

# Hamming-Hausdorff 距离下区间直觉模糊知识测度及应用\*



郭凯红, 王紫晴

(辽宁大学 信息学院, 辽宁 沈阳 110036)

通信作者: 王紫晴, E-mail: 690866390@qq.com

**摘要:** 提出了一种基于改进 Hamming-Hausdorff 距离的区间直觉模糊知识测度(interval-valued intuitionistic fuzzy knowledge measure, IVIFKM), 并应用于图像阈值分割中, 获得了更好的图像分割结果. 最新研究表明, 直觉模糊环境下的知识度量包括两个重要方面, 即信息量与信息清晰度. 基于这种理解, 提出新的区间直觉模糊知识测度公理系统. 同时, 改进并推广标准 Hamming-Hausdorff 距离, 结合理想解法(technique for order preference by similarity to ideal solution, TOPSIS), 建立新的满足所提公理系统要求的区间直觉模糊知识测度. 随后, 将所提测度模型应用于图像阈值分割中, 并根据区间直觉模糊集自身结构特点, 进一步提出一种精炼而高效的像素分类规则及图像区间直觉模糊化算法. 最后, 利用所提测度模型计算图像的区间直觉模糊知识量, 确定最佳分割阈值, 实现图像分割. 实验结果表明, 该基于知识驱动的图像阈值分割方法性能表现稳定、可靠, 所生成的二值图具有更加优良的性能指标, 明显优于其他同类算法. 将知识测度新理论引入图像处理领域, 为该理论在其他相关领域的潜在应用提供了实例.

**关键词:** 区间直觉模糊集; 知识测度; 知识量; 阈值分割; 模糊图像处理

**中图法分类号:** TP18

中文引用格式: 郭凯红, 王紫晴. Hamming-Hausdorff 距离下区间直觉模糊知识测度及应用. 软件学报, 2022, 33(11): 4251-4267. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/6333.htm>

英文引用格式: Guo KH, Wang ZQ. Interval-valued Intuitionistic Fuzzy Knowledge Measure with Applications Based on Hamming-Hausdorff Distance. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2022, 33(11): 4251-4267 (in Chinese). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/6333.htm>

## Interval-valued Intuitionistic Fuzzy Knowledge Measure with Applications Based on Hamming-Hausdorff Distance

GUO Kai-Hong, WANG Zi-Qing

(School of Information, Liaoning University, Shenyang 110036, China)

**Abstract:** A Hamming-Hausdorff distance-based interval-valued intuitionistic fuzzy knowledge measure (IVIFKM) is presented in this paper, upon with a methodology for image thresholding is based so as to achieve a better segmentation result. The latest achievement shows that there are two significant facets of knowledge measurement associated with an intuitionistic fuzzy set (IFS), i.e., the information content and the information clarity. With this understanding, a novel axiomatic system of IVIFKM is proposed. The normalized Hamming-Hausdorff distance is also improved and extended. Combined with the technique for order preference by similarity to ideal solution (TOPSIS), a novel IVIFKM is then established, complying fully with the requirement of the developed axiomatic system. The proposed measure is subsequently applied to image thresholding. Given the structural features of an interval-valued IFS (IVIFS) in itself, a more effective classification rule of pixels and a more efficient algorithm for interval-valued intuitionistic fuzzification of an image are suggested, respectively. The developed measure is finally used to calculate the amount of knowledge associated with the image to determine the best threshold for segmentation. Experimental results show that the developed knowledge-driven methodology, characterized by high stability and reliability, can produce much more satisfactory binary images with excellent performance metrics,

\* 基金项目: 国家自然科学基金(71771110); 教育部社会科学规划基金(16YJA630014)

收稿时间: 2020-11-26; 修改时间: 2021-02-13; 采用时间: 2021-02-28

routinely outperforming other thresholding ones. By this work, the latest IVIFKM theory is introduced into the field of image processing, thus providing a concrete instance for the potential applications of this theory in other related areas.

**Key words:** interval-valued intuitionistic fuzzy set; knowledge measure; amount of knowledge; threshold segmentation; fuzzy image processing

Atanassov<sup>[1]</sup>提出的直觉模糊集(intuitionistic fuzzy set, IFS)是对 Zadeh<sup>[2]</sup>经典模糊集(fuzzy set, FS)的自然推广. Atanassov 等人<sup>[3]</sup>将 IFS 进一步扩展至区间直觉模糊集(interval-valued intuitionistic fuzzy set, IVIFS). 由于 IFS/IVIFS 在处理不确定性问题上具有极大的灵活性, 使得该理论在不同角度得到广泛探索. 特别地, 直觉模糊熵作为近些年一个研究热点, 长期以来倍受研究者关注. 本文不再对模糊熵作进一步讨论, 而是聚焦 IVIFS 环境下独立于熵的知识测度, 以解决某些更加复杂的问题, 它们难以用模糊熵单独处理.

首先, 简要回顾直觉模糊熵的类型及可能存在的不足.

从结构上看, 现存模糊熵主要分为直觉型(intuitionistic-type)模糊熵<sup>[4]</sup>、概率型(probabilistic-type)直觉模糊熵<sup>[5]</sup>以及非概率型(non-probabilistic-type)直觉模糊熵<sup>[6]</sup>. 第 1 类熵的特点是以犹豫度作为熵值的度量标准; 第 2 类熵借用了香农熵(Shannon entropy)的概念; 第 3 类熵在公理的基本结构上与前两者有很大的差别, 其公理系统由经典模糊熵公理推广而来, 沿用了最大熵值的条件, 即系统有最大熵值当且仅当隶属度与非隶属度相等. 但是这种熵也存在一些不足<sup>[7]</sup>, 如: 满足这一公理条件的熵测度在某些特殊情况下无法做出有效的判别; 而且, IFS 引入犹豫度可实现对未知量的描述, 这与经典 FS 有本质区别. 从应用角度看, 直觉模糊熵的公理系统应具有自己的特点. 实际情况是, IFS 的自身复杂性表现在两个方面<sup>[8]</sup>, 即已知信息的模糊性及未知信息的不确定性. 在现有直觉模糊熵框架下, 既无法阐明这两方面之间的作用关系, 也无法实现对它们的整体度量<sup>[8]</sup>, 更无法指明所得的熵值在二者之间的分布情况<sup>[9]</sup>.

针对直觉模糊熵的固有缺陷, Szmídt 等人<sup>[9]</sup>开创性地提出其对立问题, 即直觉模糊知识度量问题. 这里所谓的知识, 是指在特定环境下有价值的信息, 表现为某种有序性、确定性、新颖性. 一般认为, 某系统表现得越模糊, 熵就越大, 对应的知识量就越小. 因此, 知识量通常是对熵值取反获得<sup>[10-12]</sup>. Guo<sup>[13]</sup>则提出一种全新的观点, 认为直觉模糊系统中, 由于非隶属度特别是犹豫度的引入, 使得该环境下这两种测度不再具有严格的数值逻辑关系, 因此上述对直觉模糊熵取反以计算知识量的做法, 并不能准确地反映 IFS 的本质特征. 目前, 针对直觉模糊知识测度的创新研究各自集中在 IFS 自身特性的两个方面: (1) 已知信息(隶属度/非隶属度)及未知信息(犹豫度)固有的模糊性<sup>[9,10,13,14]</sup>; (2) 已知信息所表达的信息量<sup>[11,12]</sup>. 在这些研究中, Szmídt 等人<sup>[9]</sup>提出一种基于直觉模糊熵<sup>[6]</sup>的知识度量模型, 但未涉及知识度量的公理系统. Das 等人<sup>[10]</sup>将上述模型推广到 IVIFS 环境下, 并提出一组依赖模糊熵的直觉模糊知识测度公理. Guo<sup>[13]</sup>引入直觉模糊熵公理的二元偏序条件<sup>[6]</sup>, 提出一种直觉模糊知识测度的公理化定义, 强调信息的模糊性而忽略了信息量. Guo 等人<sup>[14]</sup>进一步将上述定义、公理、模型推广到 IVIFS 环境下. 另一方面, Nguyen<sup>[11,12]</sup>提出一种(区间)直觉模糊知识度量方法, 只考虑隶属度与非隶属度所表达的信息量而忽略了二者间固有的模糊性, 在实际应用中有很大局限性. 需要指出, 上述模型/方法在分析与建模过程中均依赖于直觉模糊熵, 这说明现阶段对 IFS/IVIFS 的知识特征仍缺乏系统、全面的认识. 在最新的研究成果中, Guo 等人<sup>[15]</sup>根据 IFS 自身特性给出了信息清晰度与信息量的形式化定义, 指出并证实了信息清晰度与信息量是与 IFS 知识特征相关联的两个重要方面. 综合考虑这两个方面不仅是科学建立直觉模糊知识测度的关键, 而且能够准确地反映 IFS 的本质特征, 据此建立了原创性直觉模糊知识测度公理体系, 摆脱对模糊熵的依赖.

本文基于 Guo 等人<sup>[15]</sup>关于知识度量的最新思想, 提出一种区间直觉模糊知识测度公理系统, 同时改进并推广直觉模糊环境下标准 Hamming-Hausdorff 距离, 再与 TOPSIS 方法相结合, 建立一种新的满足所提公理系统的区间直觉模糊知识测度. 随后, 将所提测度模型应用于图像阈值分割中, 并根据 IVIFS 自身结构特点, 进一步提出一种精炼高效的像素分类规则及图像区间直觉模糊化算法. 最后, 利用所提测度模型计算图像的区间直觉模糊知识量, 确定最佳分割阈值, 实现图像分割. 实验结果表明, 本文基于知识驱动的图像阈值分割方法性能表现稳定、可靠, 所生成的二值图具有更加优良的性能指标. 目前, (区间)直觉模糊知识测度作为一种

新理论, 主要应用于复杂不确定性决策<sup>[9-15]</sup>. 本文将该理论引入图像处理领域并取得创新性成果, 为其在其他相关领域的潜在应用开创了新例.

本文首先详细回顾直觉模糊知识测度及图像阈值分割的相关工作; 简要介绍相关理论基础后, 基于知识度量的最新思想, 提出新的区间直觉模糊知识测度公理系统, 并建立新的满足所提公理系统的区间直觉模糊知识测度; 然后将所提测度模型应用于图像阈值分割中, 提出基于知识驱动的图像阈值分割方法; 接下来通过图像分割对比实验, 显示本文所提模型及方法的优良性; 最后总结全文, 指出下一步工作.

