软件学报 ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
*Journal of Software*, 2022,33(6):2246−2263 [doi: 10.13328/j.cnki.jos.006580]
©中国科学院软件研究所版权所有.
E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel: +86-10-62562563

# 机器人碰撞检测方法形式化*

陈善言[1,2], 关永[1,2,3], 施智平[1,4], 王国辉[1,5]

[1](首都师范大学 信息工程学院, 北京 100048)
[2](电子系统可靠性与数理交叉学科国家国际科技合作示范型基地(首都师范大学), 北京 100048)
[3](轻型工业机器人与安全验证北京市重点实验室(首都师范大学), 北京 100048)
[4](电子系统可靠性技术北京市重点实验室(首都师范大学), 北京 100048)
[5](高可靠嵌入式系统北京市工程研究中心(首都师范大学), 北京 100048)
通信作者: 关永, E-mail: guanyong@cnu.edu.cn

**摘 要**: 为应对更为复杂的任务需求, 现代机器人产业发展愈发迅猛. 出于协调工作的灵活性、柔顺性以及智能性等多项考虑因素, 多臂/多机器人充分发挥了机器人的强大作用, 成为现代机器人产业的重要研究热点. 在机器人双臂协调运行当中, 机械臂之间以及机械臂与外部障碍物之间容易发生碰撞, 可能会造成财产损失甚至人员伤亡. 对机器人碰撞检测方法进行形式化验证, 以球体和胶囊体形式化模型为基础, 构建基本几何体单元之间最短距离和机器人碰撞的高阶逻辑模型, 证明其相关属性及碰撞条件, 建立机器人碰撞检测方法基础定理库, 为多机系统碰撞检测算法可靠性与稳定性的验证提供技术支撑和验证框架.

**关键词**: 机器人; 碰撞检测; 形式化方法; 定理证明; HOL-Light
**中图法分类号**: TP311

中文引用格式: 陈善言, 关永, 施智平, 王国辉. 机器人碰撞检测方法形式化. 软件学报, 2022, 33(6): 2246–2263. http://www.jos.org.cn/1000-9825/6580.htm
英文引用格式: Chen SY, Guan Y, Shi ZP, Wang GH. Formalization of Collision Detection Method for Robots. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2022, 33(6): 2246–2263 (in Chinese). http://www.jos.org.cn/1000-9825/6580.htm

## Formalization of Collision Detection Method for Robots

CHEN Shan-Yan[1,2], GUAN Yong[1,2,3], SHI Zhi-Ping[1,4], WANG Guo-Hui[1,5]

[1](College of Information Engineering, Capital Normal University, Beijing 100048, China)
[2](International Science and Technology Cooperation Base of Electronic System Reliability and Mathematical Interdisciplinary (Capital Normal University), Beijing 100048, China)
[3](Beijing Key Laboratory of Light Industrial Robot and Safety Verification (Capital Normal University), Beijing 100048, China)
[4](Beijing Key Laboratory of Electronic System Reliability Technology (Capital Normal University), Beijing 100048, China)
[5](Beijing Engineering Research Center of High Reliable Embedded System (Capital Normal University), Beijing 100048, China)

**Abstract**: In order to cope with the demands of more complex tasks, the development of modern robotics industry becomes rapidly. Considering the flexibility, compliance, and intelligence required for coordinated work, multi-arm/multi-robots give full play to the powerful role of robots and become an important research hotspot in the modern robotics industry. In the coordinated operation of the two arms of the robot, collisions between the robot arms and external obstacles are prone to occur, which may cause property damage and even casualties. In this study, a formal verification of the robot collision detection method is carried out. Based on the formal model of sphere

* 基金项目: 国家重点研发计划(2019YFB1309900); 国家自然科学基金(61876111, 61877040, 62002246); 特区项目(18-163-11-ZT-005-038-05); 北京市教委科技计划(KM201910028005, KM202010028010); 中央支持地方建设——“双一流”建设项目(20531120005)
本文由“定理证明理论与应用”专题特约编辑曹钦翔副教授、詹博华副研究员、赵永望教授推荐.
收稿时间: 2021-09-06; 修改时间: 2021-10-28; 采用时间: 2022-01-04; jos 在线出版时间: 2022-01-28

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

and capsule, the shortest distance model of the robot geometric units and the robotic collision model are established. Meanwhile, its related attributes and the collision conditions have been formally verified. Based on the above content, the basic theorem library of robot collision detection has been successfully established, which provides technical support and method reference for further realizing the reliability and stability verification of the collision detection algorithm of the multi-machine system.

**Key words**: robotics; collision detection; formal method; theorem proving; HOL-Light

多臂/多机器人作为现代机器人产业发展的必然产物, 在协调工作领域具有更优的灵活性、柔顺性以及智能性等特点, 能应对更为复杂的任务需求, 充分发挥机器人强大的作用. 在机器人协调运行当中, 机器人之间以及机器人与外部障碍物之间容易发生碰撞, 可能会造成财产损失甚至人员伤亡. 1978 年 9 月, 日本广岛一间工厂的切割机器人将一名值班工人当作钢板切割造成惨案[1]. 2015 年 7 月, 一名 22 岁的技术工在大众汽车包纳塔尔工厂中发生了一台机器人意外伤害致死事件[2]. 据腾讯新闻报道, 2021 年 7 月, 位于伦敦东南部的英国电商 Ocado 仓库发生机器人碰撞事故, 导致了火灾的发生. 由此可见, 碰撞检测是多臂/多机器人应用的关键问题.

关于机器人碰撞检测问题的研究, 通常用抽象、形式化的数学语言建立模型, 再分析论证其性质, 最后在计算机系统中运行. 基于以上分析, 在设计实现一个机器人碰撞检测算法时, 如何保障它的正确性和可靠性? 传统分析验证方法主要基于测试与仿真方法, 由于测试用例与仿真用例受限, 测试与仿真方法均无法完全覆盖所有可能的验证路径[3]. 因此, 这些传统的非完备性验证手段已经无法满足安全攸关系统的机器人协调工作设计对正确性和安全性的要求.

近年来, 针对多臂/多机碰撞检测算法的研究很多, 如基于二维图像空间的算法[4]、基于空间剖分法的算法[5]、GJK 算法[6]、层次包围盒技术[7]等. 但是由于缺乏严格的理论论证, 导致诸多的算法研究仍停留在传统的分析验证方法上. 与传统方法不同, 形式化方法使用严格的数学逻辑分析证明系统的正确性, 对所验证的属性或性质而言是精确而又完备的[8]. 当在交互式定理证明器中进行这样的证明时, 最高置信水平可以通过系统的可靠运行获得. 这是因为, 证明者所密切关注的证明过程只接受一组遵循数学逻辑的最小基本推理步骤.

对于多臂碰撞检测问题来说, 其在数学本质上皆可简化为双臂碰撞检测问题. 因此, 本文针对机器人双臂碰撞检测问题的核心, 即碰撞检测方法, 在高阶逻辑定理证明器 HOL-Light[9]上, 以胶囊体和球体几何体单元建立机器人简化形式化模型. 通过形式化技术, 构建机器人几何体单元之间的最短距离和机器人碰撞模型, 形式化验证其相关属性以及机器人碰撞条件, 建立机器人碰撞检测方法定理证明库, 为实现多机系统的碰撞检测算法的可靠性与稳定性验证提供技术支撑和方法参考, 其验证框架如图 1 所示.

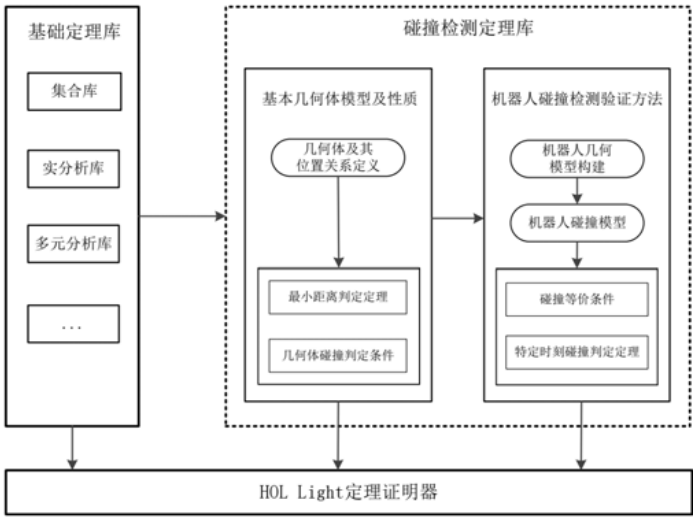


图 1 机器人碰撞检测验证框架

为了增加本文工作的通用性, 我们采用任意 $N$ 维向量的集合表示机器人的几何姿态, 并用集合迭代的方式形式化定义机器人, 从而使得本文工作可适用于任意自由度的任意多个姿态参数的机器人碰撞检测问题. 此外, 本文用可重载方式形式化定义机器人的基本几何体表示, 增加除球体和胶囊体以外的(如长方体)各类不同机器人基本几何体的形式化代码的可扩展性.

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

本文第 1 节介绍机器人碰撞检测算法的相关工作. 第 2 节介绍 HOL-Light 定理证明器和机器人碰撞检测方法的基本流程. 第 3 节介绍基本几何体模型与性质的形式化, 包括几何体模型高阶逻辑表达、最短距离和碰撞条件的形式化. 第 4 节介绍机器人碰撞检测方法的形式化, 包括机器人几何模型构建、碰撞模型高阶逻辑表达及形式化验证. 第 5 节总结全文.

## 1 相关工作

### 1.1 传统碰撞检测算法

碰撞检测算法作为机器人运动控制规划领域研究的关键, 可广泛应用于协调工作、虚拟手术、自动驾驶等领域. 目前常见的碰撞检测算法可根据其检测目标的空间维度划分为图像空间和几何空间两类.

- 基于图像空间的碰撞检测算法的关键在于利用三维物体的二维投影图像的碰撞检测, 例如 Francois 等人[10]提出的处理三角网格特征碰撞检测方法、Qu 等人[11]提出的基于图像处理的人车碰撞检测方法. 这类方法虽然能够缩短计算时间, 但会受限于图像的分辨率, 可能导致不准确碰撞检测结果的产生. 而且这类方法并不适用于检测物体表面存在凹陷的情况;
- 相较于图像空间, 基于几何空间的碰撞检测算法的应用范围更广. 近年来, 常见的基于几何空间的碰撞检测算法可大致分为空间剖分法、GJK 算法、层次包围盒技术和其他融合智能优化算法的群算法[12]. 以赵亮等人[13]提出的一种基于网格包络的碰撞检测算法为例, 这类空间剖分法可在一定程度上处理多个物体的碰撞对, 但在处理过大物体碰撞对规模或复杂物体时具有局限性. 相较于空间剖分法, 以凸体为基础模型的 GJK 算法在处理两个凸体的碰撞检测问题上更具优势. 而层次包围盒技术在机器人碰撞检测问题研究上更为方便, 且计算更为简单. 由于机器人构件的可拆分性, 近年来, 许多学者采用层次包围盒技术分析机器人碰撞检测问题. 2020 年, Huang 等人[14]提出一种基于关键点和关键线段模型的双臂上肢康复机器人自碰撞检测新算法. 随后, 梁孟德[15]提出了以球体和胶囊体表示的机器人关节和连杆的空间机器臂碰撞检测方法. 但是上述传统碰撞检测算法的验证皆停留在数值仿真阶段, 缺乏形式化验证.

