软件学报 ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
Journal of Software,2017,28(5):1070−1079 [doi: 10.13328/j.cnki.jos.005208]

E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel: +86-10-62562563

正则模型类的时态可定义性*

王善侠[1,3], 马明辉[1], 陈 武[2], 邓辉文[1,2]

[1](西南大学 逻辑与智能研究中心,重庆 400715)
[2](西南大学 计算机与信息科学学院,重庆 400715)
[3](河南师范大学 计算机与信息工程学院,河南 新乡 453007)
通讯作者: 邓辉文, E-mail: huiwend@swu.edu.cn

摘 要: 正则模型是非正规模态逻辑的模型,通过定义正则模型的不相交并、C2t-互模拟、生成子模型、C2t-超滤扩张等模型上的运算,可以证明一个正则模型类在时态语言中可定义当且仅当它在不相交并、满 C2t-互模拟像、C2t-超滤扩张下封闭,并且它的补类在 C2t-超滤扩张下封闭.该刻画定理说明了时态语言在正则模型类上的表达力.
关键词: 正则模型;时态语言;C2t-互模拟;C2t-超滤扩张;时态可定义性
中图法分类号: TP301

中文引用格式: 王善侠,马明辉,陈武,邓辉文.正则模型类的时态可定义性.软件学报,2017,28(5):1070−1079. http://www.jos.org.cn/1000-9825/5208.htm
英文引用格式: Wang SX, Ma MH, Chen W, Deng HW. Temporal definability of regular model classes. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2017,28(5):1070−1079 (in Chinese). http://www.jos.org.cn/1000-9825/5208.htm

Temporal Definability of Regular Model Classes

WANG Shan-Xia[1,3], MA Ming-Hui[1], CHEN Wu[2], DENG Hui-Wen[1,2]

[1](Institute for Logic and Intelligence, Southwest University, Chongqing 400715, China)
[2](School of Computer and Information Science, Southwest University, Chongqing 400715, China)
[3](School of Computer and Information Engineering, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)

Abstract: Regular models are models for non-normal modal logics. By defining some model operations, including disjoint union, C2t-bisimulation, generated submodel, and C2t-ultrafilter extension, this study proves that a class of regular models can be defined in the temporal language if and only if it is closed under disjoint unions, surjective C2t-bisimulations and C2t-ultrafilter extensions, while its complement is closed under ultrafilter extensions. This characterization theorem explains the expressive power of temporal language over regular models.
Key words: regular model; temporal language; C2t-bisimulation; C2t-ultrafilter extension; temporal definability

1977 年,图灵奖获得者 Pnueli 开创性地把时态逻辑引入计算机科学,引发了对系统的动态行为推理的基本模式转变[1],使得时态逻辑成为反应式系统和并发式系统时进行规格说明和验证的工具,在芯片、硬件的设计上被广泛运用.我国唐稚松院士将时态逻辑形式化理论与软件技术结合起来,提出了第 1 个可执行时态逻辑语言 XYZ/E[2].该语言将状态转换的控制机制引入到逻辑系统之中.这一成果是软件工程领域中发展可执行时态逻辑的先驱.段振华教授开发的时态逻辑程序设计语言在并发系统、实时系统、混合系统(形式验证)、互联网计算及嵌入式系统中都有重要应用[3].随着计算机科学的进一步发展,时态逻辑在软件工程、人工智能、模型检测、

* 基金项目: 国家社会科学基金重大项目(14ZDB016)
Foundation item: Major Project of National Social Science Foundation of China (14ZDB016)
收稿时间: 2016-06-30; 修改时间: 2016-09-25; 采用时间: 2016-12-07; jos 在线出版时间: 2017-01-20
CNKI 网络优先出版: 2017-01-20 16:06:32, http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2560.TP.20170120.1606.003.html

信息安全等方面也得到了广泛的应用.

极小时态逻辑 Kt 是一种比较简单的时态逻辑[4].Kt 的语言是在经典命题逻辑语言的基础上加入时态算子 G,H 构成,它们的对偶算子分别定义为 $F\phi:=\neg G\neg\phi$ 和 $P\phi:=\neg H\neg\phi$.公式 $G\phi$ 读作“ϕ将来总是真的”,$H\phi$ 读作“ϕ过去总是真的”,$F\phi$ 读作“ϕ将来可能真”,$P\phi$ 读作“ϕ过去可能真”.极小时态逻辑的语言的框架是一个关系框架 (W,R_F,R_P),其中:W 是非空集,称为框架的域,R_F 和 R_P 是 W 上的二元关系且对任意 $w,v\in W,wR_Fv$ 当且仅当 vR_Pw.关系 R_F 和 R_P 分别用来解释时态算子 G 和 H,wR_Fv 表示 v 是 w 的未来点,vR_Pw 表示 w 是 v 的过去点.