## 1 图像阈值分割相关工作

图像分割是一种重要的图像分析技术, 是将图像分成各具特性的区域并提取感兴趣目标的过程, 是从图像预处理到图像识别和分析理解的关键步骤. 目前, 已经提出的分割方法大致可分如下几类: 灰度阈值法<sup>[16-26]</sup>、区域生长法<sup>[27]</sup>、聚类分析法<sup>[28]</sup>、边缘检测法<sup>[29]</sup>以及基于某些特定理论的方法<sup>[30]</sup>. 其中, 基于阈值的分割方法具有简单直观、易用高效等优良特点, 最具代表性. 早期的阈值方法直接利用灰度直方图确定分割阈值<sup>[16]</sup>, 适用于背景/前景(目标)布局简单、分布均匀的图像. 随着 Zadeh<sup>[2]</sup>FS 的提出, 模糊理论被广泛应用于阈值方法中<sup>[17-23]</sup>. Sauvola 等人<sup>[17]</sup>及 Bradley 等人<sup>[18]</sup>分别利用自适应方法实现了光照不均图像的阈值分割, 更适于处理文档图片, 所得效果比处理实际复杂图像要好得多. Tobias 等人<sup>[19]</sup>在灰度直方图上建立模糊区域, 将每个灰度值放入相似度最大的类别中, 从而得到最佳分割阈值. Chaira 等人<sup>[20]</sup>基于  $\gamma$ -隶属函数研究了 4 类阈值分割模型, 即最大紧性(compactness)模型、最小模糊度模型、最大相似度模型以及最小散度(divergence)模型. 实验结果显示, 最大相似度模型的分割效果要优于其他 3 种. Tizhoosh<sup>[21]</sup>采用 S 函数作为隶属函数, 以寻找最大超模糊度(ultra-fuzziness, UF)为目标, 实现了基于 II 型模糊集(type-II fuzzy set, T2FS)的图像分割. Pagola 等人<sup>[22]</sup>根据不同专家针对同一图像目标提供的不同隶属度, 建立区间型 T2FS, 再利用最小模糊熵获得最佳分割阈值. Bustince 等人<sup>[23]</sup>提出了一种基于限制等价函数(restricted equivalence function, REF)的平均灰度计算模型, 以实现图像模糊化并据此计算得到分割阈值. 值得注意的是, 基于 REF 的平均灰度是目前实现图像模糊化较为有效的计算模型, 被广泛引用<sup>[24-26]</sup>.

综上可见, 经典 FS 下阈值分割方法的关键问题是隶属函数的选取与计算, 而这一操作在实际应用中总是带有一定程度的犹豫性或不确定性. 事实上, 在经典 FS 框架下, 无法实现对犹豫性或不确定性的考量与计算, 从而催生出 IFS 下阈值分割方法.

目前, IFS 下的图像分割模型/方法尚处研究的起步阶段, 这方面的研究文献并不多见. 这些为数不多的方法<sup>[24-26]</sup>, 无一例外都使用最小直觉模糊熵确定最佳分割阈值. Melo-Pinto 等人<sup>[24]</sup>利用平均灰度模型计算图像像素关于背景/前景的隶属度, 分别建立各灰度值下关于图像背景及前景的两类 IFS, 最后计算它们的最小直觉模糊熵, 获得最佳分割阈值. Ananthi 等人<sup>[25]</sup>提供多种基于 REF 模型的隶属函数, 以确保所建两类 IFS 隶属度的精准性. Ananthi 等人<sup>[26]</sup>将文献[24]的方法推广至 IVIFS 环境中, 但所建 IVIFS 结构不满足定义要求, 最终的分割效果不理想. 必须指出: 上述基于 IFS/IVIFS 的阈值分割方法仅使用犹豫度作为计算直觉模糊熵的唯一参数, 完全忽略了隶属度与非隶属度之间的固有模糊性, 这样计算所得的直觉模糊熵显然不够客观与全面, 由此得到的分割图效果也难尽如人意.

## 2 理论基础

### 2.1 IFS及IVIFS简介

Zadeh<sup>[2]</sup>定义了经典 FS 概念.

定义 1<sup>[2]</sup>. 设  $A'$  是论域  $X$  上的模糊集, 表示为

$$A' = \{ \langle x, \mu_{A'}(x) \rangle | x \in X \},$$

其中, 隶属函数  $\mu_{A'}: X \rightarrow [0, 1]$  表示  $x \in A'$  的隶属程度.

Atanassov<sup>[1]</sup>推广经典 FS, 定义了 IFS 概念.

定义 2<sup>[1]</sup>. 设  $A$  是论域  $X$  上的直觉模糊集, 表示为

$$A = \{ \langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle | x \in X \},$$

其中, 隶属函数  $\mu_A: X \rightarrow [0, 1]$ , 非隶属函数  $\nu_A: X \rightarrow [0, 1]$ , 且对  $\forall x \in X$ , 满足  $\mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1$ . 它们分别表示  $x \in A$  的隶属度与非隶属度, 并由此诱导出另一个参数  $\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x)$ , 称为直觉模糊指数, 表示判断  $x \in A$  的犹豫度或不确定程度. 显然, 对  $\forall x \in X, 0 \leq \pi_A(x) \leq 1$ . 若论域中所有元素都满足  $\mu_A(x) = 1 - \nu_A(x)$ , 则 IFS 退化为经典 FS.

Atanassov 等人<sup>[3]</sup>进一步将 IFS 推广至 IVIFS.

定义 3<sup>[3]</sup>. 设  $\tilde{A}$  是论域  $X$  上的区间直觉模糊集, 表示为

$$\tilde{A} = \{ \langle x, \tilde{\mu}_A(x), \tilde{\nu}_A(x) \rangle | x \in X \},$$

其中,  $\tilde{\mu}_A(x) \subseteq [0, 1], \tilde{\nu}_A(x) \subseteq [0, 1]$ . 对  $\forall x \in X$ , 满足  $\sup \tilde{\mu}_A(x) + \sup \tilde{\nu}_A(x) \leq 1$ . 所诱导的区间犹豫度  $\tilde{\pi}_A(x)$ , 有:

$$\inf \tilde{\pi}_A(x) = 1 - \sup \tilde{\mu}_A(x) - \sup \tilde{\nu}_A(x), \sup \tilde{\pi}_A(x) = 1 - \inf \tilde{\mu}_A(x) - \inf \tilde{\nu}_A(x).$$

如果论域中所有元素都满足  $\inf \tilde{\mu}_A(x) = \sup \tilde{\mu}_A(x), \inf \tilde{\nu}_A(x) = \sup \tilde{\nu}_A(x)$ , 则 IVIFS 退化为 IFS. 为方便使用,

令  $\tilde{\mu}_A(x) = [\mu_A^L(x), \mu_A^U(x)], \tilde{\nu}_A(x) = [\nu_A^L(x), \nu_A^U(x)], \tilde{\pi}_A(x) = [\pi_A^L(x), \pi_A^U(x)]$ , 其中,  $\mu_A^U(x) + \nu_A^U(x) \leq 1$ .

自 IFS 提出后, 关于 IFS 的距离函数已有较为丰富研究成果, 其中, Szmidt 等人<sup>[31]</sup>提出的标准 Hamming 距离被广泛使用. 设  $A, B$  是定义在  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  上的 IFS, 则它们的标准 Hamming 距离为

$$d_{IFS}^H(A, B) = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n (|\mu_A(x_j) - \mu_B(x_j)| + |\nu_A(x_j) - \nu_B(x_j)| + |\pi_A(x_j) - \pi_B(x_j)|) \tag{1}$$

Wang 等人<sup>[32]</sup>肯定了公式(1)的一些优良性质, 同时指出: 在实际应用中, 标准 Hamming 距离会出现某些不适用情况. 为克服这一缺点, 他们引入 Hausdorff 测度, 定义了下面的距离函数:

$$d_{IFS}^{HH}(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left[ \frac{|\mu_A(x_j) - \mu_B(x_j)| + |\nu_A(x_j) - \nu_B(x_j)|}{4} + \frac{\max\{|\mu_A(x_j) - \mu_B(x_j)|, |\nu_A(x_j) - \nu_B(x_j)|\}}{2} \right] \tag{2}$$

这是标准 Hamming 距离与 Hausdorff 距离的组合, 不仅可以满足度量的条件, 还能在实际应用中避免由单一 Hamming 距离产生的不合理结果.

### 2.2 直觉模糊知识测度公理化定义

令  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  为有限论域.  $IFS(X)$  表示定义在  $X$  上的所有 IFS,  $A_i = \langle x_i, \mu_A(x_i), \nu_A(x_i) \rangle$  为  $A \in IFS(X)$  的第  $i$  个元素,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Guo 等人<sup>[15]</sup>指出了与元素  $A_i$  相关的知识量的两个方面, 即信息量及信息清晰度, 分别形式化表示为  $\mu_A(x_i) + \nu_A(x_i)$  和  $|\mu_A(x_i) - \nu_A(x_i)|$ , 并证明了二者的任意有效值组合, 总能够对应于某个特定的  $A_i \in A \in IFS(X)$ . 由此易知: 对于任意  $A \in IFS(X)$ , 其信息量越大且信息越清晰, 与之相伴随的知识量就越丰富. 基于这种理解, 他们提出了独立于模糊熵的原创性直觉模糊知识测度公理化定义, 如下所示.

定义 4<sup>[15]</sup>. 令  $A, B \in IFS(X)$ . 实值函数  $K: IFS(X) \rightarrow [0, 1]$  称为  $IFS(X)$  上的知识测度, 如果  $K$  具有下列性质.

- (KP<sub>IFS1</sub>):  $K(A) = 1$ , 当且仅当  $A$  是明确集;
- (KP<sub>IFS2</sub>):  $K(A) = 0$ , 当且仅当  $\pi_A(x_i) = 1, \forall x_i \in X$ ;
- (KP<sub>IFS3</sub>):  $K(A) \geq K(B)$ , 如果  $A$  相对于  $B$  具有更大、更清晰的信息量, 即  $\mu_A(x_i) + \nu_A(x_i) \geq \mu_B(x_i) + \nu_B(x_i)$  且  $|\mu_A(x_i) - \nu_A(x_i)| \geq |\mu_B(x_i) - \nu_B(x_i)|, \forall x_i \in X$ ;
- (KP<sub>IFS4</sub>):  $K(A) = K(A^c)$ , 其中,  $A^c = \{ \langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle | x \in X \}$  为  $A$  的补集.

由定义 4 易知, 知识量的两个方面在知识测度中发挥重要作用. 注意到, 测度模型  $K$  是关于  $\mu_A(x_i) + \nu_A(x_i)$  和  $|\mu_A(x_i) - \nu_A(x_i)|$  的单调非递减函数, 这实际上为  $K$  的建立与判别提供了一种形式上的检验标准.

### 2.3 REF简介

定义 5<sup>[33]</sup>. 连续函数  $\phi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  称为单位区间上的自同构函数, 如果  $\phi$  严格单调递增且满足边界条件  $\phi(0) = 0, \phi(1) = 1$ .

定义 6<sup>[33]</sup>. 函数  $\psi: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  称为限制等价函数(REF), 如果  $\psi$  具有下列性质.

- (1)  $\psi(x,y)=\psi(y,x), \forall x,y \in [0,1]$ .
- (2)  $\psi(x,y)=1$ , 当且仅当  $x=y$ .
- (3)  $\psi(x,y)=0$ , 当且仅当  $x=1, y=0$ , 或  $x=0, y=1$ .
- (4)  $\psi(x,y)=\psi(c(x),c(y)), \forall x,y \in [0,1]$ , 其中,  $c$  为模糊强否(strong negation)函数.
- (5)  $\psi(x,z) \leq \psi(x,y), \psi(x,z) \leq \psi(y,z)$ , 如果  $x \leq y \leq z, \forall x,y,z \in [0,1]$ .

命题 1<sup>[33]</sup>. 如果  $\psi$  是 REF,  $\phi$  是单位区间自同构函数, 则  $F=\phi \circ \psi$  也是 REF.

### 3 基于改进 Hamming-Hausdorff 距离的区间直觉模糊知识测度

记  $IVIFS(X)$  为定义在  $X$  上的所有  $IVIFS$ . 令  $\tilde{A}_i = \langle x_i, \tilde{\mu}_{\tilde{A}_i}(x_i), \tilde{\nu}_{\tilde{A}_i}(x_i) \rangle$  为  $\tilde{A} \in IVIFS(X)$  的第  $i$  个元素,  $i=1,2,\dots,n$ . 首先, 基于定义 4, 提出区间直觉模糊知识测度的公理化定义.