### 1.2 形式化方法在机器人验证领域的应用

机器人系统作为当前最热的研究方向, 其应用领域大多要求系统的高安全性和可靠性. 以应用于医疗的多臂机器人协调工作为例, 若该机器人系统发生故障或失效, 则可能危及人身、财产和环境安全, 带来灾难性的后果. 在美国 2013 版机器人白皮书《A Roadmap for U.S. Robotics: From Internet to Robotics, 2013 Edition》中有明确要求: 人机交互机器人需用形式化方法进行验证. 近年来, 形式化验证已被用于帮助开发复杂的机器人系统[16].

面向机器人验证, 定理证明的应用较少. 在机器人运动学领域, 日本学者 Affeldt 等人[17]在定理证明器中实现了串联机器人运动学模型的构建与验证; 首都师范大学陈琦等人[18]完成了平面并联机构正向运动学形式化模型的构建与验证. 在机器人动力学领域, 巴基斯坦伊斯兰堡国立科技大学 Rashid 等人[19]对细胞注射机器人动力学分析进行了形式化验证. 上述工作增强了人们将定理证明技术引入到机器人系统工程应用的信心.

在机器人避碰方法验证领域, 德国研究中心的 Täubig 等人[20]使用定理证明的方法给出了安全函数算法, 对自动小车避障及路径规划算法进行验证, 并给出改进意见, 避免了车辆之间的相互碰撞, 确保了机器人的安全性. 卡内基梅隆大学的 Mitsch 等人[21]采用混成系统模型、定理证明建模和验证移动机器人的运动以及避障安全属性. 上述工作为定理证明方法在机器人碰撞问题的分析提供了基础思路.

综上所述, 基于定理证明的机器人碰撞检测算法验证的研究尚属空白. 针对该问题, 本文在定理证明器中建立了机器人碰撞检测方法基础定理库并对机器人碰撞检测方法进行了形式化建模与验证, 为实现多机系统碰撞检测算法的可靠性和稳定性验证提供了技术支撑和验证框架.

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

## 2 背景知识

### 2.1 HOL-Light定理证明器

定理证明系统 HOL-Light[22]遵循 LCF 方法, 依赖于函数式编程语言 ML, 支持高阶逻辑表达. 在 HOL-Light 系统中, 所有的证明最终都是在一小组原始推论的条件下完成的, 因此该系统拥有简洁的设计和极小可得逻辑内核. 虽然如此, 它却提供了强大的证明工具, 并已应用于一些重要的任务, 如数学的形式化和工业的形式化验证.

HOL-Light 系统的证明是采用高阶逻辑表示目标, 基于策略和已有的定理库来证明目标. 根据目标形式, 可将证明方法分为直接处理原目标的正向证明方法和处理目标逆否命题的反向证明方法. 这两种方法皆是根据已知定理、公理、定义等处理目标, 不同之处在于目标形式是否为其等价逆否命题.

本文实现的机器人碰撞检测方法定理证明库是基于 HOL-Light 定理证明器中已有的集合库、实分析库和多元分析库等构建的. 值得注意的是, 在 HOL-Light 定理证明器已存在作为基本几何体球体的形式化定义及相关性质定理, 这为本文工作提供了良好的工具支撑.

### 2.2 机器人碰撞检测方法

机器人碰撞检测方法是通过由实际场景所得机器人姿态参数, 计算机器人各部分之间的最短距离, 从而判断是否碰撞的方法. 对于机器人碰撞检测而言, 其整体流程可分为两大部分: 第一, 基于基本几何体模型, 实现机器人本体高阶逻辑表达; 第二, 基于几何体最短距离模型及碰撞检测条件, 验证机器人碰撞模型.

因此, 在本文对机器人碰撞检测方法的形式化过程中, 依照这两个角度, 进一步划分形式化过程: 首先, 将机器人关节、连杆等几何体模型及其性质按照中心线和胶囊体划分描述为相应待验证的定理, 并对中心线和胶囊体的形式化表示及其基本性质进行验证; 其次, 针对各类几何体模型间最短距离问题, 在不同假设条件下, 将最短距离模型高阶逻辑建模及其相关性质证明分为球体与球体之间最短距离、球体与胶囊体之间最短距离、胶囊体与胶囊体之间最短距离这 3 类情况进行处理; 然后, 基于最短距离相关性质, 形式化推导并验证基本几何体碰撞条件; 最后, 在不同假设条件下, 构建机器人本体形式化模型, 分析机器人碰撞条件及检测判定模型, 实现机器人碰撞检测形式化验证.

## 3 基本几何体模型及性质

### 3.1 几何体模型高阶逻辑表达

对于机器人本体而言, 通常可将其关节、连杆、末端执行器等基本几何体单元简化为长方体、胶囊体、球体等形状, 进而通过利用计算基本几何体简化模型的碰撞检测方法, 达到减少计算量的目的. 因此, 本文采用球体和胶囊体来简化表示基本几何体形式化模型, 并对其相关性质进行形式化分析与验证.

在 HOL Light 中, 球体的形式化表示如定义 1 所示.

**定义 1**(球体). $\forall x\ e.cball(x,e)=\{y|dist(x,y)\Leftarrow e\}$.

其中, $x$ 表示球心, $e$ 表示该球体的半径, $dist(x,y)$表示空间中两点 $x$ 和 $y$ 的距离, 球体 $cball(x,e)$表示所有与球心 $x$ 距离小于等于半径 $e$ 的点 $y$ 的集合.

在数学上, 胶囊体可表示成在中心线上移动的球体的集合. 具体如图 2 所示.

在图 2 中, $sp$ 和 $ep$ 分别表示胶囊体两端的端点, $c1$ 和 $c2$ 分别表示胶囊体中心线两端的端点, $u$ 表示从端点 $sp$ 到端点 $ep$ 的向量, $r$ 表示胶囊体中心线上对应球体的半径, $l$ 表示中心线上的点, $v$ 表示胶囊体内的点.

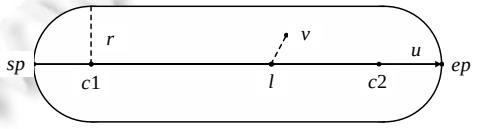


图 2 胶囊体

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

因此，由上述可知，基于已有的球体定义，我们给出中心线和胶囊体的相应形式化表示，如定义 2、定义 3 所示.

**定义 2**(**中心线**). $\forall c1\ c2.p_center_line\ c1\ c2=\{c1+s\%(c2-c1)|\&0\Leftarrow s\wedge s\Leftarrow\&1\}$.

**定义 3**(**胶囊体**).

$\forall sp\ ep\ r.$

$capsule((sp,ep),r)=$

$\{v|\exists u\ c1\ c2\ l.u=ep-sp\wedge c1=(r*inv(norm\ u))\%u+sp\wedge$

$c2=ep-(r*inv(norm\ u))\%u\wedge\&2*r<norm\ u\wedge$

$l\ \mathrm{IN}\ p_center_line\ c1\ c2\wedge norm(v-l)\Leftarrow r\}$

在上述定义中: $\wedge$表示逻辑与; %表示向量的标量乘; &表示将自然数变为实数的运算; *表示实数乘; $inv$ 表示倒数; $norm$ 表示向量范数; IN 表示属于$\in$; $s$ 表示中心线上起点 $c1$ 到任意一点 $l$ 的距离与中心线起点 $c1$ 到终点 $c2$ 的距离的比值; $c1+s\%(c2-c1)$表示中心线上任意一点 $l$; $p_center_line\ c1\ c2$ 表示距离比值 $s$ 在 0 到 1 范围内的所有点 $c1+s\%(c2-c1)$的集合，即以 $c1$ 和 $c2$ 为线段两端端点的中心线; $capsule((sp,ep),r)$表示以 $sp$ 和 $ep$ 为胶囊体两端端点、以 $r$ 为半径的所有与中心线 $p_center_line\ c1\ c2$ 上任意一点 $l$ 距离小于等于半径 $r$ 的点 $v$ 的集合.

根据胶囊体定义可知: 半径为正的条件是由实际物体的几何意义决定的，胶囊体两端点的距离大于直径的条件是由胶囊体的几何形状决定的. 当胶囊体在半径非正或胶囊体两端点的距离小于等于直径时，胶囊体为空集，此时，胶囊体表示无意义.

**定理 1**(**胶囊体为空**). $\forall sp\ ep\ r.r\Leftarrow\&0\vee norm(ep-sp)\Leftarrow\&2*r\Rightarrow capsule((sp,ep),r)=\{\cdot\}$.

其中，$\vee$表示逻辑或. 由于胶囊体是由中心线上移动球体内的所有点组成的集合，所以胶囊体的相关性质都与球体和中心线相关. 因此，这里我们只简单介绍部分中心线的相关性质.

通过分析中心线定义可知，中心线的两端必在中心线上. 若中心线两端相同，则该中心线等价于该端点. 因此，可得如下定理.

**定理 2**(**线段起点**). $\forall c1\ c2.c1\ \mathrm{IN}\ p_center_line\ c1\ c2$.

**定理 3**(**线段终点**). $\forall c1\ c2.c2\ \mathrm{IN}\ p_center_line\ c1\ c2$.

**定理 4**(**中心线两端相同**). $\forall c.p_center_line\ c\ c=\{c\}$.

此外，中心线上的点也满足以下两个性质.

(1) 若取中心线上任意两点，则这两点之间的距离必定有界，如定理 5 所示;

(2) 若取中心线上任意一点，则由该点和线段两端点构成的向量必定互相平行，且满足线性关系，如定理 6 所示.

**定理 5**(**线段上任意两点距离有界**).

$\forall x\ y\ c1\ c2.x\ \mathrm{IN}\ p_center_line\ c1\ c2\wedge y\ \mathrm{IN}\ p_center_line\ c1\ c2\Rightarrow dist(x,y)\Leftarrow dist(c1,c2)$.

**定理 6**(**中心线上的向量平行**).

$\forall x\ c1\ c2.x\ \mathrm{IN}\ p_center_line\ c1\ c2\Rightarrow$

$c2-x=(norm(c2-x)*inv(norm(c2-c1)))\%(c2-c1)\wedge$

$c1-x=(norm(c1-x)*inv(norm(c1-c2)))\%(c1-c2)$

其中, $norm(c2-x)*inv(norm(c2-c1))$表示中心线上一点 $x$ 和端点 $c2$ 之间的距离与中心线两端点 $c1$ 和 $c2$ 之间距离的比值，$norm(c1-x)*inv(norm(c1-c2))$表示中心线上一点 $x$ 和端点 $c1$ 之间的距离与中心线两端点 $c1$ 和 $c2$ 之间距离的比值. 这两个比值反映出了中心线上的点与线段端点构成向量的线性关系和平行关系.

### 3.2 几何体最短距离模型构建及性质验证

根据基本几何形状，可将碰撞类型分为以下 3 类: (1) 球体与球体之间的碰撞; (2) 球体与胶囊体之间的碰撞; (3) 胶囊体与胶囊体之间的碰撞. 作为碰撞检测中最关键的问题，首先构建球体与球体、球体与胶囊体、

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

胶囊体与胶囊体之间最短距离的形式化模型, 其次完成相关定理的高阶逻辑推导.

