- [15] Li WH, Zhang T, Wang R, Ishibuchi H. Weighted indicator-based evolutionary algorithm for multimodal multiobjective optimization. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 2021, 25(6): 1064–1078. [doi: [10.1109/TEVC.2021.3078441](https://doi.org/10.1109/TEVC.2021.3078441)]
- [16] Li WH, Ming MJ, Zhang T, Wang R, Huang SJ, Wang L. Multimodal multi-objective evolutionary algorithm considering global and local Pareto fronts. *Acta Automatica Sinica*, 2023, 49(1): 148–160 (in Chinese with English abstract). [doi: [10.16383/j.aas.c220476](https://doi.org/10.16383/j.aas.c220476)]
- [17] Xie YH, Li JH, Li YF, Zhu WH, Dai CQ. Two-stage evolutionary algorithm with fuzzy preference indicator for multimodal multi-objective optimization. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2024, 85: 101480. [doi: [10.1016/j.swevo.2024.101480](https://doi.org/10.1016/j.swevo.2024.101480)]
- [18] Deb K, Pratap A, Agarwal S, Meyarivan T. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 2002, 6(2): 182–197. [doi: [10.1109/4235.996017](https://doi.org/10.1109/4235.996017)]
- [19] Zitzler E, Laumanns M, Thiele L. SPEA2: Improving the strength Pareto evolutionary algorithm. Technical Report, TIK Report 103, ETH Zurich, 2001.
- [20] Liu YP, Ishibuchi H, Yen GG, Nojima Y, Masuyama N. Handling imbalance between convergence and diversity in the decision space in evolutionary multi-modal multi-objective optimization. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 2020, 24(3): 551–565. [doi: [10.1109/TEVC.2019.2938557](https://doi.org/10.1109/TEVC.2019.2938557)]
- [21] Huang VL, Suganthan PN, Qin AK, Baskar S. Multiobjective differential evolution with external archive and harmonic distance-based diversity measure. Technical Report, School of Electrical and Electronic Engineering, Nanyang Technological University, 2008.
- [22] Liang J, Qiao KJ, Yue CT, Yu KJ, Qu BY, Xu RH, Li ZM, Hu Y. A clustering-based differential evolution algorithm for solving multimodal multi-objective optimization problems. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2021, 60: 100788. [doi: [10.1016/j.swevo.2020.100788](https://doi.org/10.1016/j.swevo.2020.100788)]
- [23] Pal M, Bandyopadhyay S. Decomposition in decision and objective space for multi-modal multi-objective optimization. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2021, 62: 100842. [doi: [10.1016/j.swevo.2021.100842](https://doi.org/10.1016/j.swevo.2021.100842)]
- [24] Li WH, Yao XY, Zhang T, Wang R, Wang L. Hierarchy ranking method for multimodal multiobjective optimization with local Pareto fronts. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 2023, 27(1): 98–110. [doi: [10.1109/TEVC.2022.3155757](https://doi.org/10.1109/TEVC.2022.3155757)]
- [25] Yu YY, Tang QR, Jiang QC, Fan QQ. A deep reinforcement learning-assisted multimodal multiobjective bilevel optimization method for multirobot task allocation. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 2025, 29(3): 574–588. [doi: [10.1109/TEVC.2025.3535954](https://doi.org/10.1109/TEVC.2025.3535954)]
- [26] Ming F, Gong WY, Wang L, Gao L. Balancing convergence and diversity in objective and decision spaces for multimodal multi-objective optimization. *IEEE Trans. on Emerging Topics in Computational Intelligence*, 2023, 7(2): 474–486. [doi: [10.1109/TETCI.2022.3221940](https://doi.org/10.1109/TETCI.2022.3221940)]
- [27] Zhang GT, Du YH, Zhu XB, Liu XL. Hybrid operator and strengthened diversity improving for multimodal multi-objective optimization. *Tsinghua Science and Technology*, 2024, 29(5): 1409–1421. [doi: [10.26599/TST.2023.9010123](https://doi.org/10.26599/TST.2023.9010123)]