定义 7. 令  $\tilde{A}, \tilde{B} \in IVIFS(X)$ . 实值函数  $K: IVIFS(X) \rightarrow [0,1]$  称为  $IVIFS(X)$  上的知识测度, 若  $K$  具有下列性质:

- ( $KP_{IVIFS1}$ ):  $K(\tilde{A})=1$ , 当且仅当  $\tilde{A}$  是明确集, 即

$$\tilde{A}_i = \langle [1,1], [0,0] \rangle \text{ 或 } \tilde{A}_i = \langle [0,0], [1,1] \rangle, \forall \tilde{A}_i \in \tilde{A}$$

- ( $KP_{IVIFS2}$ ):  $K(\tilde{A})=0$ , 当且仅当  $\tilde{\pi}_{\tilde{A}_i}(x_i)=[1,1], \forall x_i \in X$ .
- ( $KP_{IVIFS3}$ ):  $K(\tilde{A}) \geq K(\tilde{B})$ , 如果  $\tilde{A}$  相对于  $\tilde{B}$  具有更大、更清晰的信息量, 即

$$\begin{aligned} & \mu_{\tilde{A}}^L(x_i) + \mu_{\tilde{A}}^U(x_i) + \nu_{\tilde{A}}^L(x_i) + \nu_{\tilde{A}}^U(x_i) \geq \mu_{\tilde{B}}^L(x_i) + \mu_{\tilde{B}}^U(x_i) + \nu_{\tilde{B}}^L(x_i) + \nu_{\tilde{B}}^U(x_i) \text{ 且} \\ & |\mu_{\tilde{A}}^L(x_i) - \nu_{\tilde{A}}^L(x_i)| + |\mu_{\tilde{A}}^U(x_i) - \nu_{\tilde{A}}^U(x_i)| \geq |\mu_{\tilde{B}}^L(x_i) - \nu_{\tilde{B}}^L(x_i)| + |\mu_{\tilde{B}}^U(x_i) - \nu_{\tilde{B}}^U(x_i)|, \forall x_i \in X. \end{aligned}$$

- ( $KP_{IVIFS4}$ ):  $K(\tilde{A}) = K(\tilde{A}^c)$ , 其中,  $\tilde{A}^c = \{ \langle x, \tilde{\nu}_{\tilde{A}}(x), \tilde{\mu}_{\tilde{A}}(x) \rangle \mid x \in X \}$  为  $\tilde{A}$  的补集.

上述定义 7 由定义 4 推广而来, 充分考虑了更复杂的区间情形下知识量的两个方面. 显然, 此时模型  $K$  是关于  $\mu_{\tilde{A}}^L(x_i) + \mu_{\tilde{A}}^U(x_i) + \nu_{\tilde{A}}^L(x_i) + \nu_{\tilde{A}}^U(x_i)$  和  $|\mu_{\tilde{A}}^L(x_i) - \nu_{\tilde{A}}^L(x_i)| + |\mu_{\tilde{A}}^U(x_i) - \nu_{\tilde{A}}^U(x_i)|$  的单调非递减函数.

现在建立区间直觉模糊知识测度.

首先, 改进标准 Hamming-Hausdorff 距离.

观察公式(2), 注意到, 标准 Hamming 距离部分仍未考虑元素的犹豫度. 事实上, 在大规模数据处理中, 比如针对图像像素的海量计算中, 这有可能导致计算不够精准.

本文对公式(2)做出修正, 得到改进的标准 Hamming-Hausdorff 距离如下:

$$\bar{d}_{IFS}^{HH}(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left[ \frac{|\mu_A(x_j) - \mu_B(x_j)| + |\nu_A(x_j) - \nu_B(x_j)| + |\pi_A(x_j) - \pi_B(x_j)|}{4} + \frac{\max\{|\mu_A(x_j) - \mu_B(x_j)|, |\nu_A(x_j) - \nu_B(x_j)|\}}{2} \right], A, B \in IFS(X) \quad (3)$$

显然,  $\bar{d}_{IFS}^{HH}(A, B) \in [0,1]$ . 进一步将公式(3)推广到  $IVIFS$  环境中, 得到下列距离函数:

$$\begin{aligned} \bar{d}_{IVIFS}^{HH}(\tilde{A}, \tilde{B}) = & \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left[ \frac{1}{8} (|\mu_{\tilde{A}}^L(x_j) - \mu_{\tilde{B}}^L(x_j)| + |\mu_{\tilde{A}}^U(x_j) - \mu_{\tilde{B}}^U(x_j)| + |\nu_{\tilde{A}}^L(x_j) - \nu_{\tilde{B}}^L(x_j)| + \right. \\ & \left. |\nu_{\tilde{A}}^U(x_j) - \nu_{\tilde{B}}^U(x_j)| + |\pi_{\tilde{A}}^L(x_j) - \pi_{\tilde{B}}^L(x_j)| + |\pi_{\tilde{A}}^U(x_j) - \pi_{\tilde{B}}^U(x_j)|) + \right. \\ & \left. \frac{1}{4} \max\{|\mu_{\tilde{A}}^L(x_j) - \mu_{\tilde{B}}^L(x_j)| + |\mu_{\tilde{A}}^U(x_j) - \mu_{\tilde{B}}^U(x_j)|, |\nu_{\tilde{A}}^L(x_j) - \nu_{\tilde{B}}^L(x_j)| + |\nu_{\tilde{A}}^U(x_j) - \nu_{\tilde{B}}^U(x_j)|\} \right] \quad (4) \end{aligned}$$

显然,  $\bar{d}_{IVIFS}^{HH}(\tilde{A}, \tilde{B}) \in [0,1]$ .

下面利用公式(4), 结合 TOPSIS 思想, 建立新的区间直觉模糊知识测度.

首先考虑单元素情形. 令  $\tilde{A}_i = \langle x_i, \tilde{\mu}_{\tilde{A}_i}(x_i), \tilde{\nu}_{\tilde{A}_i}(x_i) \rangle \in \tilde{A} \in IVIFS(X)$ . 显然, 负理想点为  $\tilde{N} = \langle x_i, [0,0], [0,0] \rangle$ , 两个正理想点为  $\tilde{P}_1 = \langle x_i, [1,1], [0,0] \rangle, \tilde{P}_2 = \langle x_i, [0,0], [1,1] \rangle$ . 由公式(4), 可得:

$$d_{IVIFS}^- = \bar{d}_{IVIFS}^{HH}(\tilde{A}_i, \tilde{N}) = \frac{1}{4}[\mu_{\tilde{A}}^L(x_i) + \mu_{\tilde{A}}^U(x_i) + \nu_{\tilde{A}}^L(x_i) + \nu_{\tilde{A}}^U(x_i) + \max\{\mu_{\tilde{A}}^L(x_i) + \mu_{\tilde{A}}^U(x_i), \nu_{\tilde{A}}^L(x_i) + \nu_{\tilde{A}}^U(x_i)\}],$$

$$d_{1,IVIFS}^+ = \bar{d}_{IVIFS}^{HH}(\tilde{A}_i, \tilde{P}_1) = 1 - \frac{1}{2}[\mu_{\tilde{A}}^L(x_i) + \mu_{\tilde{A}}^U(x_i)],$$

$$d_{2,IVIFS}^+ = \bar{d}_{IVIFS}^{HH}(\tilde{A}_i, \tilde{P}_2) = 1 - \frac{1}{2}[\nu_{\tilde{A}}^L(x_i) + \nu_{\tilde{A}}^U(x_i)].$$

根据 TOPSIS 思想, 需要在  $d_{1,IVIFS}^+$  与  $d_{2,IVIFS}^+$  中选择一个有效的正理想点距离. 注意, 这里关注的是  $\tilde{A}_i$  的知识量而不是  $\tilde{A}_i$  本身值的优劣. 显然,  $\tilde{A}_i$  与  $\tilde{P}_1$  (或  $\tilde{P}_2$ ) 距离越近, 其知识量就越大. 所以, 令:

$$d_{IVIFS}^+ = \min\{d_{1,IVIFS}^+, d_{2,IVIFS}^+\}$$

$$= \min\left\{1 - \frac{1}{2}[\mu_{\tilde{A}}^L(x_i) + \mu_{\tilde{A}}^U(x_i)], 1 - \frac{1}{2}[\nu_{\tilde{A}}^L(x_i) + \nu_{\tilde{A}}^U(x_i)]\right\}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\max\{\mu_{\tilde{A}}^L(x_i) + \mu_{\tilde{A}}^U(x_i), \nu_{\tilde{A}}^L(x_i) + \nu_{\tilde{A}}^U(x_i)\}.$$

进一步计算  $\tilde{A}_i$  关于  $\tilde{P}_1$  (或  $\tilde{P}_2$ ) 的相对贴近度, 以此定义 IVIFS 下新的知识测度模型为

$$K_{IVIFS}(\tilde{A}_i) = \frac{d_{IVIFS}^-}{d_{IVIFS}^- + d_{IVIFS}^+} = \frac{\mu_{\tilde{A}}^L(x_i) + \mu_{\tilde{A}}^U(x_i) + \nu_{\tilde{A}}^L(x_i) + \nu_{\tilde{A}}^U(x_i) + \max\{\mu_{\tilde{A}}^L(x_i) + \mu_{\tilde{A}}^U(x_i), \nu_{\tilde{A}}^L(x_i) + \nu_{\tilde{A}}^U(x_i)\}}{4 + \min\{\mu_{\tilde{A}}^L(x_i) + \mu_{\tilde{A}}^U(x_i), \nu_{\tilde{A}}^L(x_i) + \nu_{\tilde{A}}^U(x_i)\}} \quad (5)$$

显然,  $K_{IVIFS}(\tilde{A}_i) \in [0, 1], i=1, 2, 3, \dots, n$ . 对于  $\tilde{A} \in IVIFS(X)$ , 则有:

$$K_{IVIFS}(\tilde{A}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{IVIFS}(\tilde{A}_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\mu_{\tilde{A}}^L(x_i) + \mu_{\tilde{A}}^U(x_i) + \nu_{\tilde{A}}^L(x_i) + \nu_{\tilde{A}}^U(x_i) + \max\{\mu_{\tilde{A}}^L(x_i) + \mu_{\tilde{A}}^U(x_i), \nu_{\tilde{A}}^L(x_i) + \nu_{\tilde{A}}^U(x_i)\}}{4 + \min\{\mu_{\tilde{A}}^L(x_i) + \mu_{\tilde{A}}^U(x_i), \nu_{\tilde{A}}^L(x_i) + \nu_{\tilde{A}}^U(x_i)\}} \quad (6)$$

**定理 1.** 令  $\tilde{A} \in IVIFS(X)$ . 公式(6)定义的实函数  $K_{IVIFS}(\tilde{A}) \in [0, 1]$  为 IVIFS(X) 上的知识测度.

证明: 以下证明公式(6)严格满足定义 7.

• (KP<sub>IVIFS1</sub>):

令  $\tilde{A}$  是一个明确集, 即对  $\forall x_i \in X, \tilde{\mu}_{\tilde{A}}(x_i) = [1, 1]$  或  $\tilde{\nu}_{\tilde{A}}(x_i) = [1, 1]$ , 所以  $K_{IVIFS}(\tilde{A}) = 1$ .