3.2.1 球体与球体之间最短距离

在数学上, 求解球体与球体之间的最短距离等价于求解两个球心之间的距离. 由于两球心的最短距离就是两点之间的距离, 因此球体与球体之间最短距离的形式化描述如定义 4 所示.

**定义 4(球体与球体之间最短距离).** $\forall p1\ p2.center_dist_f1\ p1\ p2=norm(FST\ p1-FST\ p2)$.

定义 4 中, $p1$ 表示以 $N$ 维向量表示的第 1 个球体球心坐标 $x1$ 和半径 $e1$ 构成的对$(x1,e1)$, $p2$ 表示以 $N$ 维向量表示的第 2 个球体球心坐标 $x2$ 和半径 $e2$ 构成的对$(x2,e2)$, $FST$ 表示获取对类型的第 1 个分量, $FST\ p1$ 表示第 1 个球体的球心, $FST\ p2$ 表示第 2 个球体的球心. 可见, 两球体之间的最短距离是常数.

3.2.2 球体与胶囊体之间最短距离

在数学上, 求解球体与胶囊体之间最短距离等价于求解中心线上的点和线外球心之间的最短距离, 即求解某点与某线段的最短距离. 由于中心线上的点是可移动的, 中心线上的点和线外球心之间的最短距离可转化为从中心线上一点到球心所构成向量的所有可能范数值集合的下确界. 且基于图 2 和定理 6 中线上 3 点的线性关系, 球体与胶囊体之间最短距离的形式化表示如定义 5 所示.

**定义 5(球体与胶囊体之间最短距离).**

$\forall p1\ p2.center_dist_f2\ p1\ p2=$

$\quad inf\{norm(FST\ p1-l)|\exists sp\ ep\ r\ u.\ sp=FST(FST\ p2)\wedge ep=SND(FST\ p2)\wedge r=SND\ p2\wedge$

$\quad u=ep-sp\wedge l\ \mathrm{IN}\ p_center_line((r*inv(norm\ u))\%u+sp)(ep-(r*inv(norm\ u))\%u)\}$

定义 5 中, $p1$ 表示以 $N$ 维向量表示的球体球心坐标 $x$ 和半径 $e$ 构成的对$(x,e)$, $p2$ 表示胶囊体的两端点与半径构成的对$((sp,ep),r)$, $SND$ 表示获取对类型的第 2 个分量, $inf$ 表示集合的下确界, $sp$ 表示胶囊体的起始位置, $ep$ 表示胶囊体的终点位置, $u$ 表示从胶囊体起点 $sp$ 到终点 $ep$ 的向量, $(r*inv(norm\ u))\%u+sp)$表示胶囊体中心线的起点位置, $(ep-(r*inv(norm\ u))\%u)$表示胶囊体中心线的终点位置, $l$ 表示中心线上一点.

令 $w$ 表示中心线起点 $c1$ 到终点 $c2$ 的向量, $m$ 表示中心线起点 $c1$ 到球心 $x$ 的向量, 则从胶囊体中心线上的点 $l$ 到球心 $x$ 的向量范数可简化表示为公式(1):

$$CDF(s)=\|x-l\|=\sqrt{as^2-2bs+c} \tag{1}$$

其中, $a$ 表示 $w\cdot w$, $b$ 表示 $m\cdot w$, $c$ 表示 $m\cdot m$, 符号·表示向量的点积, $s$ 表示胶囊体中心线上起点 $c1$ 到任意一点 $l$ 的距离与中心线起点 $c1$ 到终点 $c2$ 的距离的比值, 即 $\frac{\|l-c1\|}{\|c2-c1\|}$. 上述变量的具体位置关系如图 3 所示.

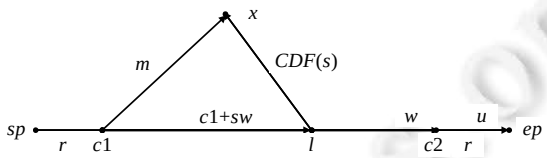


图 3 球体与胶囊体位置关系图

基于上述公式(1)和图 3 中变量位置关系, 球体与胶囊体之间最短距离可简化为定理 7 所示.

**定理 7(球体与胶囊体间最短距离简化形式).**

$\forall x\ e\ sp\ ep\ r.center_dist_f2(x,e)((sp,ep),r)=$

$\quad inf\{sqrt(a*s\ pow\ 2-\&2*b*s+c)|$

$\quad\quad \exists c1\ c2\ m\ w.c1=sp+(r*inv(norm(ep-sp)))\%(ep-sp)\wedge$

$\quad\quad\quad c2=ep-(r*inv(norm(ep-sp)))\%(ep-sp)\wedge$

$\quad\quad\quad m=x-c1\wedge w=c2-c1\wedge$

$\quad\quad\quad a=w\ \mathrm{dot}\ w\wedge b=m\ \mathrm{dot}\ w\wedge c=m\ \mathrm{dot}\ m\wedge$

$\quad\quad\quad \&0\Leftarrow s\wedge s\Leftarrow\&1\}$

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

其中, dot 表示向量的点积, *inf* 表示下确界, *sqrt* 表示实数的根运算, *pow* 表示实数的幂运算.

如果 $a=0$, 则胶囊体中心线起点 $c1$ 与终点 $c2$ 重合, 球体与胶囊体之间的最短距离可转化为球体与球体之间的最短距离, 与胶囊体定义不符. 因此, $a$ 不能等于 0.

而在 $a\neq 0$ 的情况下, 根据球体与胶囊体的位置情况的不同, 球体与胶囊体之间的最短距离可简化成不同结果, 即球体与胶囊体之间的最短距离可进一步简化至中心线上特定点到球心的距离. 当 $b/a\leqslant 0$ 时, 中心线起点 $c1$ 到球心 $x$ 的向量 $m$ 与中心线起点 $c1$ 到终点 $c2$ 的向量 $w$ 之间的夹角不小于 90°, 则球体与胶囊体之间的最短距离等于胶囊体中心线起点到球心的距离; 当 $b/a\geqslant 1$ 时, 中心线起点 $c1$ 到球心 $x$ 的向量 $m$ 与中心线起点 $c1$ 到终点 $c2$ 的向量 $w$ 之间的夹角小于 90°, 且经过球心 $x$ 对中心线作垂线所得垂足在中心线终点 $c2$ 的右侧延长线上, 则球体与胶囊体之间的最短距离等于胶囊体中心线终点到球心的距离; 其他情况下, 经过球心 $x$ 对中心线作垂线所得垂足在中心线上, 则球体与胶囊体之间的最短距离等于胶囊体中心线比例为 $b/a$ 的点到球心的距离. 其相应的形式化表达如定理 8–定理 10 所示.

其中, 定理 8 表示了 $b/a\leqslant 0$ 成立时, 球体与胶囊体之间的最短距离等于胶囊体中心线起点到球心的距离, 即中心线上的点距离比值 $s=0$ 时到球心的距离 *norm m*; 定理 9 表示了 $b/a\geqslant 1$ 成立时, 球体与胶囊体之间的最短距离等于胶囊体中心线终点到球心的距离, 即中心线上的点距离比值 $s=1$ 到球心的距离 $sqrt(a-\&2*b+c)$; 定理 10 表示了 $0<b/a<1$ 成立时, 球体与胶囊体之间的最短距离等于球心到中心线作垂线所得垂足的距离, 即中心线上的点距离比值 $s=b/a$ 的点到球心的距离 $sqrt(c-(b\ pow\ 2)*inv(a))$.

**定理 8($b/a\leqslant 0$ 时球体与胶囊体间最短距离).**

$\forall x\ e\ sp\ ep\ r\ c1\ c2\ m\ w\ a\ b\ c.$

$c1=sp+(r*inv(norm(ep-sp)))\%(ep-sp)\wedge c2=ep-(r*inv(norm(ep-sp)))\%(ep-sp)\wedge$

$m=x-c1\wedge w=c2-c1\wedge a=w\ \mathrm{dot}\ w\wedge b=m\ \mathrm{dot}\ w\wedge c=m\ \mathrm{dot}\ m\wedge$

$\sim(a=\&0)\wedge b*inv(a)\Leftarrow\&0\Rightarrow center_dist_f2(x,e)((sp,ep),r)=norm\ m$

**定理 9($b/a\geqslant 1$ 时球体与胶囊体间最短距离).**

$\forall x\ e\ sp\ ep\ r\ c1\ c2\ m\ w\ a\ b\ c.$

$c1=sp+(r*inv(norm(ep-sp)))\%(ep-sp)\wedge c2=ep-(r*inv(norm(ep-sp)))\%(ep-sp)\wedge$

$m=x-c1\wedge w=c2-c1\wedge a=w\ \mathrm{dot}\ w\wedge b=m\ \mathrm{dot}\ w\wedge c=m\ \mathrm{dot}\ m\wedge$

$\sim(a=\&0)\wedge\&1\Leftarrow b*inv(a)$

$\Rightarrow center_dist_f2(x,e)((sp,ep),r)=sqrt(a-\&2*b+c)$

**定理 10($0<b/a<1$ 时球体与胶囊体间最短距离).**

$\forall x\ e\ sp\ ep\ r\ c1\ c2\ m\ w\ a\ b\ c.$

$c1=sp+(r*inv(norm(ep-sp)))\%(ep-sp)\wedge c2=ep-(r*inv(norm(ep-sp)))\%(ep-sp)\wedge$

$m=x-c1\wedge w=c2-c1\wedge a=w\ \mathrm{dot}\ w\wedge b=m\ \mathrm{dot}\ w\wedge c=m\ \mathrm{dot}\ m\wedge$

$\sim(a=\&0)\wedge\&0<b*inv(a)\wedge b*inv(a)<\&1$

$\Rightarrow center_dist_f2(x,e)((sp,ep),r)=sqrt(c-(b\ pow\ 2)*inv(a))$

#### 3.2.3 胶囊体与胶囊体之间最短距离

在数学上, 求解胶囊体与胶囊体之间的最短距离等价于求解两条中心线上的点之间的最短距离. 由于中心线上的点是可移动的, 两个胶囊体对应中心线上两点之间最短距离可转化为从中心线上一点到另一中心线上一点向量的所有可能范数值集合的下确界. 且基于图 2 所示胶囊体中各点位置关系和定理 6 中线上 3 个点的线性特点, 则胶囊体与胶囊体之间最短距离的形式化如定义 6 所示.