- [28] Storn R, Price K. Differential evolution—A simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*, 1997, 11(4): 341–359. [doi: [10.1023/a:1008202821328](https://doi.org/10.1023/a:1008202821328)]
- [29] Lárraga G, Miettinen K. Survey of interactive evolutionary decomposition-based multiobjective optimization methods. *Evolutionary Computation*, 2025. [doi: [10.1162/evco_a_00366](https://doi.org/10.1162/evco_a_00366)]
- [30] Ji JZ, Wu TX, Yang CC. Multimodal multiobjective differential evolutionary optimization with species conservation. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2024, 54(2): 1299–1311. [doi: [10.1109/TSMC.2023.3325810](https://doi.org/10.1109/TSMC.2023.3325810)]
- [31] Deb K, Tiwari S. Omni-optimizer: A procedure for single and multi-objective optimization. In: *Proc. of the 3rd Int'l Conf. on Evolutionary Multi-criterion Optimization*. Guanajuato: Springer, 2005. 47–61. [doi: [10.1007/978-3-540-31880-4_4](https://doi.org/10.1007/978-3-540-31880-4_4)]
- [32] Zhang WZ, Li GQ, Zhang WW, Liang J, Yen GG. A cluster based PSO with leader updating mechanism and ring-topology for multimodal multi-objective optimization. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2019, 50: 100569. [doi: [10.1016/j.swevo.2019.100569](https://doi.org/10.1016/j.swevo.2019.100569)]
- [33] Lin QZ, Lin W, Zhu ZX, Gong MG, Li JQ, Coello CAC. Multimodal multiobjective evolutionary optimization with dual clustering in decision and objective spaces. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 2021, 25(1): 130–144. [doi: [10.1109/TEVC.2020.3008822](https://doi.org/10.1109/TEVC.2020.3008822)]
- [34] Liang JJ, Yue CT, Qu BY. Multimodal multi-objective optimization: A preliminary study. In: *Proc. of the 2016 IEEE Congress on Evolutionary Computation*. Vancouver: IEEE, 2016. 2454–2461. [doi: [10.1109/CEC.2016.7744093](https://doi.org/10.1109/CEC.2016.7744093)]
- [35] Dang QL, Liu QQ, Yang S, He XY. Data-driven evolutionary algorithm based on inductive graph neural networks for multimodal multi-objective optimization. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 2025. [doi: [10.1109/TEVC.2025.3541046](https://doi.org/10.1109/TEVC.2025.3541046)]
- [36] Han HG, Liu YC, Hou Y, Qiao JF. Multi-modal multi-objective particle swarm optimization with self-adjusting strategy. *Information Sciences*, 2023, 629: 580–598. [doi: [10.1016/j.ins.2023.02.019](https://doi.org/10.1016/j.ins.2023.02.019)]
- [37] Zhao J, Chen FJ, Xiao RB, Wu RX, Pan JS, Wang H, Lee I. Multi-modal multi-objective wolf pack algorithm with circumferential scouting and intra-niche interactions. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2025, 93: 101842. [doi: [10.1016/j.swevo.2024.101842](https://doi.org/10.1016/j.swevo.2024.101842)]
- [38] Wang WL, Li GQ, Wang YL, Wu F, Zhang WW, Li L. Clearing-based multimodal multi-objective evolutionary optimization with layer-to-layer strategy. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2022, 68: 100976. [doi: [10.1016/j.swevo.2021.100976](https://doi.org/10.1016/j.swevo.2021.100976)]
- [39] Ming F, Gong WY, Jin YC. Growing neural gas network-based surrogate-assisted Pareto set learning for multimodal multi-objective optimization. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2024, 87: 101541. [doi: [10.1016/j.swevo.2024.101541](https://doi.org/10.1016/j.swevo.2024.101541)]
- [40] Wu XY, Ming F, Gong WY, Liao BL, Guo YY. Multimodal multi-objective optimization via multi-operator adaptation and clustering-based environmental selection. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2025, 96: 101962. [doi: [10.1016/j.swevo.2025.101962](https://doi.org/10.1016/j.swevo.2025.101962)]