现令  $K_{IVIFS}(\tilde{A}) = 1$ , 鉴于  $K_{IVIFS}(\tilde{A}_i) \in [0, 1], i=1, 2, \dots, n$ , 则

$$K_{IVIFS}(\tilde{A}) = 1 \Leftrightarrow K_{IVIFS}(\tilde{A}_i) = 1, \tilde{A}_i \in \tilde{A}$$

$$\Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}}^L(x_i) + \mu_{\tilde{A}}^U(x_i) + \nu_{\tilde{A}}^L(x_i) + \nu_{\tilde{A}}^U(x_i) + \max\{\mu_{\tilde{A}}^L(x_i) + \mu_{\tilde{A}}^U(x_i), \nu_{\tilde{A}}^L(x_i) + \nu_{\tilde{A}}^U(x_i)\} = 4 + \min\{\mu_{\tilde{A}}^L(x_i) + \mu_{\tilde{A}}^U(x_i), \nu_{\tilde{A}}^L(x_i) + \nu_{\tilde{A}}^U(x_i)\}$$

$$\Leftrightarrow \max\{\mu_{\tilde{A}}^L(x_i) + \mu_{\tilde{A}}^U(x_i), \nu_{\tilde{A}}^L(x_i) + \nu_{\tilde{A}}^U(x_i)\} = 2$$

$$\Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}}^L(x_i) + \mu_{\tilde{A}}^U(x_i) = 2 \text{ 或 } \nu_{\tilde{A}}^L(x_i) + \nu_{\tilde{A}}^U(x_i) = 2$$

$$\Leftrightarrow \tilde{\mu}_{\tilde{A}}(x_i) = [1, 1] \text{ 或 } \tilde{\nu}_{\tilde{A}}(x_i) = [1, 1], \forall x_i \in X$$

这表示  $\tilde{A}$  是明确集.

• (KP<sub>IVIFS2</sub>):

令  $\tilde{\pi}_{\tilde{A}}(x_i) = [1, 1], \forall x_i \in X$ , 即  $\tilde{\mu}_{\tilde{A}}(x_i) = \tilde{\nu}_{\tilde{A}}(x_i) = [0, 0], \forall x_i \in X$ , 则  $K_{IVIFS}(\tilde{A}) = 0$ .

现令  $K_{IVIFS}(\tilde{A}) = 0$ , 鉴于  $K_{IVIFS}(\tilde{A}_i) \in [0, 1], i=1, 2, 3, \dots, n$ , 则

$$K_{IVIFS}(\tilde{A}) = 0 \Leftrightarrow K_{IVIFS}(\tilde{A}_i) = 0, \tilde{A}_i \in \tilde{A}$$

$$\Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}}^L(x_i) + \mu_{\tilde{A}}^U(x_i) + \nu_{\tilde{A}}^L(x_i) + \nu_{\tilde{A}}^U(x_i) + \max\{\mu_{\tilde{A}}^L(x_i) + \mu_{\tilde{A}}^U(x_i), \nu_{\tilde{A}}^L(x_i) + \nu_{\tilde{A}}^U(x_i)\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \tilde{\mu}_{\tilde{A}}(x_i) = \tilde{\nu}_{\tilde{A}}(x_i) = [0, 0], \tilde{\pi}_{\tilde{A}}(x_i) = [1, 1], \forall x_i \in X$$

• (KP<sub>IVIFS3</sub>):

令  $\mu_{\tilde{A}} = \mu_{\tilde{A}}^L(x_i) + \mu_{\tilde{A}}^U(x_i), \nu_{\tilde{A}} = \nu_{\tilde{A}}^L(x_i) + \nu_{\tilde{A}}^U(x_i), 0 \leq \mu_{\tilde{A}}, \nu_{\tilde{A}} \leq 2$ , 公式(5)则可以表示为

$$\begin{aligned}
K_{IVIFS}(\tilde{A}_i) &= f(\mu_{\tilde{A}_i}, v_{\tilde{A}_i}) \\
&= \frac{\mu_{\tilde{A}_i} + v_{\tilde{A}_i} + \max\{\mu_{\tilde{A}_i}, v_{\tilde{A}_i}\}}{4 + \min\{\mu_{\tilde{A}_i}, v_{\tilde{A}_i}\}} \\
&= \frac{\mu_{\tilde{A}_i} + v_{\tilde{A}_i} + (1/2)(\mu_{\tilde{A}_i} + v_{\tilde{A}_i} + |\mu_{\tilde{A}_i} - v_{\tilde{A}_i}|)}{4 + (1/2)(\mu_{\tilde{A}_i} + v_{\tilde{A}_i} - |\mu_{\tilde{A}_i} - v_{\tilde{A}_i}|)} \\
&= \frac{3(\mu_{\tilde{A}_i} + v_{\tilde{A}_i}) + |\mu_{\tilde{A}_i} - v_{\tilde{A}_i}|}{8 + \mu_{\tilde{A}_i} + v_{\tilde{A}_i} - |\mu_{\tilde{A}_i} - v_{\tilde{A}_i}|}, \quad 0 \leq |\mu_{\tilde{A}_i} - v_{\tilde{A}_i}| \leq \mu_{\tilde{A}_i} + v_{\tilde{A}_i} \leq 2
\end{aligned} \tag{7}$$

根据上式结构, 引入下列实值函数:

$$g(x, y) = \frac{3y + x}{8 + y - x}, \quad 0 \leq x \leq y \leq 2.$$

对  $\forall \tilde{A}_i \in \tilde{A} \in IVIFS(X)$ , 令  $x_{\tilde{A}_i} = |\mu_{\tilde{A}_i} - v_{\tilde{A}_i}|$ ,  $y_{\tilde{A}_i} = \mu_{\tilde{A}_i} + v_{\tilde{A}_i}$ , 则公式(5)、公式(6)可以表示为

$$K_{IVIFS}(\tilde{A}_i) = f(\mu_{\tilde{A}_i}, v_{\tilde{A}_i}) = g(x_{\tilde{A}_i}, y_{\tilde{A}_i}), \quad K_{IVIFS}(\tilde{A}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\mu_{\tilde{A}_i}, v_{\tilde{A}_i}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_{\tilde{A}_i}, y_{\tilde{A}_i}) \tag{8}$$

现考察函数  $g$  的单调性. 显然有:

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = \frac{8 + 4y}{(8 + x - y)^2} > 0, \quad \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = \frac{24 - 4x}{(8 + x - y)^2} > 0, \quad 0 \leq x \leq y \leq 2.$$

这说明函数  $g$  是关于  $x$  和  $y$  的单调递增函数, 即  $g$  是关于  $|\mu_{\tilde{A}_i} - v_{\tilde{A}_i}|$  和  $\mu_{\tilde{A}_i} + v_{\tilde{A}_i}$  的单调递增函数. 根据公式(8),  $K_{IVIFS}$  显然是关于  $|\mu_{\tilde{A}_i}^L(x_i) + \mu_{\tilde{A}_i}^U(x_i) - v_{\tilde{A}_i}^L(x_i) - v_{\tilde{A}_i}^U(x_i)|$  和  $\mu_{\tilde{A}_i}^L(x_i) + \mu_{\tilde{A}_i}^U(x_i) + v_{\tilde{A}_i}^L(x_i) + v_{\tilde{A}_i}^U(x_i)$  的单调递增函数.

注意到:

$$|\mu_{\tilde{A}_i} - v_{\tilde{A}_i}| = |\mu_{\tilde{A}_i}^L(x_i) + \mu_{\tilde{A}_i}^U(x_i) - v_{\tilde{A}_i}^L(x_i) - v_{\tilde{A}_i}^U(x_i)| \leq |\mu_{\tilde{A}_i}^L(x_i) - v_{\tilde{A}_i}^L(x_i)| + |\mu_{\tilde{A}_i}^U(x_i) - v_{\tilde{A}_i}^U(x_i)|.$$

这说明,  $|\mu_{\tilde{A}_i}^L(x_i) + \mu_{\tilde{A}_i}^U(x_i) - v_{\tilde{A}_i}^L(x_i) - v_{\tilde{A}_i}^U(x_i)|$  值的增大蕴含着  $|\mu_{\tilde{A}_i}^L(x_i) - v_{\tilde{A}_i}^L(x_i)| + |\mu_{\tilde{A}_i}^U(x_i) - v_{\tilde{A}_i}^U(x_i)|$  值的增大. 注意, 此时  $K_{IVIFS}(\tilde{A}_i)$  的值也在增大. 所以,  $K_{IVIFS}$  也是关于  $|\mu_{\tilde{A}_i}^L(x_i) - v_{\tilde{A}_i}^L(x_i)| + |\mu_{\tilde{A}_i}^U(x_i) - v_{\tilde{A}_i}^U(x_i)|$  的单调递增函数.

综上所述,  $K_{IVIFS}$  是关于  $\mu_{\tilde{A}_i}^L(x_i) + \mu_{\tilde{A}_i}^U(x_i) + v_{\tilde{A}_i}^L(x_i) + v_{\tilde{A}_i}^U(x_i)$  和  $|\mu_{\tilde{A}_i}^L(x_i) - v_{\tilde{A}_i}^L(x_i)| + |\mu_{\tilde{A}_i}^U(x_i) - v_{\tilde{A}_i}^U(x_i)|$  的单调递增函数. 因此, 给定  $\tilde{A}, \tilde{B} \in IVIFS(X)$ , 如果对  $\forall x_i \in X$  都满足:

$$\begin{aligned}
\mu_{\tilde{A}_i}^L(x_i) + \mu_{\tilde{A}_i}^U(x_i) + v_{\tilde{A}_i}^L(x_i) + v_{\tilde{A}_i}^U(x_i) &\geq \mu_{\tilde{B}_i}^L(x_i) + \mu_{\tilde{B}_i}^U(x_i) + v_{\tilde{B}_i}^L(x_i) + v_{\tilde{B}_i}^U(x_i) \text{ 且} \\
|\mu_{\tilde{A}_i}^L(x_i) - v_{\tilde{A}_i}^L(x_i)| + |\mu_{\tilde{A}_i}^U(x_i) - v_{\tilde{A}_i}^U(x_i)| &\geq |\mu_{\tilde{B}_i}^L(x_i) - v_{\tilde{B}_i}^L(x_i)| + |\mu_{\tilde{B}_i}^U(x_i) - v_{\tilde{B}_i}^U(x_i)|,
\end{aligned}$$

则  $K_{IVIFS}(\tilde{A}) \geq K_{IVIFS}(\tilde{B})$  一定成立.

- (KP<sub>IVIFS4</sub>):

显然成立. □

观察本文所提区间直觉模糊知识测度, 如公式(6)所示, 模型本身似乎并未同时体现出定义 7 所提及的知识量两个方面. 这与 Guo 等人<sup>[15]</sup>的模型不同, 他们直接从这两个方面入手, 构造知识测度非线性参数模型, 对信息量与信息清晰度有直接、完整的体现. 注意到公式(6)经等价变换后可得公式(7), 后者对知识量的两个方面仍然有直接体现. 事实上, 该模型是在改进 Hamming-Hausdorff 距离基础上, 运用 TOPSIS 思想建立得到, 严格满足新提出定义 7 的公理条件. 这表明本文建模方法及所得模型建立在坚实理论上, 具有更高的可靠性与简明性.

## 4 在图像阈值分割中的应用

### 4.1 图像区间直觉模糊化

图像的区间直觉模糊化实际上就是对图像像素归属(前景或背景)的直觉模糊分类. 现有涉及 IFS/IVIFS 的

图像分割文献中<sup>[24-26]</sup>, 通常是针对图像的前景和背景分别构建两类 IFS/IVIFS, 以实现图像直觉模糊化. 事实上, 图像包含大量像素, 模糊化工作极其耗费时间和资源, 应尽量减少不必要的处理过程, 以提高工作效率. 为此, 本文利用 IVIFS 自身结构特点, 建立一类特殊的 IVIFS(而非通常的两类), 提出更加有效的图像直觉模糊化方法, 以减少不必要的工作负载, 构造精练的模糊化实现框架, 最终提高图像处理效率.