**定义 6(胶囊体与胶囊体之间最短距离).**

$\forall p1\ p2.center_dist_f3\ p1\ p2=$

$inf\{norm(v1-v2)|$

$\exists sp1\ ep1\ r1\ u1\ sp2\ ep2\ r2\ u2.$

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

$sp1=FST(FST\ p1)\wedge ep1=SND(FST\ p1)\wedge r1=SND\ p1\wedge u1=ep1-sp1\wedge$

$sp2=FST(FST\ p2)\wedge ep2=SND(FST\ p2)\wedge r2=SND\ p2\wedge u2=ep2-sp2\wedge$

$v1\ \mathrm{IN}\ p_center_line((r1*inv(norm\ u1))\%u1+sp1)(ep1-(r1*inv(norm\ u1))\%u1)\wedge$

$v2\ \mathrm{IN}\ p_center_line((r2*inv(norm\ u2))\%u2+sp2)(ep2-(r2*inv(norm\ u2))\%u2)\}$

定义 6 中, $p1$ 和 $p2$ 分别表示两个不同胶囊体端点和半径构成的对$((sp1,ep1),r1)$和$((sp2,ep2),r2)$, $sp1$ 和 $ep1$ 分别表示第 1 个胶囊体的起始位置和终点位置, $sp2$ 和 $ep2$ 分别表示第 2 个胶囊体的起始位置和终点位置, $u1$ 表示从第 1 个胶囊体起点 $sp1$ 到终点 $ep1$ 的向量, $u2$ 表示从第 2 个胶囊体起点 $sp2$ 到终点 $ep2$ 的向量, $(r1*inv(norm\ u1))\%u1+sp1)$和$(ep1-(r1*inv(norm\ u1))\%u1)$表示第 1 个胶囊体中心线的起点位置和终点位置, $(r2*inv(norm\ u2))\%u2+sp2)$和$(ep2-(r2*inv(norm\ u2))\%u2)$表示第 2 个胶囊体中心线的起点位置和终点位置.

令 $w$ 表示第 1 条中心线起点 $c1$ 到终点 $c2$ 的向量, $z$ 表示第 2 条中心线起点 $c3$ 到终点 $c4$ 的向量, $m$ 表示第 2 条中心线起点 $c3$ 到第 1 条中心线起点 $c1$ 的向量, 则从第 1 个胶囊体中心线上的点到第 2 个胶囊体中心线上的点范数可简化表示为公式(2):

$$CDF(s,t)=\sqrt{as^2-2bst+ct^2+2ds+2et+f} \tag{2}$$

其中, $a$ 表示 $w\cdot w$, $b$ 表示$-w\cdot z$, $c$ 表示 $z\cdot z$, $d$ 表示 $w\cdot m$, $e$ 表示$-z\cdot m$, $f$ 表示 $m\cdot m$, 符号·表示向量的点积, $s$ 表示胶囊体中心线上起点 $c1$ 到任意一点 $l1$ 的距离与中心线起点 $c1$ 到终点 $c2$ 的距离的比值 $\frac{\|l1-c1\|}{\|c2-c1\|}$, $t$ 表示胶囊体中心线上起点 $c3$ 到任意一点 $l2$ 的距离与中心线起点 $c3$ 到终点 $c4$ 的距离的比值 $\frac{\|l2-c3\|}{\|c3-c4\|}$. 上述变量的具体位置关系如图 4 所示.

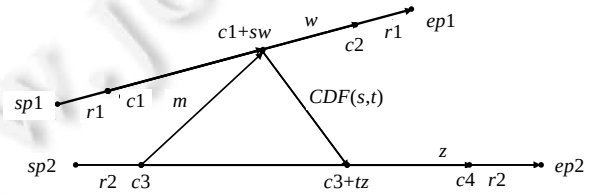


图 4 胶囊体与胶囊体位置关系图

基于上述公式(2)和图 4 中的变量位置关系, 胶囊体与胶囊体之间最短距离的简化形式化表示如定理 11 所示.

**定理 11**(胶囊体间最短距离简化形式).

$\forall sp1\ sp2\ ep1\ ep2\ r1\ r2.$

$center_dist_f3((sp1,ep1),r1)((sp2,ep2),r2)=$

$inf\{sqrt(a*s\ pow\ 2+\&2*b*s*t+c*t\ pow\ 2+\&2*d*s+\&2*e*t+f)|$

$\exists c1\ c2\ c3\ c4\ u\ m\ r.$

$c1=sp1+(r1*inv(norm(ep1-sp1)))\%(ep1-sp1)\wedge$

$c2=ep1-(r1*inv(norm(ep1-sp1)))\%(ep1-sp1)\wedge$

$c3=sp2+(r2*inv(norm(ep2-sp2)))\%(ep2-sp2)\wedge$

$c4=ep2-(r2*inv(norm(ep2-sp2)))\%(ep2-sp2)\wedge$

$w=c2-c1\wedge z=c4-c3\wedge m=c1-c3\wedge a=w\ \mathrm{dot}\ w\wedge b=--(z\ \mathrm{dot}\ w)\wedge c=z\ \mathrm{dot}\ z\wedge$

$d=w\ \mathrm{dot}\ m\wedge e=--(z\ \mathrm{dot}\ m)\wedge f=m\ \mathrm{dot}\ m\wedge \&0\Leftarrow s\wedge s\Leftarrow \&1\wedge \&0\Leftarrow t\wedge t\Leftarrow \&1\}$

由公式(2)可知, 胶囊体与胶囊体之间最短距离是一个二元函数的最小值. 为求解二元函数的最小值, 需先求其驻点及其驻点处的函数值:

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

$$sc=\frac{be-cd}{ac-b^2}\wedge tc=\frac{bd-ae}{ac-b^2} \tag{3}$$

从公式(3)中驻点 $sc$ 和 $tc$ 的表示可知: 驻点只在 $ac-b^2$ 不等于 0 的情况下, 即两胶囊体中心线不平行的情况下才有意义. 而且根据胶囊体定义 3 和胶囊体与胶囊体之间位置关系图 3 可知, 驻点 $sc$、$tc$ 应在区间[0,1]内. 若 $sc$、$tc$ 不在区间[0,1]内, 表示以驻点表示的点不在中心线上, 而是在中心线的延长线上, 这不符合两个胶囊体之间距离的定义.

因此, 两个胶囊体之间最短距离需针对两条中心线是否平行和驻点 $sc$ 和 $tc$ 是否在可行域$\{0\leqslant s,t\leqslant 1\}$内的情况来计算. 若 $sc$、$tc$ 都在区间[0,1]内, 则该驻点的函数值 $CDF(sc,tc)$即为两个胶囊体之间的最短距离. 其对应形式化描述如定理 12 所示.

**定理 12(0≤*sc*, *tc*≤1 时胶囊体间最短距离).**

∀*sp*1 *sp*2 *ep*1 *ep*2 *r*1 *r*2 *c*1 *c*2 *c*3 *c*4 *w z m a b c d e f sc tc*.

*c*1=*sp*1+(*r*1**inv*(*norm*(*ep*1−*sp*1)))%(*ep*1−*sp*1)∧

*c*2=*ep*1−(*r*1**inv*(*norm*(*ep*1−*sp*1)))%(*ep*1−*sp*1)∧

*c*3=*sp*2+(*r*2**inv*(*norm*(*ep*2−*sp*2)))%(*ep*2−*sp*2)∧

*c*4=*ep*2−(*r*2**inv*(*norm*(*ep*2−*sp*2)))%(*ep*2−*sp*2)∧*w*=*c*2−*c*1∧*z*=*c*4−*c*3∧*m*=*c*1−*c*3∧

*a*=*w* dot *w*∧*b*=−−(*z* dot *w*)∧*c*=*z* dot *z*∧*d*=*w* dot *m*∧*e*=−−(*z* dot *m*)∧*f*=*m* dot *m*∧

*sc*=(*b***e*−*c***d*)**inv*(*a***c*−*b pow* 2)∧*tc*=(*b***d*−*a***e*)**inv*(*a***c*−*b pow* 2)∧

~((*a***c*−*b pow* 2)=&0)∧&0⇐*sc*∧*sc*⇐&1∧&0⇐*tc*∧*tc*⇐&1

⇒*center_dist_f*3((*sp*1,*ep*1),*r*1)((*sp*2,*ep*2),*r*2)

=*sqrt*(*a***sc pow* 2+&2**b***sc***tc*+*c***tc pow* 2+&2**d***sc*+&2**e***tc*+*f*)

若 $sc$、$tc$ 不全在区间[0,1]内, 则该驻点不在可行域内, 可删除该驻点. 若 $ac-b^2$ 等于 0, 则两胶囊体中心线平行, 驻点 $sc$、$tc$ 无意义, 则删除该驻点. 由可行域$\{0\leqslant s,t\leqslant 1\}$可知, 可将以从中心线上一点到另一中心线上一点的向量的范数表示距离的起点和终点相对于中心线上的位置进行区分, 即将可行闭区域划分为表示其边界的 4 条线段($K1=\{s=0,0\leqslant t\leqslant 1\}$, $K2=\{s=1,0\leqslant t\leqslant 1\}$, $K3=\{t=0,0\leqslant s\leqslant 1\}$和 $K4=\{t=1,0\leqslant s\leqslant 1\}$)和可行开区域$\{0<s,t<1\}$. 因此, 在两中心线平行或驻点不在可行域内的情况下, 两胶囊体的最短距离必定是可行域边界的最小值. 换言之, 在不考虑驻点的情况下, 求解两胶囊体之间最短距离等价于求解4条线段所得下确界之间的最小值.

在数学上, 求解可行域边界线段上的最小值等价于求解某点与某条线段之间的最短距离. 以边界 $K1=\{s=0,0\leqslant t\leqslant 1\}$为例, 此时的二元函数 $CDF(s,t)$可简化为一元二次函数, 其最小值等于以第 1 个胶囊体中心线起点 $c1$ 为球心、以 $r1$ 为半径的球体与第 2 个胶囊体之间的最短距离.

由于这与求解球体与胶囊体之间最短距离的情况相似, 所以其对应形式化分析过程也类似.

在 $c\neq 0$ 的情况下, $K1=\{s=0,0\leqslant t\leqslant 1\}$的最小值可进一步简化至第 2 条中心线上特定点到第 1 条中心线上起点的距离. 当$-e/c\leqslant 0$ 时, $K1=\{s=0,0\leqslant t\leqslant 1\}$的最小值等于两条中心线起点到起点的距离; 当$-e/c\geqslant 1$ 时, $K1=\{s=0,0\leqslant t\leqslant 1\}$的最小值等于第 2 个胶囊体中心线终点到第 1 条中心线上起点的距离; 其他情况下, $K1=\{s=0,0\leqslant t\leqslant 1\}$的最小值等于第 2 个胶囊体中心线比值为$-e/c$ 的点到第 1 条中心线上起点的距离. 其相应的形式化描述如定理 13 所示.

**定理 13(胶囊体可行域边界 *K*1 最短距离).**

∀*sp*1 *sp*2 *ep*1 *ep*2 *r*1 *r*2 *c*1 *c*2 *c*3 *c*4 *w z m a b c d e f*.