- [41] Liang J, Qu BY, Gong DW, Yue CT. Problem definitions and evaluation criteria for the CEC 2019 special session on multimodal multiobjective optimization. Technical Report, Zhengzhou University, 2019. [doi: [10.13140/RG.2.2.33423.64164](https://doi.org/10.13140/RG.2.2.33423.64164)]
- [42] Ishibuchi H, Peng YM, Shang K. A scalable multimodal multiobjective test problem. In: *Proc. of the 2019 IEEE Congress on Evolutionary Computation*. Wellington: IEEE, 2019. 310–317. [doi: [10.1109/CEC.2019.8789971](https://doi.org/10.1109/CEC.2019.8789971)]
- [43] Ishibuchi H, Peng YM, Pang LM. Multi-modal multi-objective test problems with an infinite number of equivalent Pareto sets. In: *Proc. of the 2022 IEEE Congress on Evolutionary Computation*. Padua: IEEE, 2022. 1–8. [doi: [10.1109/CEC55065.2022.9870307](https://doi.org/10.1109/CEC55065.2022.9870307)]
- [44] Deng SB, Liu HY, Cheng KX, Xu JY, Li M, Rao H. Goal-directed multimodal multi-objective evolutionary algorithm converging on population derivation. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2025, 92: 101796. [doi: [10.1016/j.swevo.2024.101796](https://doi.org/10.1016/j.swevo.2024.101796)]
- [45] Yue CT, Qu BY, Liang J. A multiobjective particle swarm optimizer using ring topology for solving multimodal multiobjective problems. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 2018, 22(5): 805–817. [doi: [10.1109/TEVC.2017.2754271](https://doi.org/10.1109/TEVC.2017.2754271)]
- [46] Peng H, Xia WW, Luo ZT, Deng CS, Wang H, Wu ZJ. A multimodal multi-objective differential evolution with series-parallel combination and dynamic neighbor strategy. *Information Sciences*, 2024, 678: 120999. [doi: [10.1016/j.ins.2024.120999](https://doi.org/10.1016/j.ins.2024.120999)]
- [47] Zhou AM, Zhang QF, Jin YC. Approximating the set of Pareto-optimal solutions in both the decision and objective spaces by an estimation of distribution algorithm. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 2009, 13(5): 1167–1189. [doi: [10.1109/TEVC.2009.2021467](https://doi.org/10.1109/TEVC.2009.2021467)]
- [48] Zitzler E, Thiele L, Laumanns M, Fonseca CM, da Fonseca VG. Performance assessment of multiobjective optimizers: An analysis and review. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 2003, 7(2): 117–132. [doi: [10.1109/TEVC.2003.810758](https://doi.org/10.1109/TEVC.2003.810758)]
- [49] de Capitani L, de Martini D. Reproducibility probability estimation and testing for the Wilcoxon rank-sum test. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 2015, 85(3): 468–493. [doi: [10.1080/00949655.2013.825721](https://doi.org/10.1080/00949655.2013.825721)]
- [50] Friedman M. A comparison of alternative tests of significance for the problem of m rankings. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1940, 11(1): 86–92. [doi: [10.1214/AOMS/1177731944](https://doi.org/10.1214/AOMS/1177731944)]
- [51] Ishibuchi H, Akedo N, Nojima Y. A many-objective test problem for visually examining diversity maintenance behavior in a decision space. In: *Proc. of the 13th Annual Conf. on Genetic and Evolutionary Computation*. Dublin: ACM, 2011. 649–656. [doi: [10.1145/2001576.2001666](https://doi.org/10.1145/2001576.2001666)]

附中文参考文献

- [6] 高卫峰, 刘玲玲, 王振坤, 公茂果. 基于分解的演化多目标优化算法综述. 软件学报, 2023, 34(10): 4743–4771. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/6672.htm> [doi: 10.13328/j.cnki.jos.006672]
- [9] 贺娟娟, 杨倩, 许志伟, 张凯, 张兴义, 葛明峰. 基于全局密度更新策略的两阶段多模态多目标进化算法. 中国科学: 信息科学, 2024, 54(10): 2385–2408. [doi: 10.1360/SSI-2022-0294]
- [16] 李文桦, 明梦君, 张涛, 王锐, 黄生俊, 王凌. 考虑全局和局部帕累托前沿的多模态多目标优化算法. 自动化学报, 2023, 49(1): 148–160. [doi: 10.16383/j.aas.c220476]

作者简介

毛斐巧, 博士, 讲师, CCF 专业会员, 主要研究领域为智能化软件, 计算智能.

周倩, 硕士生, 主要研究领域为计算智能.

侯伟俊, 硕士, 主要研究领域为智能化软件.

曾文君, 硕士生, 主要研究领域为计算智能.

梁正平, 博士, 副教授, CCF 专业会员, 主要研究领域为计算智能, 大数据分析与应用.