设图像  $G$  具有像素维度  $M \times N$ , 其坐标  $(i, j)$  上的像素记为  $p(i, j)$ ,  $0 \leq i \leq M-1, 0 \leq j \leq N-1, 0 \leq p(i, j) \leq L-1$ , 其中,  $L$  代表图像  $G$  的灰度级,  $L-1$  表示最高灰度值. 为方便起见, 下文用  $p$  替代  $p(i, j)$ . 为实现图像  $G$  的区间直觉模糊化, 将建立一类数量为  $L$  的 IVIFS, 记为  $\tilde{G}_l = \{ \langle p, \tilde{\mu}_{\tilde{G}_l}(p), \tilde{\nu}_{\tilde{G}_l}(p) \rangle \mid p \in G \}$ , 实现图像  $G$  的区间直觉模糊化, 其中, 每个  $\tilde{G}_l$  对应灰度值  $l, l=0, 1, \dots, L-1$ . 根据 IVIFS 的自身结构特点, 这里规定:  $\tilde{\mu}_{\tilde{G}_l}(p), \tilde{\nu}_{\tilde{G}_l}(p)$  分别表示阈值为  $l$  时, 像素  $p$  属于图像  $G$  的背景和前景的程度; 而  $\tilde{\pi}_{\tilde{G}_l}(p)$  表示无法判断像素  $p$  属于  $G$  的背景或前景的犹豫程度或不确定程度. 这样, 现有文献中使用两类 IFS/IVIFS 实现图像(区间)直觉模糊化的问题, 这里仅使用一类即可解决.

现在考虑这种图像区间直觉模糊化的基本思想及具体实现方法. 不同于现有文献方法<sup>[23-26]</sup>, 本文不再利用图像  $G$  中像素  $p$  与阈值  $l$  的数值关系计算  $\tilde{\mu}_{\tilde{G}_l}(p)$  或  $\tilde{\nu}_{\tilde{G}_l}(p)$  的值, 而是通过直接比较所谓隶属函数与非隶属函数的参照值来定义  $\tilde{\mu}_{\tilde{G}_l}(p)$  或  $\tilde{\nu}_{\tilde{G}_l}(p)$ , 并设法尽可能地拉大  $\tilde{\mu}_{\tilde{G}_l}(p)$  与  $\tilde{\nu}_{\tilde{G}_l}(p)$  的值间距. 也就是说,  $\tilde{G}_l$  究竟代表  $G$  的背景还是前景并不重要, 事实上,  $\tilde{G}_l$  跟背景/前景没有关系, 这里强调的是在阈值  $l$  下,  $\tilde{G}_l$  中的像素  $p$  如何能够最大限度地实现分类, 而不考虑  $p$  被分类为背景像素还是前景像素. 基于这种理解, 首先利用 REF, 在前述命题 1 条件下定义隶属函数与非隶属函数的参照值, 分别记为  $\hat{\mu}_{G_l}(p), \hat{\nu}_{G_l}(p)$ , 即

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{G_l}(p) &= F\left(\frac{p}{L-1}, \frac{m_b(l)}{L-1}\right) = \phi\left(\psi\left(\frac{p}{L-1}, \frac{m_b(l)}{L-1}\right)\right) \\ \hat{\nu}_{G_l}(p) &= F\left(\frac{p}{L-1}, \frac{m_o(l)}{L-1}\right) = \phi\left(\psi\left(\frac{p}{L-1}, \frac{m_o(l)}{L-1}\right)\right), \quad l=0, 1, \dots, L-1, p \in G \end{aligned} \tag{9}$$

其中,  $m_b(l), m_o(l)$  分别表示在阈值  $l$  下, 图像  $G$  背景与前景的平均灰度值, 具体表示为<sup>[23]</sup>

$$m_b(l) = \frac{\sum_{q=0}^l qh(q)}{\sum_{q=0}^l h(q)}, \quad m_o(l) = \frac{\sum_{q=l+1}^{L-1} qh(q)}{\sum_{q=l+1}^{L-1} h(q)} \tag{10}$$

这里,  $h(q)$  表示在图像  $G$  中灰度值为  $q$  的像素数量. 注意到:

$$0 \leq m_b(l) = \frac{\sum_{q=0}^l qh(q)}{\sum_{q=0}^l h(q)} \leq \frac{\sum_{q=0}^l lh(q)}{\sum_{q=0}^l h(q)} = l < l+1 = \frac{\sum_{q=l+1}^{L-1} (l+1)h(q)}{\sum_{q=l+1}^{L-1} h(q)} \leq \frac{\sum_{q=l+1}^{L-1} qh(q)}{\sum_{q=l+1}^{L-1} h(q)} = m_o(l) \leq L-1.$$

这表明: 利用公式(10), 图像  $G$  的背景与前景总是可以被区分的. 由定义 6 中 REF 的性质可知: 公式(9)中像素  $p$  的灰度值越接近值  $m_b(l)$ (或  $m_o(l)$ ), 参照值  $\hat{\mu}_{G_l}(p)$ (或  $\hat{\nu}_{G_l}(p)$ )就越大. 当  $p=m_b(l)$ (或  $p=m_o(l)$ )时, 则  $\hat{\mu}_{G_l}(p)=1$ (或  $\hat{\nu}_{G_l}(p)=1$ ), 此时像素  $p$  可确定地分类为背景(或前景). 本文取  $\phi(x)=0.5(1+x), \psi(x, y)=1-|x-y|^2, 0 \leq x \leq y \leq 1$ . 公式(9)则具体化为

$$\hat{\mu}_{G_l}(p) = 1 - \frac{1}{2} \left| \frac{p}{L-1} - \frac{m_b(l)}{L-1} \right|^2, \quad \hat{\nu}_{G_l}(p) = 1 - \frac{1}{2} \left| \frac{p}{L-1} - \frac{m_o(l)}{L-1} \right|^2, \quad l=0, 1, \dots, L-1, p \in G \tag{11}$$

其中,  $m_b(l)$ 和  $m_o(l)$ 由公式(10)给出.  $\phi: [0, 1] \rightarrow [0.5, 1]$ 推广自定义 5, 用于增大  $\tilde{\mu}_{\tilde{G}_l}(p)$  与  $\tilde{\nu}_{\tilde{G}_l}(p)$  的值间距, 以获得更好的图像分割效果.

现在考虑如何利用参照值  $\hat{\mu}_{G_l}(p)$  和  $\hat{\nu}_{G_l}(p)$  构造  $\tilde{G}_l = \{ \langle p, \tilde{\mu}_{\tilde{G}_l}(p), \tilde{\nu}_{\tilde{G}_l}(p) \rangle \mid p \in G \}$  首先定义犹豫度  $\tilde{\pi}_{\tilde{G}_l}(p)$ . 不失一般性, 这里假定  $\hat{\mu}_{G_l}(p) \geq \hat{\nu}_{G_l}(p)$ . 可定义像素  $p$  的犹豫区间为



$$\tilde{\pi}_{\tilde{G}_l}(p) = [0, 1 - \max\{\hat{\mu}_{G_l}(p), \hat{\nu}_{G_l}(p)\}] = [0, 1 - \hat{\mu}_{G_l}(p)] \quad (12)$$

这表示在阈值  $l$  下, 无法判断像素  $p$  属于  $G$  的背景或前景的犹豫范围. 为确保  $\tilde{\mu}_{\tilde{G}_l}(p)$  与  $\tilde{\nu}_{\tilde{G}_l}(p)$  呈现出鲜明的对比性, 令  $\tilde{\mu}_{\tilde{G}_l}(p) = [\hat{\mu}_{G_l}(p), 1]$ , 表示在阈值  $l$  下, 参照值  $\hat{\mu}_{G_l}(p)$  较大时, 像素  $p$  应尽可能分类为图像背景的程度范围. 此时对于  $\tilde{\nu}_{\tilde{G}_l}(p)$ , 自然有:

$$\begin{aligned} v_{\tilde{G}_l}^L(p) &= 1 - \mu_{\tilde{G}_l}^L(p) - \pi_{\tilde{G}_l}^U(p) = 1 - \hat{\mu}_{G_l}(p) - (1 - \hat{\mu}_{G_l}(p)) = 0, \\ v_{\tilde{G}_l}^U(p) &= 1 - \mu_{\tilde{G}_l}^U(p) - \pi_{\tilde{G}_l}^L(p) = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

这样, 像素  $p \in G$  在阈值为  $l$  下的区间直觉模糊化可表示为

$$\tilde{\mu}_{\tilde{G}_l}(p) = [\hat{\mu}_{G_l}(p), 1], \tilde{\nu}_{\tilde{G}_l}(p) = [0, 0], \tilde{\pi}_{\tilde{G}_l}(p) = [0, 1 - \hat{\mu}_{G_l}(p)], \hat{\mu}_{G_l}(p) \geq \hat{\nu}_{G_l}(p) \quad (13)$$

下面讨论  $\tilde{\pi}_{\tilde{G}_l}(p)$  的一些其他定义方法, 检验是否可以同样诱导出有效的  $\tilde{\nu}_{\tilde{G}_l}(p)$ .

1) 若定义  $\tilde{\pi}_{\tilde{G}_l}(p) = [1 - \hat{\mu}_{G_l}(p), 1 - \hat{\nu}_{G_l}(p)]$ , 则

$$\begin{aligned} v_{\tilde{G}_l}^L(p) &= 1 - \hat{\mu}_{G_l}(p) - (1 - \hat{\nu}_{G_l}(p)) = \hat{\nu}_{G_l}(p) - \hat{\mu}_{G_l}(p) \leq 0, \\ v_{\tilde{G}_l}^U(p) &= 1 - 1 - (1 - \hat{\mu}_{G_l}(p)) = \hat{\mu}_{G_l}(p) - 1 \leq 0. \end{aligned}$$

显然,  $\tilde{\nu}_{\tilde{G}_l}(p)$  的取值范围不合理.

2) 若定义  $\tilde{\pi}_{\tilde{G}_l}(p) = [0, (1 - \hat{\mu}_{G_l}(p))(1 - \hat{\nu}_{G_l}(p))]$ , 则

$$\begin{aligned} v_{\tilde{G}_l}^L(p) &= 1 - \hat{\mu}_{G_l}(p) - (1 - \hat{\mu}_{G_l}(p))(1 - \hat{\nu}_{G_l}(p)) = (1 - \hat{\mu}_{G_l}(p))\hat{\nu}_{G_l}(p) \geq 0, \\ v_{\tilde{G}_l}^U(p) &= 1 - 1 - 0 = 0. \end{aligned}$$

$\tilde{\nu}_{\tilde{G}_l}(p)$  的取值范围同样不合理.

综上所述, 在  $\hat{\mu}_{G_l}(p) \geq \hat{\nu}_{G_l}(p)$  的情况下, 公式(12)定义的  $\tilde{\pi}_{\tilde{G}_l}(p)$  及其诱导所得公式(13), 是有效的图像区间直觉模糊化算法. 注意到,  $\tilde{\pi}_{\tilde{G}_l}(p)$  的构造在区间直觉模糊化算法中至关重要. 感兴趣的读者可针对  $\tilde{\pi}_{\tilde{G}_l}(p)$  的意义与特性, 尝试新的构造形式与方法, 参考本文思路与具体做法, 检验由  $\tilde{\pi}_{\tilde{G}_l}(p)$  所诱导的模糊化算法的有效性.