*c*1=*sp*1+(*r*1**inv*(*norm*(*ep*1−*sp*1)))%(*ep*1−*sp*1)∧

*c*2=*ep*1−(*r*1**inv*(*norm*(*ep*1−*sp*1)))%(*ep*1−*sp*1)∧

*c*3=*sp*2+(*r*2**inv*(*norm*(*ep*2−*sp*2)))%(*ep*2−*sp*2)∧

*c*4=*ep*2−(*r*2**inv*(*norm*(*ep*2−*sp*2)))%(*ep*2−*sp*2)∧*w*=*c*2−*c*1∧*z*=*c*4−*c*3∧*m*=*c*1−*c*3∧

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

$a=w$ dot $w\wedge b=--(z$ dot $w)\wedge c=z$ dot $z\wedge d=w$ dot $m\wedge e=--(z$ dot $m)\wedge f=m$ dot $m\wedge$

$\sim(c=\&0)$

$\Rightarrow inf\{sqrt(a*s\ pow\ 2+\&2*b*s*t+c*t\ pow\ 2+\&2*d*s+\&2*e*t+f)|$

$s=\&0\wedge\&0\Leftarrow t\wedge t\Leftarrow\&1\}=$**if** $--(e*inv\ c)\Leftarrow\&0$ **then** $sqrt(f)$

**else if** $\&1\Leftarrow--(e*inv\ c)$ **then** $sqrt(c+\&2*e+f)$ **else** $sqrt(--(e\ pow\ 2*inv(c))+f)$

在实现分别求解 4 条可行域边界线段上的最小值的基础上, 可实现两胶囊体的最短距离的进一步求解和化简. 因为在两中心线平行或驻点不在可行域内的情况下, 两胶囊体的最短距离必定是可行域边界的最小值. 所以针对驻点不在可行域内、两中心线平行的情况, 可进一步划分为以下几种情况: (1) $sc<0$; (2) $1<sc$; (3) $tc<0$; (4) $1<tc$; (5) $ac-b^2=0$.

由于第 1 种情况 $sc<0$ 与第 2 种–第 4 种情况相似, 所以本文以第 1 种情况为例, 给出其形式化表示和证明思路. 具体如定理 14 所示.

**定理 14**($sc<0$ **时胶囊体间最短距离**).

$\forall sp1\ sp2\ ep1\ ep2\ r1\ r2\ c1\ c2\ c3\ c4\ w\ z\ m\ a\ b\ c\ d\ e\ f\ sc\ tc\ K1\ K2\ K3\ K4.$

$c1=sp1+(r1*inv(norm(ep1-sp1)))\%(ep1-sp1)\wedge$

$c2=ep1-(r1*inv(norm(ep1-sp1)))\%(ep1-sp1)\wedge$

$c3=sp2+(r2*inv(norm(ep2-sp2)))\%(ep2-sp2)\wedge$

$c4=ep2-(r2*inv(norm(ep2-sp2)))\%(ep2-sp2)\wedge w=c2-c1\wedge z=c4-c3\wedge m=c1-c3\wedge$

$a=w$ dot $w\wedge b=--(z$ dot $w)\wedge c=z$ dot $z\wedge d=w$ dot $m\wedge e=--(z$ dot $m)\wedge f=m$ dot $m\wedge$

$sc=(b*e-c*d)*inv(a*c-b\ pow\ 2)\wedge tc=(b*d-a*e)*inv(a*c-b\ pow\ 2)\wedge sc<\&0\wedge$

$K1=\{sqrt(a*s\ pow\ 2+\&2*b*s*t+c*t\ pow\ 2+\&2*d*s+\&2*e*t+f)|$

$s=\&0\wedge\&0\Leftarrow t\wedge t\Leftarrow\&1\}\wedge$

$K2=\{sqrt(a*s\ pow\ 2+\&2*b*s*t+c*t\ pow\ 2+\&2*d*s+\&2*e*t+f)|$

$s=\&1\wedge\&0\Leftarrow t\wedge t\Leftarrow\&1\}\wedge$

$K3=\{sqrt(a*s\ pow\ 2+\&2*b*s*t+c*t\ pow\ 2+\&2*d*s+\&2*e*t+f)|$

$t=\&0\wedge\&0\Leftarrow s\wedge s\Leftarrow\&1\}\wedge$

$K4=\{sqrt(a*s\ pow\ 2+\&2*b*s*t+c*t\ pow\ 2+\&2*d*s+\&2*e*t+f)|$

$t=\&1\wedge\&0\Leftarrow s\wedge s\Leftarrow\&1\}$

$\Rightarrow center_dist_f3((sp1,ep1),r1)((sp2,ep2),r2)=inf(K1$ UNION $K2$ UNION $K3$ UNION $K4)$

其中, $K1$、$K2$、$K3$、$K4$ 分别表示 $K1=\{s=0,0\leqslant t\leqslant 1\}$、$K2=\{s=1,0\leqslant t\leqslant 1\}$、$K3=\{t=0,0\leqslant s\leqslant 1\}$和 $K4=\{t=1,0\leqslant s\leqslant 1\}$, $inf(K1$ UNION $K2$ UNION $K3$ UNION $K4)$表示可行域边界的最小值. 从上述表示 $K1=\{s=0,0\leqslant t\leqslant 1\}$的最小值有 3 种可能情况的定理 13 可知, 4 条边界的所有可能最小值表示有 $3^4$ 种可能. 由此可知: 证明在情况 $sc<0$ 下, 两胶囊体的最短距离等于可行域边界的最小值较为复杂. 同时, 在这 4 个边界的所有 81 种可能情况的分类条件之间可能存在互相矛盾或互相蕴含关系. 这一特点, 也在一定程度上增加了形式化证明的难度. 因此, 本文仅在此给出定理 14 的关键证明思路, 具体步骤如下.

Step 1: 分析变量 $a$、$b$、$c$、$d$、$e$、$f$ 所隐含的性质和关系.

例如, $a=w\cdot w$, $c=z\cdot z$, $f=m\cdot m$, 则变量 $a$、$c$、$f$ 必定具有正定性, 即隐含 $0\leqslant a,c,f$.

上述内容皆为单个向量自身的性质, 而变量 $b$ 等于向量 $w$ 与 $z$ 的内积的负, 同时与变量 $a$ 和变量 $c$ 有关联. 因此, 进一步通过向量范数的柯西施瓦茨不等式可知, 有 $0\leqslant ac-b^2$ 成立.

Step 2: 分析驻点条件 $sc<0$.

因为 $sc=\dfrac{be-cd}{ac-b^2}$, 若 $sc$ 小于 0, 则分母 $ac-b^2\neq 0$, 结合 Step 1 隐含条件 $0\leqslant ac-b^2$, 可得 $0<ac-b^2$ 且 $be-cd<0$.

Step 3: 分析边界 $K1$、$K2$、$K3$、$K4$ 和变量 $a$、$b$、$c$、$d$、$e$、$f$ 之间的隐含关系.

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

由 4 条边界的所有可能情况存在的前提条件 $a\neq0$ 和 $c\neq0$ 可知: 在后续证明中, 必定需对变量 $a$、$c$ 是否等于进行分类讨论. 因此, 通过向量内积之间的基本性质可知: 在 $a=0$ 的情况下, 变量 $b$ 和变量 $d$ 也等于 0; 而且在 $c=0$ 的情况下, 变量 $b$ 和变量 $e$ 也等于 0.

根据边界最小值分析可知: 边界 $K1$ 的所有可能结果对应两条中心线上距离比值 $s$、$t$ 的取值为($s=0,t=0$), ($s=0,t=1$), ($s=0,t=-e/c$); 边界 $K2$ 的所有可能结果对应两条中心线上距离比值 $s$、$t$ 的取值为($s=1,t=0$), ($s=1,t=1$), ($s=1,t=-(b+e)/c$); 边界 $K3$ 的所有可能结果对应两条中心线上距离比值 $s$、$t$ 的取值为($s=0,t=0$), ($s=1,t=0$), ($s=-d/a,t=0$); 边界 $K4$ 的所有可能结果对应两条中心线上距离比值 $s$、$t$ 的取值为($s=0,t=1$), ($s=1,t=1$), ($s=-(b+d)/a,t=1$).

显然, 在 4 条边界的最小值中存在相同表示. 因此, 在两胶囊体的最短距离一共可有 8 种可能表示. 根据 8 种可能结果中的重合部分, 分析其成立条件, 证明其在成立条件下, 可在不涉及驻点条件 $sc<0$ 时推导出该种可能结果是两胶囊体之间最短距离的简化表示. 举例来说, 在边界 $K1$ 和边界 $K3$ 中都存在对应两条中心线上距离比值 $s$、$t$ 的取值为($s=0,t=0$)的情况. 其中, 在边界 $K1$ 取到该值的条件为 $-\frac{e}{c}\leqslant0$, 在边界 $K3$ 取到该值的条件为 $-\frac{d}{a}\leqslant0$. 结合 $0\leqslant a,c,f$ 分析可知: 在 $0\leqslant d,e$ 的情况下, 两个胶囊体的最短距离等于对应两条中心线上距离比值 $s=0$, $t=0$ 的两点之间的距离. 换言之, 此时两个胶囊体的最短距离等于两条中心线的起点之间的距离.

Step 4: 基于之前分析所得所有隐含关系简化 81 种可能情况, 排除已证明与驻点条件 $sc<0$ 无关部分.

Step 5: 最后, 根据驻点条件 $sc<0$ 和剩余可能情况的成立条件, 排除其中相互矛盾的部分, 对剩余部分结合上述已知成立条件和变量分析所得隐含条件分析公式(2)中可消去的部分, 实现证明.

基于上述证明思路, 可实现在情况 $sc<0$ 下两胶囊体最短距离等于可行域边界最小值这一定理的形式化证明. 此外, 其他可使得两胶囊体的最短距离等于可行域边界的最小值的 4 种情况中关于驻点不在可行域内的 3 种条件($1<sc$、$tc<0$、$1<tc$)的证明思路与定理 14 相似, 这里不再赘述.

此外, 在中心线平行的情况下, 胶囊体间最短距离等于其边界之间的最小值. 在数学上, 对于任意两个向量, 若其互相平行, 则这两个向量可互相线性表示. 因此, 在 $ac-b^2=0$ 条件下的证明相较于 $sc<0$ 条件下的证明, 思路虽然一致但过程相对简单. 因此, 本文只在定理 15 中给出了其相应形式化表示, 不对其证明过程进行详细阐述.

**定理 15($ac-b^2=0$ 时胶囊体间最短距离).**

$\forall sp1\ sp2\ ep1\ ep2\ r1\ r2\ c1\ c2\ c3\ c4\ w\ z\ m\ a\ b\ c\ d\ e\ f\ K1\ K2\ K3\ K4.$

$c1=sp1+(r1*inv(norm(ep1-sp1)))\%(ep1-sp1)\wedge$

$c2=ep1-(r1*inv(norm(ep1-sp1)))\%(ep1-sp1)\wedge$

$c3=sp2+(r2*inv(norm(ep2-sp2)))\%(ep2-sp2)\wedge$

$c4=ep2-(r2*inv(norm(ep2-sp2)))\%(ep2-sp2)\wedge w=c2-c1\wedge z=c4-c3\wedge m=c1-c3\wedge$

$a=w\ \mathrm{dot}\ w\wedge b=--(z\ \mathrm{dot}\ w)\wedge c=z\ \mathrm{dot}\ z\wedge d=w\ \mathrm{dot}\ m\wedge e=--(z\ \mathrm{dot}\ m)\wedge f=m\ \mathrm{dot}\ m\wedge$

$K1=\{sqrt(a*s\ pow\ 2+\&2*b*s*t+c*t\ pow\ 2+\&2*d*s+\&2*e*t+f)|s=\&0\wedge\&0\Leftarrow t\wedge t\Leftarrow\&1\}\wedge$

$K2=\{sqrt(a*s\ pow\ 2+\&2*b*s*t+c*t\ pow\ 2+\&2*d*s+\&2*e*t+f)|s=\&1\wedge\&0\Leftarrow t\wedge t\Leftarrow\&1\}\wedge$

$K3=\{sqrt(a*s\ pow\ 2+\&2*b*s*t+c*t\ pow\ 2+\&2*d*s+\&2*e*t+f)|t=\&0\wedge\&0\Leftarrow s\wedge s\Leftarrow\&1\}\wedge$

$K4=\{sqrt(a*s\ pow\ 2+\&2*b*s*t+c*t\ pow\ 2+\&2*d*s+\&2*e*t+f)|t=\&1\wedge\&0\Leftarrow s\wedge s\Leftarrow\&1\}\wedge$

$(a*c-b\ pow\ 2)=\&0$

$\Rightarrow center_dist_f3((sp1,ep1),r1)((sp2,ep2),r2)=inf(K1\ \mathrm{UNION}\ K2\ \mathrm{UNION}\ K3\ \mathrm{UNION}\ K4)$

### 3.3 几何体碰撞条件形式化验证

基于不同基本几何体之间的最短距离, 可形式化分析与验证几何体的碰撞条件. 设两个几何体之间的最

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

短碰撞距离为 $D=d-r1-r2$, 其中, $d$ 表示两个几何体之间的最短距离, $r1$ 和 $r2$ 分别表示这两个几何体的半径. 若 $D>0$, 两几何体不发生接触; 若 $D<0$, 两几何体之间发生碰撞.

值得注意的是: 在表示不同几何体之间碰撞条件的等价情况时, 需保证进行碰撞情况判定的几何体的有效性, 即几何体非空. 其中, 基于两个球体之间的最短距离的形式化定义可得下述两球体之间等价碰撞条件和分离条件.

**定理 16**(球体与球体之间等价碰撞条件).

$\forall x1\ x2\ r1\ r2.\&0\Leftarrow r1\wedge\&0\Leftarrow r2\Rightarrow$

$(\sim(DISJOINT(cball(x1,r1))(cball(x2,r2)))\Leftrightarrow center_dist_f1(x1,r1)(x2,r2)\Leftarrow r1+r2)$

**定理 17**(球体与球体之间无碰撞条件).

$\forall x1\ x2\ r1\ r2.DISJOINT(cball(x1,r1))(cball(x2,r2))\Leftrightarrow$

$(r1+r2<center_dist_f1(x1,r1)(x2,r2))\vee r1<\&0\vee r2<\&0$

其中, 定理 16 表示在两个球体半径皆非负的情况下, 以 $x1$ 为球心、$r1$ 为半径的球体与以 $x2$ 为球心、$r2$ 为半径的另一球体碰撞条件等价于两球体之间最短距离不大于两球体半径之和; 定理 17 则表示 $r1$ 为半径的球体与以 $x2$ 为球心、$r2$ 为半径的另一球体分离条件等价于两球体之间最短距离大于两球体半径之和或两球体半径小于 0. 定理 25 的证明可通过球体定义, 两球体最短距离定义以及 HOL Light 库中球体子集相关性质, 结合简化策略实现.

由于涉及相较于球体更复杂的胶囊体表示, 对球体与胶囊体之间碰撞情况的等价条件的形式化表示和推导相对复杂一些. 具体如定理 18、定理 19 所示.

**定理 18**(球体与胶囊体之间等价碰撞条件).

$\forall x\ sp\ ep\ e\ r.$

$\&0\Leftarrow e\wedge\&0\Leftarrow r\wedge\&2*r<norm(ep-sp)\Rightarrow$

$(\sim(DISJOINT(cball(x,e))(capsule((sp,ep),r)))\Leftrightarrow center_dist_f2(x,e)((sp,ep),r)\Leftarrow e+r)$

**定理 19**(球体与胶囊体之间无碰撞条件).

$\forall x\ sp\ ep\ e\ r.$

$(DISJOINT(cball(x,e))(capsule((sp,ep),r)))\Leftrightarrow$

$(e+r<center_dist_f2(x,e)((sp,ep),r)\vee e<\&0\vee r<\&0\vee norm(ep-sp)\Leftarrow\&2*r)$

定理 18 的前提条件可保证球体和胶囊体的有效性, 即: 在半径不小于 0 且胶囊体两端点距离大于直径的情况下, 球体和胶囊体有意义. 而定理 19 表示的球体与胶囊体之间的分离条件的等价于球体与胶囊体之间最短距离大于两半径之和或半径小于 0 或胶囊体两端点距离小于等于直径. 值得注意的是: 几何体之间无碰撞的等价条件不仅要考虑在几何体有意义的情况, 也要考虑几何体无意义的情况.

除了上述涉及球体的碰撞情况判定外, 常见碰撞情况判定包括了胶囊体之间的碰撞情况. 因此, 其相应碰撞的等价条件和分离等价条件如定理 20、定理 21 所示.

**定理 20**(胶囊体与胶囊体之间等价碰撞条件).

$\forall sp1\ sp2\ ep1\ ep2\ r1\ r2\ c1\ c2\ c3\ c4\ w\ z\ m\ a\ b\ c\ d\ e\ f\ sc\ tc.$

$\&0\Leftarrow r1\wedge\&0\Leftarrow r2\wedge\&2*r1<norm(ep1-sp1)\wedge\&2*r2<norm(ep2-sp2)\wedge$

$c1=sp1+(r1*inv(norm(ep1-sp1)))\%(ep1-sp1)\wedge$

$c2=ep1-(r1*inv(norm(ep1-sp1)))\%(ep1-sp1)\wedge$

$c3=sp2+(r2*inv(norm(ep2-sp2)))\%(ep2-sp2)\wedge$

$c4=ep2-(r2*inv(norm\ (ep2-sp2)))\%(ep2-sp2)\wedge w=c2-c1\wedge z=c4-c3\wedge m=c1-c3\wedge$

$a=w\ \mathrm{dot}\ w\wedge b=--(z\ \mathrm{dot}\ w)\wedge c=z\ \mathrm{dot}\ z\wedge d=w\ \mathrm{dot}\ m\wedge e=--(z\ \mathrm{dot}\ m)\wedge f=m\ \mathrm{dot}\ m\wedge$

$sc=(b*e-c*d)*inv(a*c-b\ pow\ 2)\wedge tc=(b*d-a*e)*inv(a*c-b\ pow\ 2)\wedge$

$\sim((a*c-b\ pow\ 2)=\&0)\wedge\&0\Leftarrow sc\wedge sc\Leftarrow\&1\wedge\&0\Leftarrow tc\wedge tc\Leftarrow\&1$

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

$\Rightarrow(\sim(DISJOINT(capsule((sp1,ep1),r1))(capsule((sp2,ep2),r2)))$

$\Leftrightarrow center_dist_f3((sp1,ep1),r1)((sp2,ep2),r2)\Leftarrow r1+r2)$

**定理 21**(胶囊体与胶囊体之间无碰撞条件).

$\forall sp1\ sp2\ ep1\ ep2\ r1\ r2\ c1\ c2\ c3\ c4\ w\ z\ m\ a\ b\ c\ d\ e\ f\ sc\ tc.$

$c1=sp1+(r1*inv(norm(ep1-sp1)))\%(ep1-sp1)\wedge$

$c2=ep1-(r1*inv(norm(ep1-sp1)))\%(ep1-sp1)\wedge$

$c3=sp2+(r2*inv(norm(ep2-sp2)))\%(ep2-sp2)\wedge$

$c4=ep2-(r2*inv(norm(ep2-sp2)))\%(ep2-sp2)\wedge w=c2-c1\wedge z=c4-c3\wedge m=c1-c3\wedge$

$a=w\ \mathrm{dot}\ w\wedge b=--(z\ \mathrm{dot}\ w)\wedge c=z\ \mathrm{dot}\ z\wedge d=w\ \mathrm{dot}\ m\wedge e=--(z\ \mathrm{dot}\ m)\wedge f=m\ \mathrm{dot}\ m\wedge$

$sc=(b*e-c*d)*inv(a*c-b\ pow\ 2)\wedge tc=(b*d-a*e)*inv(a*c-b\ pow\ 2)\wedge$

$\sim((a*c-b\ pow\ 2)=\&0)\wedge\&0\Leftarrow sc\wedge sc\Leftarrow\&1\wedge\&0\Leftarrow tc\wedge tc\Leftarrow\&1$

$\Rightarrow((DISJOINT(capsule((sp1,ep1),r1))(capsule((sp2,ep2),r2)))$

$\Leftrightarrow r1+r2<center_dist_f3((sp1,ep1),r1)((sp2,ep2),r2)\vee r1<\&0\vee r2<\&0$

$\vee norm(ep1-sp1)\Leftarrow\&2*r1\vee norm(ep2-sp2)\Leftarrow\&2*r2)$

其中, 半径非负和胶囊体两端点距离大于直径的条件用于保证胶囊体的有效性, $c1-c4$ 分别表示两个胶囊体的 4 个端点, 其余变量, 如 $w$、$z$、$m$、$a$ 等, 皆用于简化后续形式化证明. 因为在涉及胶囊体之间最短距离表示时, 此类变量可简化推导过程和相关定理(如定理 12)的使用.

## 4 机器人碰撞检测方法

### 4.1 机器人几何模型构建

基于已构建的基本几何体模型, 可实现机器人几何模型的形式化. 由于所有机器人皆是由多个基本几何体单元组合构成, 因此其形式化描述如定义 7 所示.

**定义 7**(机器人). $robot=iterate(\mathrm{UNION})$.

其中, *iterate* 表示对于某项二元运算的迭代, UNION 表示集合并运算. 值得注意的是: 在 HOL-Light 中, 迭代 *iterate* 的完整表示是 *iterate op s f*. 而 *iterate op s f* 表示对由集合 *s* 进行映射 *f* 所得元素进行迭代二元运算 *op* 的结果, 因此, *robot* 完整表示为 *robot s f*, 即对组成构件(如球体、胶囊体等)序号集合 *s* 进行(序号与组成构件集合关系)映射 *f* 所得组成构件集合进行迭代集合并运算 UNION 的机器人. 若机器人的初始组成构件(如球体、胶囊体等)序号集合 *s* 为空集, 则表示该机器人位姿集合也是空集. 若每次在初始组成构件序号集合 *s* 内插入新元素(序号), 机器人相当于增加了一个组成构件. 值得注意的是, 表示组成构件序号的集合 *s* 必须为有限集才有意义. 故可得定理 22.

**定理 22**(机器人构型规则).

$(\forall f.robot\ \{\cdot\}\ f=\{\cdot\})\wedge$

$(\forall x\ f\ s.FINITE(s)\Rightarrow(robot\ (x\ \mathrm{INSERT}\ s)\ f=\mathbf{if}\ x\ \mathrm{IN}\ s\ \mathbf{then}\ robot\ s\ f\ \mathbf{else}\ f(x)\ \mathrm{UNION}\ robot\ s\ f))$

其中, *FINITE s* 表示集合 *s* 是有限集, INSERT 表示将元素 *x* 插入到集合 *s* 中, IN 表示属于. 若元素 *x* 本就属于组成构件序号集合 *s*, 那么原机器人集合 *robot s f* 不变, 则机器人不增加新组成构件; 若元素 *x* 不属于组成构件序号集合 *s*, 是一个新元素, 则原机器人集合 *robot s f* 扩大为 *robot s f* 与新增组成构件序号 *x* 对应的组成构件 $f(x)$的并集.