类似地, 在  $\hat{\mu}_{G_l}(p) < \hat{\nu}_{G_l}(p)$  的情况下, 有:

$$\tilde{\mu}_{\tilde{G}_l}(p) = [0, 0], \tilde{\nu}_{\tilde{G}_l}(p) = [\hat{\nu}_{G_l}(p), 1], \tilde{\pi}_{\tilde{G}_l}(p) = [0, 1 - \hat{\nu}_{G_l}(p)], \hat{\mu}_{G_l}(p) < \hat{\nu}_{G_l}(p) \quad (14)$$

这表示在阈值  $l$  下, 参照值  $\hat{\nu}_{G_l}(p)$  较大时, 像素  $p$  应尽可能地分类为图像前景的程度范围.

综合公式(13)、公式(14), 即可建立  $\tilde{G}_l = \{\langle p, \tilde{\mu}_{\tilde{G}_l}(p), \tilde{\nu}_{\tilde{G}_l}(p) \rangle \mid p \in G\}$ , 实现图像在阈值  $l$  下的区间直觉模糊化.  $\tilde{G}_l$  中每个元素表示为

$$\langle p, \tilde{\mu}_{\tilde{G}_l}(p), \tilde{\nu}_{\tilde{G}_l}(p) \rangle = \begin{cases} \langle p, [\hat{\mu}_{G_l}(p), 1], [0, 0] \rangle, & \hat{\mu}_{G_l}(p) \geq \hat{\nu}_{G_l}(p) \\ \langle p, [0, 0], [\hat{\nu}_{G_l}(p), 1] \rangle, & \hat{\mu}_{G_l}(p) < \hat{\nu}_{G_l}(p) \end{cases}, l = 0, 1, \dots, L-1, p \in G \quad (15)$$

其中,  $\hat{\mu}_{G_l}(p)$  和  $\hat{\nu}_{G_l}(p)$  由公式(11)给出,  $\tilde{\pi}_{\tilde{G}_l}(p)$  由公式(12)给出. 显然, 每个  $\tilde{G}_l$  的隶属函数与非隶属函数之间具有较大的区间值间距.

#### 4.2 区间直觉模糊图像最佳分割阈值

图像  $G$  经过上述区间直觉模糊化后, 利用公式(6)给出的全新知识测度模型  $K_{IVFS}$ , 计算每个阈值  $l$  下对应的  $\tilde{G}_l$  的知识量,  $l=0, 1, \dots, L-1$ . 根据知识量的计算结果, 选择具有最大知识量的  $\tilde{G}_l$  所对应的阈值  $l^*$ , 作为图像分割的最佳阈值. 这样做的理由是朴素的: 在模糊或不确定系统中, 传递的信息中蕴含的知识量越多, 所表达的内容就越清楚、越明确. 具体到本文,  $\tilde{G}_l$  的知识量越大, 它就越逼近明确集, 即对应阈值  $l$  下, 图像  $G$  中被正确分类为背景或前景的像素就越多, 进而图像的分割效果就越好. 因此, 基于直觉模糊最大知识量的图像分割模型, 无论面对理论分析还是实际应用, 都是经得住检验的.

### 4.3 区间直觉模糊图像分割实现途径

综上, 本文提出 IVIFS 下基于最大知识量的图像分割实现途径.

- 步骤 1. 设灰度级为  $L$  的图像  $G$  具有像素维度  $M \times N$ , 针对每个灰度值  $l$  建立:

$$\tilde{G}_l = \{ \langle p, \tilde{\mu}_{\tilde{G}_l}(p), \tilde{\nu}_{\tilde{G}_l}(p) \rangle \mid p \in G \}, l=0, 1, \dots, L-1.$$

具体地, 对所有像素  $p \in G$ , 利用公式(11)计算参照值  $\hat{\mu}_{G_l}(p)$  和  $\hat{\nu}_{G_l}(p)$ , 再利用公式(15)建立  $\tilde{G}_l$  中每个元素.

- 步骤 2. 利用公式(6)计算每个阈值  $l$  下对应  $\tilde{G}_l$  的知识量,  $l=0, 1, \dots, L-1$ .
- 步骤 3. 根据步骤 2 的计算结果, 选择具有最大知识量的  $\tilde{G}_l$  所对应的阈值  $l^*$ , 作为图像分割的最佳阈值. 如果得到的最佳阈值不唯一, 则取其中值.
- 步骤 4. 利用  $l^*$  实现图像分割.

## 5 实验及对比分析

### 5.1 分割图对比分析

本文实验用图全部来自 Weizmann ([http://www.wisdom.weizmann.ac.il/~vision/Seg\\_Evaluation\\_DB](http://www.wisdom.weizmann.ac.il/~vision/Seg_Evaluation_DB)) 以及 Berkeley (<https://www2.eecs.berkeley.edu/Research/Projects/CS/vision/bsds>) 图库, 它们各自提供超过 200 幅原图及对应的标准分割(ground truth, GT)图. 这里从中随机选取 12 幅灰度图用做实验分析, 利用 MATLAB2018 软件, 依据本文所提测度模型及模糊化算法, 编程实现图像处理与模糊计算. 所选对比方法包括最大知识测度模型( $K_{IVIFS}$ )、最小熵模型(MinEnt2013<sup>[24]</sup>, MinEnt2014<sup>[25]</sup>, MinEnt2018<sup>[26]</sup>)、最大 UF 模型(MaxUF2005<sup>[21]</sup>)、模糊聚类模型(KIFECM2020<sup>[28]</sup>)、概率神经网络仿生增强学习模型(PNNBRL2020<sup>[30]</sup>)、自适应模型(AT2007<sup>[18]</sup>) 等经典方法及近代表性方法等 8 种, 覆盖包括 IVIFS, IFS, T2FS, FS 等不同模糊环境下的应用. 实验结果如图 1 所示. 表头给出方法/模型名称的同时, 还注明每种方法的应用环境.  $l^*$  则为对应方法下二值图的最佳分割阈值(如果有的话).
















编号	原图	GT 图	$K_{IVIFS}$	KIFECM2020 <sup>[28]</sup>	MinEnt2013 <sup>[24]</sup> IFS
1					
			$l^*=155$	/	$l^*=162$
2					
			$l^*=154$	/	$l^*=202$
3					
			$l^*=110$	/	$l^*=215$

图 1 不同方法的分割图

编号	原图	GT 图	$K_{IVIFS}$	KIFECM2020 <sup>[28]</sup>	MinEnt2013 <sup>[24]</sup> IFS
4					
			$l^* = 135$	/	$l^* = 132$
5					
			$l^* = 138$	/	$l^* = 150$
6					
			$l^* = 128$	/	$l^* = 218$
7					
			$l^* = 106$	/	$l^* = 255$
8					
			$l^* = 243$	/	$l^* = 254$
9					
			$l^* = 137$	/	$l^* = 125$
10					
			$l^* = 81$	/	$l^* = 120$
11					
			$l^* = 70$	/	$l^* = 58$
12					
			$l^* = 137$	/	$l^* = 99$

图 1 不同方法的分割图(续 1)

编号	MinEnt2014 <sup>[25]</sup> IFS	MinEnt2018 <sup>[26]</sup> IVIFS	MaxUF2005 <sup>[21]</sup> T2FS	PNNBRL2020 <sup>[30]</sup> IFS	AT2007 <sup>[18]</sup> FS
1					
	$l^* = 135$	$l^* = 232$	$l^* = 144$	/	/

图 1 不同方法的分割图(续 2)


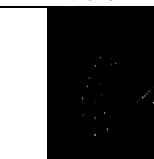

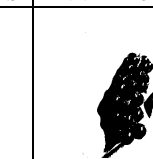
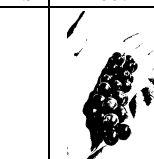



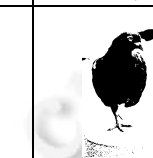


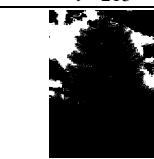



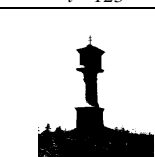

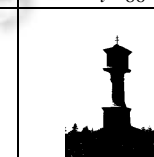
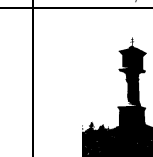
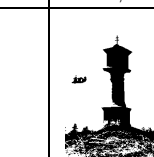
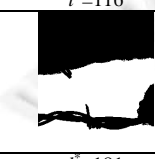

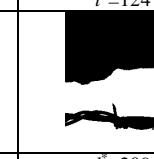
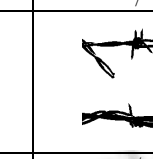
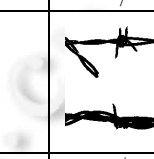
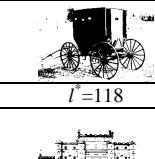
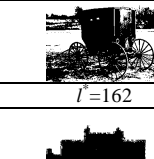
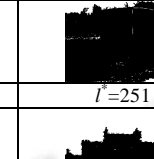
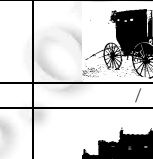
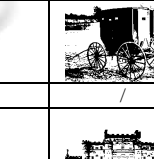
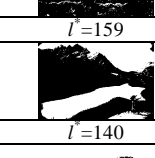
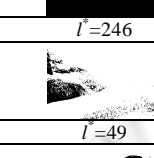
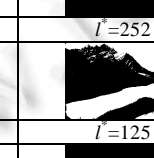

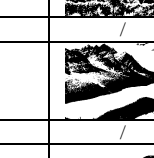
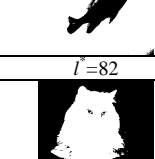
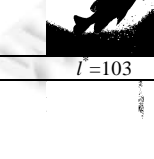

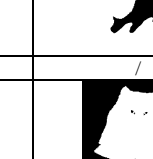

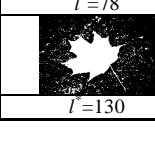
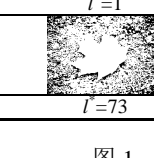
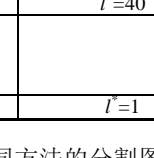
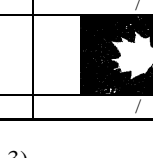
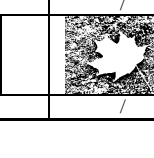





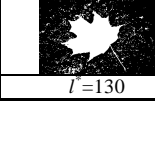
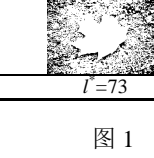
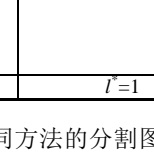
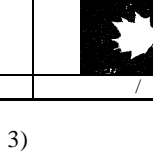

编号	MinEnt2014 <sup>[25]</sup> IFS	MinEnt2018 <sup>[26]</sup> IVIFS	MaxUF2005 <sup>[21]</sup> T2FS	PNNBRL2020 <sup>[30]</sup> IFS	AT2007 <sup>[18]</sup> FS
2					
	$l=158$	$l=242$	$l=199$	/	/
3					
	$l=125$	$l=215$	$l=252$	/	/
4					
	$l=123$	$l=154$	$l=86$	/	/
5					
	$l=116$	$l=172$	$l=124$	/	/
6					
	$l=181$	$l=230$	$l=209$	/	/
7					
	$l=118$	$l=162$	$l=251$	/	/
8					
	$l=159$	$l=246$	$l=252$	/	/
9					
	$l=140$	$l=49$	$l=125$	/	/
10					
	$l=82$	$l=103$	$l=177$	/	/
11					
	$l=78$	$l=1$	$l=40$	/	/
12					
	$l=130$	$l=73$	$l=1$	/	/

图 1 不同方法的分割图(续 3)

由图 1 可清楚地观测到:

- MinEnt2018 分割图效果最差, 几乎无一幅二值图肉眼可辨. 主要原因在于其不合理的图像区间直觉模糊化算法.
- MaxUF2005, AT2007 等分割图整体视觉效果较差, 原因是这些算法不具一般性, 仅对某些特定类型的图像才有效. 注意到, AT2007 没有列出相应的  $l^*$ , 原因是该自适应方法针对图像不同区域产生不同的分割阈值, 无固定取值.
- MinEnt2013, MinEnt2014 对前景、背景对比相对鲜明的图像分割视觉效果较好, 如 No.1, No.4, No.5, No.9, No.11 等; 而对背景相对昏暗的图像分割效果则较差, 如 No.3, No.6, No.7, No.10 等. 说明目前广泛使用的基于最小熵的阈值分割方法在应用上仍有一定局限性.
- KIFECM2020 是一种新的模糊聚类分割算法, 主要针对 MRI 图像, 它不使用阈值实现分割, 因此不涉及阈值. 该算法初始化矩阵在迭代过程中可能存在某些收敛问题, 导致算法性能不稳定, 如 No.4, No.8, No.10 所示.
- PNNBRL2020 则是概率神经网络结合仿生增强学习模型, 主要针对肺部 X 光影像, 它不使用阈值实现分割, 同样不涉及阈值. 该算法总体表现良好, 性能趋于稳定, 但模型使用前需经过大量数据集训练, 过程较为繁琐.
- 相比之下, 本文模型  $K_{IVFS}$  实现简捷, 所产生的二值图全部具有优良的视觉效果, 整个过程中所表现出的高可靠性和满意度, 明显优于其他同类方法. 这是将知识测度应用于图像分割, 即取得显著性效果, 结合该模型的优良表现分析可得, 基于最大知识量的模型及方法在根本上综合考虑了系统的正向性、有序性、确定性等积极信息, 与直觉模糊熵相比具有更大的优势和先进性, 充分表明知识测度新理论在相关领域的潜在应用价值.

## 5.2 性能指标及评价

最后, 考察图 1 中所示二值图的某些关键性能指标, 对以上各方法做出客观、科学的评价. 本文选择包括准确率(accuracy)、 $F1$  得分( $F1$  score)、灵敏度(sensitivity)、特异性(specificity)、PR (precision recall)曲线、ROC (receiver operating characteristic)曲线等 6 种典型指标作为评价依据, 各指标的具体计算模型请参阅文献[34], 这里不再赘述.

图 1 中所列二值图的准确率及  $F1$  得分分别见表 1、表 2. 这里的准确率, 指对于给定的测试数据集, 正确分类的样本数与总样本数之比率.  $F1$  得分则是一种综合指标, 同时考虑了精准确度(precision)与召回率(recall)这两种重要指标, 对分类器的整体性能做出评价, 其中, 精准确度考量误判情况, 本文指正确分类的前景像素数与分类为前景像素总数之比率; 召回率考量遗漏情况, 本文指正确分类的前景像素数与实际前景像素总数之比率. 事实上, 精准确度与召回率这两种指标单独使用时均有一定片面性, 不足以对分类器的整体性能做出有效评价, 通常组合使用构成  $F1$  得分指标. 特别地, 这里对表 1、表 2 中最优指标值做了粗体标记, 以突出对应的模型/方法.

从表 1、表 2 可清楚看到, 指标值的高低与图 1 中二值图视觉效果的优劣完全一致. 根据这些指标值可立即得出: 这 12 组分割图中, 有 9 组最优二值图均来自基于知识测度的分割模型( $K_{IVFS}$ ), 占比 75%, 充分说明这类方法性能的优良性. 同时, 注意到原图 No.6, No.10 的最优二值图来自 AT2007. 事实上, 这两幅图明显光照不均、对比度差、明暗变化不明显, 而 AT2007 采用自适应原理, 针对图像不同区域设置不同阈值, 最擅长处理这类图像, 因此, AT2007 针对这两幅图像可获得较好的分割效果. 另外, 原图 No.5 的最优二值图来自 PNNBRL2020, 主要由于它的灰度分布近似 X 光影像, 经 PNNBRL2020 处理后可得较好的分割结果.

灵敏度与特异性是考量分类器漏判与误判的重要指标, 具体到本文, 用来描述正确分类图像前景与背景的性能, 具体见表 3. 为了清楚简洁, 这里只列出各模型/方法关于这两种指标的平均值. 仔细观察表 3 发现: 本文模型在灵敏度方面没有特别优越于其他方法, 甚至低于 MinEnt2013, 但特异度明显高于其他方法. 回看图 1 发现, 灵敏度相对高的模型/方法产生的二值图, 视觉效果却不一定理想. 进一步研究后得出结论, 即在

本文环境中, 灵敏度为正确分类的前景像素数与实际前景像素总数的比率, 特异性则为正确分类的背景像素数与实际背景像素总数的比率. MinEnt2013 确实可将前景像素分辨出来, 但也将更多的背景像素错分为前景像素, 所以它的灵敏度较高, 但特异性低, 导致该模型整体性能偏低. 相比之下, 基于知识测度的分割模型 ( $K_{IVIFS}$ ) 在区分图像前景与背景过程中, 漏判、误判的像素相对较少, 灵敏度与特异性均有较高数值, 这两组指标值均衡得当、相得益彰, 使得这些模型的整体性能表现优异.

表 1 准确率

编号	$K_{IVIFS}$	KIFECM 2020 <sup>[28]</sup>	MinEnt 2013 <sup>[24]</sup>	MinEnt 2014 <sup>[25]</sup>	MinEnt 2018 <sup>[26]</sup>	MaxUF 2005 <sup>[21]</sup>	PNNBRL 2020 <sup>[30]</sup>	AT 2007 <sup>[18]</sup>
1	<b>0.942 5</b>	0.924 1	0.939 0	0.922 1	0.585 6	0.930 5	0.937 2	0.803 9
2	<b>0.932 4</b>	0.929 0	0.777 0	0.927 8	0.179 4	0.792 6	0.930 3	0.892 1
3	<b>0.959 7</b>	0.957 8	0.457 6	0.952 1	0.446 0	0.260 1	0.956 2	0.825 7
4	<b>0.861 3</b>	0.733 9	0.857 3	0.847 7	0.660 3	0.796 0	0.858 6	0.803 7
5	0.982 7	0.981 2	0.935 3	0.980 9	0.400 0	0.982 6	<b>0.983 0</b>	0.902 0
6	0.975 3	0.945 9	0.475 2	0.655 8	0.246 9	0.555 4	0.973 0	<b>0.981 3</b>
7	<b>0.818 8</b>	0.798 4	0.425 8	0.810 7	0.706 6	0.519 8	0.816 8	0.682 7
8	<b>0.995 7</b>	0.906 1	0.982 5	0.756 1	0.982 5	0.994 0	0.995 1	0.695 2
9	<b>0.953 6</b>	0.953 1	0.951 1	0.952 8	0.516 5	0.951 1	0.952 7	0.857 8
10	0.959 6	0.530 9	0.458 8	0.959 6	0.661 3	0.174 8	0.962 8	<b>0.967 4</b>
11	<b>0.989 2</b>	0.981 9	0.982 8	0.982 6	0.412 6	0.927 6	0.988 6	0.816 3
12	<b>0.951 2</b>	0.941 6	0.757 6	0.936 5	0.448 5	0.181 6	0.950 4	0.559 9

表 2 F1 得分

编号	$K_{IVIFS}$	KIFECM 2020 <sup>[28]</sup>	MinEnt 2013 <sup>[24]</sup>	MinEnt 2014 <sup>[25]</sup>	MinEnt 2018 <sup>[26]</sup>	MaxUF 2005 <sup>[21]</sup>	PNNBRL 2020 <sup>[30]</sup>	AT 2007 <sup>[18]</sup>
1	<b>0.936 9</b>	0.914 6	0.934 4	0.912 2	0.695 0	0.922 5	0.930 5	0.750 7
2	<b>0.823 6</b>	0.817 5	0.601 2	0.815 3	0.293 4	0.618 0	0.820 5	0.722 2
3	<b>0.897 8</b>	0.895 3	0.428 1	0.884 7	0.423 1	0.355 8	0.892 4	0.672 4
4	<b>0.854 2</b>	0.646 6	0.848 6	0.835 1	0.744 5	0.757 3	0.850 3	0.774 3
5	0.971 3	0.968 4	0.900 9	0.967 9	0.496 8	0.971 0	<b>0.971 6</b>	0.812 3
6	0.908 6	0.775 4	0.355 3	0.450 7	0.279 7	0.392 8	0.899 1	<b>0.932 5</b>
7	<b>0.746 0</b>	0.740 0	0.597 3	0.745 8	0.704 5	0.638 5	0.737 5	0.636 9
8	<b>0.996 3</b>	0.913 4	0.985 3	0.739 1	0.985 3	0.994 9	0.995 8	0.651 3
9	<b>0.960 9</b>	0.960 6	0.958 1	0.960 5	0.312 5	0.958 1	0.960 4	0.868 2
10	0.869 9	0.424 9	0.388 1	0.869 9	0.500 8	0.297 5	0.881 1	<b>0.897 8</b>
11	<b>0.986 7</b>	0.978 2	0.979 3	0.978 3	0.581 6	0.918 4	0.986 0	0.808 4
12	<b>0.873 2</b>	0.852 8	0.589 1	0.842 2	0.391 1	0.304 7	0.847 3	0.439 9

表 3 灵敏度与特异性

指标	$K_{IVIFS}$	KIFECM 2020 <sup>[28]</sup>	MinEnt 2013 <sup>[24]</sup>	MinEnt 2014 <sup>[25]</sup>	MinEnt 2018 <sup>[26]</sup>	MaxUF 2005 <sup>[21]</sup>	PNNBRL 2020 <sup>[30]</sup>	AT 2007 <sup>[18]</sup>
灵敏度	0.882 9	0.846 7	0.883 9	0.856 3	0.856 7	0.865 6	0.867 4	0.729 6
特异性	0.966 1	0.918 8	0.784 0	0.877 3	0.431 9	0.684 9	0.972 0	0.911 0

PR 曲线与 ROC 曲线常用于二分类问题中模型有效性的比较, 均采用构图法分别揭示精准度-召回率、假正例率(FPR)-真正例率(即灵敏度, TPR)之间的关系, 其中, PR 曲线越凸向右上方, ROC 曲线越凸向左上方, 对模型/方法的整体性能越好. 本文以此实现所列 8 种模型/方法整体性能的直观比较, 具体如图 2 所示, 从中可清楚看到, 基于知识测度的分割模型 ( $K_{IVIFS}$ ) 所对应的曲线始终处于坐标象限最上方, 表示这类方法具有最佳的整体性能. 其他模型/方法则相形见绌, 特别是 MinEnt2018, 整体性能表现最差.

综上所述: 基于知识测度的模型及方法, 即  $K_{IVIFS}$ , 在整个实验过程中表现简捷、稳定、可靠, 显示出优良的整体性能, 所得图像分割结果明显优于其他方法. 那些基于模糊熵的方法中, MinEnt2013, MinEnt2014 适应性及稳定性较差; KIFECM2020 因为初始化矩阵的迭代收敛性问题, 分割图像质量参差不齐; MaxUF2005, AT2007, PNNBRL2020 虽有一定针对性, 但灵活性、简捷性不够, 不能有效地处理一般图像; MinEnt2018 则因算法本身存在缺陷可能要面临失败. 另外, 从应用环境看, IFS/IVIFS 方法 ( $K_{IVIFS}$ , MinEnt2013, MinEnt2014, KIFECM2020) 整体效果要优于 FS/T2FS 方法 (MaxUF2005, AT2007, PNNBRL2020), 这无疑将激发不确定性建模理论与方法在其他相关领域的进一步研究与发展.