由机器人的定义可知: 若在相同组成构件序号集合(即序号与组成构件集合映射关系定义域集合)*s* 下, 两个不同函数(映射关系)*f* 和 *g* 的函数值相同, 那么这两个机器人也相同. 其相应的形式化表示如定理 23 所示.

**定理 23**(机器人等价条件). $\forall f\ g\ s.(\forall x.x\ \mathrm{IN}\ s\Rightarrow(f\ x=g\ x))\Rightarrow(robot\ s\ f=robot\ s\ g)$.

其中, 序号与组成构件集合映射关系 *f* 和 *g* 不仅包含了机器人组成构件的序号信息, 也包含了对应序号组成构件的类型和位姿信息. 因此, 定理 8 体现了机器人在几何模型的形式化表示中, 同时涵盖了机器人构件的

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

类型、数目、序号等信息和机器人的位姿信息.

此外, 对于所有机器人而言, 增加或卸去组成构件, 即基本几何体单元, 可通过任意增加或减少一个或多个序号集合 $s$ 的元素来实现. 以增加构件为例, 可得定理 24–定理 26.

**定理 24(机器人构件可组合性).**

$\forall f\ s\ t.FINITE\ s\wedge FINITE\ t\wedge DISJOINT\ s\ t\Rightarrow(robot(s\ \mathrm{UNION}\ t)\ f=(robot\ s\ f)\ \mathrm{UNION}\ (robot\ t\ f))$

**定理 25(机器人构件可重组性).**

$\forall s\ t\ f.FINITE\ s\wedge FINITE\ t\Rightarrow$

$robot\ s\ f\ \mathrm{UNION}\ robot\ t\ f=(robot(s\ \mathrm{UNION}\ t)\ f)\ \mathrm{UNION}\ (robot(s\ \mathrm{INTER}\ t)\ f)$

**定理 26(机器人构件可扩展性).**

$\forall f\ g\ s.FINITE\{x|x\ \mathrm{IN}\ s\wedge\sim(f\ x=\{\cdot\})\}\wedge FINITE\{x|x\ \mathrm{IN}\ s\wedge\sim(g\ x=\{\cdot\})\}\Rightarrow$

$robot\ s(\lambda x.f\ x\ \mathrm{UNION}\ g\ x)=robot\ s\ f\ \mathrm{UNION}\ robot\ s\ g$

其中, $DISJOINT$ 表示两个集合相互独立, ~表示逻辑否. 定理 24 表示对同一映射关系 $f$, 两个互相独立的有限组成构件序号集 $s$ 和 $t$ 对应构成的两个机器人组成的新机器人可由这两个机器人的并集表示; 定理 25 表示对同一映射关系 $f$, 任意两个有限组成构件序号集 $s$ 和 $t$ 对应构成的两个机器人组成的新机器人可由两个序号集中相同序号和不同序号构成的新机器人的并集表示; 定理 26 则表示同一序号集 $s$, 两个满射且映射结果非空的序号与组成构件映射关系 $f$ 和 $g$ 对应构成的两个机器人组成的新机器人可由这两个机器人的并集表示.

### 4.2 机器人碰撞模型高阶逻辑表达

值得注意的是, 机器人自身组成构件间存在相互连接的部分. 因此在表示实际机器人几何模型时, 值得注意的是, 该机器人自身所含组成基本几何体单元之间是存在交集的. 基于机器人几何模型, 给出机器人碰撞模型的形式化描述如定义 8 所示.

**定义 8(机器人碰撞模型).**

$\forall n\ m\ f\ g.collision(n,f)(m,g)\Leftrightarrow\sim((robot(0..n)\ f)\ \mathrm{INTER}\ (robot(0..m)\ g)=\{\cdot\})$.

其中, $n$ 和 $m$ 分别表示给定的两个机器人相应的组成基本几何体单元个数为 $n+1$ 和 $m+1$, $f$ 和 $g$ 分别表示两个机器人每个组成基本几何体单元序号与位姿的映射关系. 定义 8 描述的是: 给定的两个机器人的几何表示, 这两机器人碰撞等价于这两个机器人的几何表示集合存在交集. 由此可知: 两机器人无碰撞情况等价于这两个机器人的几何表示集合相互独立, 没有交集. 其相应的形式化表示如定理 27 所示.

**定理 27(机器人无碰撞).**

$\forall n\ m\ f\ g.\sim(collision(n,f)(m,g))\Leftrightarrow(DISJOINT(robot(0..n)\ f)(robot(0..m)\ g))$.

由于所有机器人几何表示皆可分离为对应基本几何体单元的几何表示, 因此机器人碰撞情况与非碰撞情况皆可转换为机器人内所有基本几何体单元的碰撞情况与无碰撞情况, 可得下述定理. 值得注意的是, 所有机器人必定包含不少于一个组成基本几何体单元.

**定理 28(机器人碰撞等价条件).**

$\forall n\ m\ f\ g.(collision(n,f)(m,g))\Leftrightarrow$

$(\exists i\ j.1\Leftarrow i\wedge i\Leftarrow\mathrm{SUC}\ n\wedge 1\Leftarrow j\wedge j\Leftarrow\mathrm{SUC}\ m\wedge\sim(DISJOINT(f(i-1))(g(j-1))))$

**定理 29(机器人无碰撞等价条件).**

$\forall n\ m\ f\ g.\sim(collision(n,f)(m,g))\Leftrightarrow$

$(\forall i\ j.1\Leftarrow i\wedge i\Leftarrow\mathrm{SUC}\ n\wedge 1\Leftarrow j\wedge j\Leftarrow\mathrm{SUC}\ m\Rightarrow DISJOINT(f(i-1))(g(j-1)))$

上述定理中, SUC $n$ 表示自然数$(n+1)$. 定理 28 表示两机器人碰撞的等价条件为, 该机器人所有基本几何体单元之间存在交集; 定理 29 表示两机器人无碰撞的等价条件为, 这两个机器人的所有基本几何体单元之间没有交集.

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

### 4.3 机器人碰撞形式化验证

基于本文所构建的机器人碰撞检测方法定理证明库，本节以图 5 所示的双臂机器人为例，构建机器人本体几何模型的高阶逻辑表达，并给出碰撞检测的验证过程.

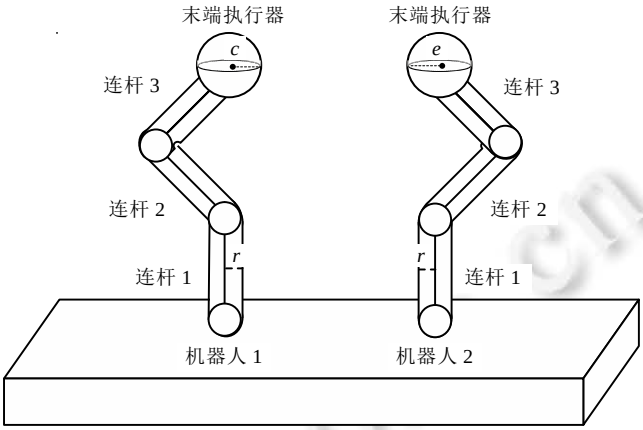


图 5 双臂机器人示意图

由图 5 可知：该双臂机器人可抽象为由 3 个胶囊体表示机械臂的 3 个连杆、由一个球体表示机械臂末端执行器的两个同构机械臂组成. 其中，一条机械臂的形式化模型如定义 9 所示.

**定义 9(机械臂)**. $\forall f\ n.manipulators\ n\ f{=}robot(0..n)\ f$.

其中，$n$ 表示机械臂的组成基本几何体单元个数为 $n$+1，$f$ 表示该机械臂每个组成基本几何体单元序号与位姿的映射关系.

然而，机器人在运动过程中的位姿是随时间变化的. 因此，在机器人几何模型的碰撞情况判定形式化建模时需要增加时间变量 $t$. 即有 $t$ 时刻特定机器人无碰撞等价条件如定理 30 所示. 该定理可用机器人碰撞定义和几何体间的碰撞条件加以证明.

**定理 30(*t* 时刻特定机器人无碰撞条件)**.

$\forall a1\ a2\ b1\ b2\ c1\ c2\ d1\ d2\ e\ r\ t\ f\ g.$

$f\ t\ 0{=}capsule((a1\ t,b1\ t),r)\wedge f\ t\ 1{=}capsule((b1\ t,c1\ t),r)\wedge$

$f\ t\ 2{=}capsule((c1\ t,d1\ t),r)\wedge f\ t\ 3{=}cball(d1\ t,e)\wedge$

$g\ t\ 0{=}capsule((a2\ t,b2\ t),r)\wedge g\ t\ 1{=}capsule((b2\ t,c2\ t),r)\wedge$

$g\ t\ 2{=}capsule((c2\ t,d2\ t),r)\wedge g\ t\ 3{=}cball(d2\ t,e)\wedge \&0\Leftarrow e\wedge \&0\Leftarrow r$

$\Rightarrow(DISJOINT(manipulators\ 3\ (f\ t))(manipulators\ 3(g\ t))\Leftrightarrow$

$((\forall i\ j.1\Leftarrow i\wedge i\Leftarrow 3\wedge 1\Leftarrow j\wedge j\Leftarrow 3\Rightarrow DISJOINT(f\ t\ (i-1))(g\ t\ (j-1)))\wedge$

$(e+r<center_dist_f2(d2\ t,e)((a1\ t,b1\ t),r)\vee norm(b1\ t-a1\ t)\Leftarrow \&2*r)\wedge$

$(e+r<center_dist_f2(d2\ t,e)((b1\ t,c1\ t),r)\vee norm(c1\ t-b1\ t)\Leftarrow \&2*r)\wedge$

$(e+r<center_dist_f2(d2\ t,e)((c1\ t,d1\ t),r)\vee norm(d1\ t-c1\ t)\Leftarrow \&2*r)\wedge$

$(e+r<center_dist_f2(d1\ t,e)((a2\ t,b2\ t),r)\vee norm(b2\ t-a2\ t)\Leftarrow \&2*r)\wedge$

$(e+r<center_dist_f2(d1\ t,e)((b2\ t,c2\ t),r)\vee norm(c2\ t-b2\ t)\Leftarrow \&2*r)\wedge$

$(e+r<center_dist_f2(d1\ t,e)((c2\ t,d2\ t),r)\vee norm(d2\ t-c2\ t)\Leftarrow \&2*r)\wedge$

$(\&2*e<center_dist_f1(d1\ t,\ e)(d2\ t,\ e))))$

其中，函数 $f$ 和 $g$ 分别表示机器人 1 和机器人 2 组成构件序号与某时刻 $t$ 的位置. 两个机器人组成构件的基本参数见表 1.

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

表 1 $t$ 时刻机器人模型基本参数

| | 序号 | 组成构件 | 几何体 | 起始位置/球心 | 终点位置 | 半径 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 机器人 1 | 0 | 连杆 | 胶囊体 | $a1(t)$ | $b1(t)$ | $r$ |
| | 1 | 连杆 | 胶囊体 | $b1(t)$ | $c1(t)$ | $r$ |
| | 2 | 连杆 | 胶囊体 | $c1(t)$ | $d1(t)$ | $r$ |
| | 3 | 末端执行器 | 球体 | $d1(t)$ | – | $e$ |
| 机器人 2 | 0 | 连杆 | 胶囊体 | $a2(t)$ | $b2(t)$ | $r$ |
| | 1 | 连杆 | 胶囊体 | $b2(t)$ | $c2(t)$ | $r$ |
| | 2 | 连杆 | 胶囊体 | $c2(t)$ | $d2(t)$ | $r$ |
| | 3 | 末端执行器 | 球体 | $d2(t)$ | – | $e$ |

定理 30 中, 前提条件 $0 \Leftarrow e$ 和 $0 \Leftarrow r$ 是由双臂机器人的基本组成构件的几何意义决定的. 该定理主要证明思路是: 根据前提中给出的机器人各序号对应组成构件类型、位姿信息, 结合机械臂定义 9、定理 29 机器人无碰撞等价条件、定理 19 球体与胶囊体无碰撞条件等相关定理, 匹配前提条件, 对目标进行重写、逆推和化简, 从而实现该定理的证明.

基于定理 30, 即特定 $t$ 时刻双臂机器人无碰撞条件, 假设机器人参数某时刻 $t0$ 的具体数值参数见表 2. 可得该时刻双臂机器人的碰撞判定条件的形式化模型如定理 31 所示.

表 2 某时刻机器人模型数值参数

| | 序号 | 组成构件 | 几何体 | 起始位置/球心 | 终点位置 | 半径(mm) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 机器人 1 | 0 | 连杆 | 胶囊体 | (0,0,0) | (0,0,650) | 75 |
| | 1 | 连杆 | 胶囊体 | (0,0,650) | (350,0,650) | 75 |
| | 2 | 连杆 | 胶囊体 | (350,0,650) | (350,450,650) | 75 |
| | 3 | 末端执行器 | 球体 | (350,450,650) | – | 80 |
| 机器人 2 | 0 | 连杆 | 胶囊体 | (0,600,0) | (0,600,650) | 75 |
| | 1 | 连杆 | 胶囊体 | (0,600,650) | (350,600,650) | 75 |
| | 2 | 连杆 | 胶囊体 | (350,600,650) | (350,150,650) | 75 |
| | 3 | 末端执行器 | 球体 | (350,150,650) | – | 80 |

**定理 31(机器人碰撞判定).**

$\forall f\ g.$

$f(0)=capsule((vector[\&0;\&0;\&0]:real\hat{}3,vector[\&0;\&0;\&650]:real\hat{}3),\&75)\wedge$

$f(1)=capsule((vector[\&0;\&0;\&650]:real\hat{}3,vector[\&350;\&0;\&650]:real\hat{}3),\&75)\wedge$

$f(2)=capsule((vector[\&350;\&0;\&650]:\mathrm{real}\hat{}3,vector[\&350;\&450;\&650]:real\hat{}3),\&75)\wedge$

$f(3)=cball(vector[\&350;\&450;\&650]:real\hat{}3,\&80)\wedge$

$g(0)=capsule((vector[\&0;\&600;\&0]:real\hat{}3,vector[\&0;\&600;\&650]:real\hat{}3),\&75)\wedge$

$g(1)=capsule((vector[\&0;\&600;\&650]:real\hat{}3,vector[\&350;\&600;\&650]:real\hat{}3),\&75)\wedge$

$g(2)=capsule((vector[\&350;\&600;\&650]:real\hat{}3,vector[\&350;\&150;\&650]:real\hat{}3),\&75)\wedge$

$g(3)=cball(vector[\&350;\&150;\&650]:real\hat{}3,\&80)$

$\Rightarrow\sim(DISJOINT(manipulators\ 3\ f)(manipulators\ 3\ g))$

定理 31 表示: 该双臂机器人在表 2 所列机器人具体参数下, 两机器人发生碰撞. 该定理的证明关键在于利用机器人碰撞等价条件, 找到具体发生碰撞的机器人构件, 通过机器人不同类型构件之间最短距离的简化结果, 结合简化、逆推、实数自动证明策略等达到定理正确性的验证目的.

## 5 总 结

本文主要构建了机器人碰撞检测方法基础定理证明库, 主要包括建立了球体和胶囊体形式化模型, 实现了几何体单元之间最短距离和机器人碰撞的高阶逻辑表达, 证明了其相关属性及碰撞条件等性质. 完成定义 9 条、证明定理 111 个、HOL-Light 证明脚本 6 000 余行. 本文的形式化工作不仅填补了基于高级逻辑碰撞检

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

测验证方法的空白，也为多臂/多机器人系统碰撞检测算法的验证奠定了坚实的基础. 因此，下一步工作将围绕着本文给出的基本框架实现对机器人碰撞算法的形式化验证.

**References**:


[1] Ren XM, Wang DH. The contemporary development of robots and its ethical issues. Studies in Dialectics of Natural, 2013, 29(6): 113−118 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.19484/j.cnki.1000-8934.2013.06.023]

[2] Zhang X. Four dimensions of network society governance. Chinese Public Administration, 2017(9): 32−34 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.3782/j.issn.1006-0863.2017.09.06]

[3] Lozier DW, Olver FWJ. Numerical evaluation of special functions. In: Gautschi W, ed. AMS Proc. of the Symp. in Applied Mathematics. 2000. 1−48.

[4] Govindaraju NK, Kabul I, Lin MC, *et al*. Fast continuous collision detection among deformable models using graphics processors. Computers & Graphics, 2007, 31(1): 5−14.

[5] Wang ZW, Xu H. Collision detection algorithm based on topological space grid in complex scenes. Computer System Application, 2017, 26(12): 116−123 (in Chinese with English abstract).

[6] Gilbert EGM, Johnson DW, Keerthi SS. A fast procedure for computing the distance between complex objects in three-dimensional space. IEEE Journal on Robotics and Automation, 1988, 4(2): 193−203.

[7] Jin YX, Qin ZP, Li Z. Deformable body collision detection algorithm fused with R-Sphere bounding sphere. Computer Engineering and Design, 2017, 38(1): 92−96 (in Chinese with English abstract).

[8] Harrison J. Formal proof–theory and practice. Notices of the American Mathematical Society, 2008, 55(11): 1−2.

[9] Harrison J. HOL light: An overview. In: Proc. of the 22nd Theorem Proving in Higher Order Logics. Munich: Springer-Verlag, 2009. 60−66. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-03359-9_4

[10] Faure F, Barbier S, Allard J, *et al*. Image-based collision detection and response between arbitrary volume objects. In: Proc. of the 7th ACM SIGGRAPH/Eurographics Symp. on Computer Animation. Eurographics Association, 2008. 155−162.

[11] Qu HY, Li WH, Zhao W. Human-vehicle collision detection algorithm based on image processing. Int'l Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2020, 34(8).

[12] Shen XL, Wang RX. Research on fast collision detection algorithm based on improved particle swarm. Computer Engineering and Applications, 2016, 52(22): 49−54 (in Chinese with English abstract).

[13] Zhao L, Zhang YD, Hu XX. Collision detection algorithm for industrial robot simulation based on mesh envelope. China Mechanical Engineering, 2017, 28(3): 316−321 (in Chinese with English abstract).

[14] Huang YC, Guo S, Zhang LG. A novel self-collision detection algorithm for dual-arm upper Limb rehabilitation robot based on key point-key line segment model. Int'l Journal of Mechatronics and Applied Mechanics, 2020, 1(7): 48−54.

[15] Liang MD. Research on collision detection technology of space manipulator [MS. Thesis]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2020 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.27061/d.cnki.ghgdu.2020.001000].

[16] Luckcuck M, Farrell M, Dennis L A, *et al*. Formal specification and verification of autonomous robotic systems: A survey. ACM Computing Surveys, 2019, 52(5): 1−32.

[17] Affeldt R, Cohen C. Formal foundations of 3D geometry to model robot manipulators. In: Proc. of the 6th ACM SIGPLAN Conf. on Certified Programs and Proofs. New York, 2017. 30−42.

[18] Chen Q, Wang GH, Zhang QY, Shi ZP, Chen SY, Guan Y. Formal modeling and verification of planar parallel mechanism. Journal of Chinese Computer Systems, 2020, 41(5): 925−1031 (in Chinese with English abstract). [doi: CNKI:SUN:XXWX.0.2020-05-005]

[19] Rashid A, Hasan O. Formal analysis of robotic cell injection systems using theorem proving. In: Proc. of the Cyber Physical Systems—Design, Modeling, and Evaluation. Cham, 2019. 127−141.

[20] Täubig H, Frese U, Hertzberg C, *et al*. Guaranteeing functional safety: Design for provability and computer-aided verification. Autonomous Robots, 2012, 32: 303−331.

[21] Mitsch S, Ghorbal K, Platzer A. On provably safe obstacle avoidance for autonomous robotic ground vehicles. In: Proc. of the Robotics: Science and Systems IX. 2013. 1−8.

[22] Harrison J. HOL light: A tutorial introduction. Lecture Notes in Computer Science, 1997, 1166.


© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

**附中文参考文献:**

[1] 任晓明, 王东浩. 机器人的当代发展及其伦理问题初探. 自然辩证法研究, 2013, 29(6): 113−118. [doi: 10.19484/j.cnki.1000-8934.2013.06.023]

[2] 张晓. 网络社会治理的 4 个维度. 中国行政管理, 2017(9): 32−34. [doi: 10.3782/j.issn.1006-0863.2017.09.06]

[5] 王振文, 徐华. 复杂场景中基于拓扑空间网格的碰撞检测算法. 计算机系统应用, 2017, 26(12): 116−123.

[7] 靳雁霞, 秦志鹏, 李照. 融合 R-Sphere 包围球的变形体碰撞检测算法. 计算机工程与设计, 2017, 38(1): 92−96.

[12] 沈学利, 王瑞新. 基于改进粒子群的快速碰撞检测算法研究. 计算机工程与应用, 2016, 52(22): 49−54.

[13] 赵亮, 张义德, 胡旭晓. 基于网格包络的工业机器人仿真碰撞检测算法. 中国机械工程, 2017, 28(3): 316−321.

[15] 梁孟德. 空间机械臂碰撞检测技术研究 [硕士学位论文]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2020. [doi: 10.27061/d.cnki.ghgdu.2020.001000]

[18] 陈琦, 王国辉, 张倩颖, 施智平, 陈善言, 关永. 平面并联机构的形式化建模与验证. 小型微型计算机系统, 2020, 41(5): 925−1031. [doi: CNKI:SUN:XXWX.0.2020-05-005]

**陈善言**(1995－), 女, 博士, CCF 学生会员, 主要研究领域为形式化验证, 高可靠嵌入式系统.

**施智平**(1974－), 男, 博士, 教授, 博士生导师, CCF 高级会员, 主要研究领域为形式化验证, 视觉信息处理.

**关永**(1966－), 男, 博士, 教授, 博士生导师, CCF 专业会员, 主要研究领域为形式化验证, 高可靠嵌入式系统.

**王国辉**(1984－), 男, 博士, 高级实验师, CCF 专业会员, 主要研究领域为形式化验证, 高可靠嵌入式系统.

www.jos.org.cn