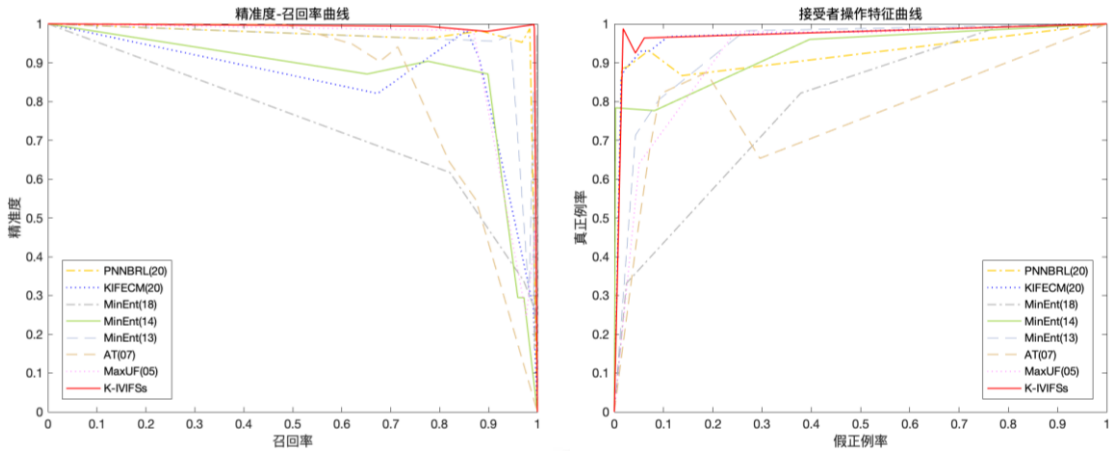


图2 精度-召回率曲线与接受者操作特征曲线

## 6 结论

本文提出一种基于改进 Hamming-Hausdorff 距离的区间直觉模糊知识测度,并应用于图像阈值分割中,获得了更好的图像分割结果.首先,基于知识度量的最新思想,提出新的区间直觉模糊知识测度公理系统.进一步改进并推广标准 Hamming-Hausdorff 距离,结合 TOPSIS 思想,建立满足所提公理系统的新的区间直觉模糊知识测度.随后,将所提知识测度模型应用于图像阈值分割中,并提出一种精炼高效的像素分类规则及图像区间直觉模糊化算法.最后,利用所提知识测度模型计算图像的区间直觉模糊知识量,确定最佳分割阈值,实现图像分割.本文的主要贡献在于:(1)基于知识度量的最新思想,建立新的区间直觉模糊知识测度公理系统,并提出一种具有坚实理论基础支持的有效建模方法,从而保证所得区间直觉模糊知识测度模型的真实可靠与优良性能;(2)提出一种精炼高效的像素分类规则与图像区间直觉模糊化算法,指出该算法能够高质量实现图像分割的关键是确保所构造 IVIFS 的隶属函数与非隶属函数之间有较大的值间距;(3)将知识测度新理论引入图像处理领域并取得了优良效果,为该理论在其他相关领域的潜在应用开创了新例.实验结果表明,本文基于知识驱动模型与方法性能表现简捷、稳定、可靠,所生成的二值图具有更加优良的视觉效果和性能指标,明显优于其他算法的分割结果.未来将尝试知识测度新理论应用于图像去噪等创新工作.

## References:

- [1] Atanassov KT. Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 1986, 20(1): 87–96. [doi: 10.1016/S0165-0114(86)80034-3]
- [2] Zadeh LA. Fuzzy sets. *Information and Control*, 1965, 8(3): 338–353. [doi: 10.1016/S0019-9958(65)90241-X]
- [3] Atanassov KT, Gargov G. Interval valued intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 1989, 31(3): 343–349. [doi: 10.1016/0165-0114(89)90205-4]
- [4] Bustince H, Burillo P. Entropy on intuitionistic fuzzy sets and on interval-valued fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 1996, 78(3): 305–316. [doi: 10.1016/0165-0114(96)84611\_2]
- [5] Hung WL, Yang MS. Fuzzy entropy on intuitionistic fuzzy sets. *Int'l Journal of Intelligent Systems*, 2010, 21(4): 443–451. [doi: 10.1002/int.20131]
- [6] Szmídt E, Kacprzyk J. Entropy for intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, 118(3): 467–477. [doi: 10.1016/s0165-0114(98)00402-3]
- [7] Guo KH, Song Q. On the entropy for Atanassov's intuitionistic fuzzy sets: An interpretation from the perspective of amount of knowledge. *Applied Soft Computing*, 2014, 24: 328–340. [doi: 10.1016/j.asoc.2014.07.006]
- [8] Pal NR, Bustince H, Pagola M, Mukherjee UK, Goswami DP, Beliakov G. Uncertainties with Atanassov's intuitionistic fuzzy sets: Fuzziness and lack of knowledge. *Information Sciences*, 2013, 228: 61–74. [doi: 10.1016/j.ins.2012.11.016]

- [9] Szmidi E, Kacprzyk J, Bujnowski P. How to measure the amount of knowledge conveyed by Atanassov's intuitionistic fuzzy sets. *Information Sciences*, 2014, 257: 276–285. [doi: 10.1016/j.ins.2012.12.046]
- [10] Das S, Dutta B, Guha D. Weight computation of criteria in a decision-making problem by knowledge measure with intuitionistic fuzzy set and interval-valued intuitionistic fuzzy set. *Soft Computing*, 2016, 20(9): 3421–3442. [doi: 10.1007/s00500-015-1813-3]
- [11] Nguyen N. A new knowledge-based measure for intuitionistic fuzzy sets and its application in multiple attribute group decision making. *Expert Systems with Applications*, 2015, 42(22): 8766–8774. [doi: 10.1016/j.eswa.2015.07.030]
- [12] Nguyen N. A new interval-valued knowledge measure for interval-valued intuitionistic fuzzy sets and application in decision making. *Expert Systems with Applications*, 2016, 56: 143–155. [doi: 10.1016/j.eswa.2016.03.007]
- [13] Guo KH. Knowledge measure for Atanassov's intuitionistic fuzzy sets. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 2016, 24(5): 1072–1078. [doi: 10.1109/TFUZZ.2015.2501434]
- [14] Guo KH, Zang J. Knowledge measure for interval-valued intuitionistic fuzzy sets and its application to decision making under uncertainty. *Soft Computing*, 2019, 23(16): 6967–6978. [doi: 10.1007/s00500-018-3334-3]
- [15] Guo KH, Xu H. Knowledge measure for intuitionistic fuzzy sets with attitude towards non-specificity. *Int'l Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 2019, 10(7): 1657–1669.
- [16] Otsu N. A threshold selection method from gray-level histograms. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, 1979, 9(1): 62–66. [doi: 10.1109/TSMC.1979.4310076]
- [17] Sauvola J, Pietikäinen M. Adaptive document image binarization. *Pattern Recognition*, 2000, 33(2): 225–236. [doi: 10.1016/s0031-3203(99)00055-2]
- [18] Bradley D, Roth G. Adaptive thresholding using the integral image. *Journal of Graphics Tools*, 2007, 12(2): 13–21. [doi: 10.1080/2151237X.2007.10129236]
- [19] Tobias OJ, Seara R. Image segmentation by histogram thresholding using fuzzy sets. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2002, 11(12): 1457–1465. [doi: 10.1109/TIP.2002.806231]
- [20] Chaira T, Ray AK. Threshold selection using fuzzy set theory. *Pattern Recognition Letters*, 2004, 25(8): 865–874. [doi: 10.1016/j.patrec.2004.01.018]
- [21] Tizhoosh HR. Image thresholding using type II fuzzy sets. *Pattern Recognition*, 2005, 38(12): 2363–2372. [doi: 10.1016/j.patcog.2005.02.014]
- [22] Pagola M, Lopez-Molina C, Fernandez J, Barrenechea E, Bustince H. Interval type-2 fuzzy sets constructed from several membership functions: application to the fuzzy thresholding algorithm. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 2013, 21(2): 230–244. [doi: 10.1109/TFUZZ.2012.2209885]
- [23] Bustince H, Barrenechea E, Pagola M. Image thresholding using restricted equivalence functions and maximizing the measures of similarity. *Fuzzy Sets and Systems*, 2007, 158(5): 496–516. [doi: 10.1016/j.fss.2006.09.012]
- [24] Melo-Pinto P, Couto P, Bustince H, Barrenechea E, Pagola M, Fernandez J. Image segmentation using Atanassov's intuitionistic fuzzy sets. *Expert Systems with Applications*, 2013, 40(1): 15–26. [doi: 10.1016/j.eswa.2012.05.055]
- [25] Ananthi VP, Balasubramaniam P, Lim CP. Segmentation of gray scale image based on intuitionistic fuzzy sets constructed from several membership functions. *Pattern Recognition*, 2014, 47(12): 3870–3880. [doi: 10.1016/j.patcog.2014.07.003]
- [26] Ananthi VP, Balasubramaniam P, Raveendran P. A thresholding method based on interval-valued intuitionistic fuzzy sets: An application to image segmentation. *Pattern Analysis and Applications*, 2018, 21(4): 1039–1051. [doi: 10.1007/s10044-017-0622-y]
- [27] Wang S, Xia Y, Jiao LC. Mean shift based adaptive texture image segmentation method. *Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software*, 2010, 21(6): 1451–1461 (in Chinese with English abstract). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/3723.htm> [doi: 10.3724/SP.J.1001.2010.03723]
- [28] Kumar D, Agrawal RK, Verma H. Kernel intuitionistic fuzzy entropy clustering for MRI image segmentation. *Soft Computing*, 2020, 24(6): 4003–4026. [doi: 10.1007/s00500-019-04169-y]
- [29] Marmanis D, Schindler K, Wegner J. Classification with an edge: Improving semantic image segmentation with boundary detection. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 2018, 135: 158–172. [doi: 10.1016/j.isprsjprs.2017.11.009]



- [30] Capizzi G, Sciuto GL, Napoli C, Polap D, Wozniak M. Small lung nodules detection based on fuzzy-logic and probabilistic neural network with bio-inspired reinforcement learning. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 2020, 28(6): 1178–1189. [doi: 10.1109/TFUZZ.2019.2952831]
- [31] Szmidi E, Kacprzyk J. Distances between intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 2000, 114: 505–518. [doi: 10.1016/s0165-0114(98)00244-9]
- [32] Wang WQ, Xin XL. Distances measure between intuitionistic fuzzy sets. *Pattern Recognition Letters*, 2005, 26: 2063–2069. [doi: 10.1016/j.patrec.2005.03.018]
- [33] Bustince H, Barrenechea E, Pagola M. Restricted equivalence function. *Fuzzy Sets and Systems*, 2006, 157(7): 2333–2346. [doi: 10.1016/j.fss.2006.03.018]
- [34] Sokolova M, Lapalme G. A systematic analysis of performance measure for classification tasks. *Information Processing and Management*, 2009, 45(4): 427–437. [doi: 10.1016/j.ipm.2009.03.002]

#### 附中文参考文献:

- [27] 王爽, 夏玉, 焦李成. 基于均值漂移的自适应纹理图像分割方法. *软件学报*, 2010, 21(6): 1451–1461. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/3723.htm> [doi: 10.3724/SP.J.1001.2010.03723]



郭凯红(1973—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为不确定性建模与智能计算, 信息融合, 决策理论与方法.



王紫晴(1996—), 女, 硕士生, 主要研究领域为不确定性建模与智能计算, 模糊图像处理.