Lemmon 在 1966 年提出了极小非正规模态逻辑 C2[5],它是在极小正规模态逻辑 K 中去掉正规性得到的,即把系统 K 中概括规则替换为单调规则(概括规则:从ϕ推出$\Box\phi$;单调规则:从$\phi\rightarrow\psi$推出$\Box\phi\rightarrow\Box\psi$).它是关系语义学(克里普克语义学)下极小的非正规模态逻辑.在 C2 中,$\Box\top$不是定理,即真不是必然的.雷蒙用正则模型 (W,N,R,V)来解释 C2,其中,$N\subseteq W$ 中的点称为正规点,N 之外的点称为非正规点;$R\subseteq W^2$ 是 W 上的二元关系,用来解释模态算子$\Box$.正则模型是非正规模态逻辑的模型,它与通常的克里普克模型区别在于:正则模型中可以存在非正规点,在非正规的点上,矛盾是可能的.在文献[6]中,我们将 C2 时态化处理,得到极小非正规时态逻辑 C2t,它是 Kt 的子逻辑.该文还构造了 C2t 的带标矢列式系统.

可定义性是模型论的一个核心问题[7],它研究模型类或模型的性质在一个逻辑语言中可定义或可表达的问题.在研究时态逻辑的可定义性问题中,互模拟的概念起着重要作用.互模拟概念也是理论计算机科学的一个重要概念,在计算机科学中有广泛的应用,例如在并发系统的研究中,可以用来证明进程之间的等价性[8].经典模态逻辑的互模拟概念是由荷兰逻辑学家 van Benthem 提出来的[9].关于模态逻辑的互模拟有许多研究成果.Perkov 研究了经典克里普克框架类在基本命题模态语言下的存在可定义性(existential definability)[10];Kurtonina 和 De Rijke 研究了带 U,S 算子的时态逻辑的互模拟[11],其中,$U(\phi,\psi)$读作“直到ϕ,ψ为真”,$S(\phi,\psi)$读作“自从ϕ之后,ψ为真”.Venema 研究了经典模态逻辑的模型类可定义性的刻画问题[12].这些工作主要研究经典的克里普克模型或框架的可定义性问题.本文的主要工作是研究正则模型的互模拟及其在时态语言下的可定义性.首先定义正则模型的不相交并、生成子模型、C2t-互模拟、时态饱和以及时态可定义性等概念,然后证明一个正则模型类是时态可定义的当且仅当它在不相交并、满 C2t-互模拟像、C2t-超滤扩张下封闭,并且它的补类在 C2t-超滤扩张下封闭.

1 语言和语义

时态逻辑的语言$\mathcal{L}_t$由可数命题变元集 $Prop$、命题常量$\bot$、命题联接词$\rightarrow$、时态算子 G 和 H 组成.$\mathcal{L}_t$ 公式由如下规则递归定义:

$$\phi::=p|\bot|(\phi\rightarrow\phi)|G\phi|H\phi,\text{其中},p\in Prop.$$

其他联结词定义如下:

$$\neg\phi:=\phi\rightarrow\bot,\top:=\bot\rightarrow\bot,\phi\vee\psi:=\neg\phi\rightarrow\psi,\phi\wedge\psi:=\neg(\neg\phi\vee\neg\psi),\phi\leftrightarrow\psi:=(\phi\rightarrow\psi)\wedge(\psi\rightarrow\phi),F\phi:=\neg G\neg\phi,P\phi:=\neg H\neg\phi.$$

定义 1. 一个正则框架是 $\mathfrak{F}=(W,N,R_F,R_P)$,其中:$W$ 是一个非空集合;N 是 W 的子集;R_F 和 R_P 是集合 W 上满足下面条件的二元关系:对任意 $w,v\in N,wR_Fv$ 当且仅当 vR_Pw.一个正则模型是 $\mathfrak{M}=(W,N,R_F,R_P,V)$,其中,$(W,N,R_F,R_P)$ 是正则框架框,$V:Prop\rightarrow\mathcal{P}(W)$是从 $Prop$ 到 W 的幂集上的赋值函数.

定义 2. 一个公式ϕ在正则模型 $\mathfrak{M}$ 中点 w 上真(记号 $\mathfrak{M},w\vDash\phi$)递归定义如下.

- $\mathfrak{M},w\vDash p$ 当且仅当 $w\in V(p)$,其中 $p\in Prop$;
- $\mathfrak{M},w\nvDash\bot$;
- $\mathfrak{M},w\vDash\phi\rightarrow\psi$ 当且仅当 $\mathfrak{M},w\nvDash\phi$ 或者 $\mathfrak{M},w\vDash\psi$;
- $\mathfrak{M},w\vDash G\phi$ 当且仅当 $w\in N$ 并且 $\forall v\in W(wR_Fv\Rightarrow\mathfrak{M},v\vDash\phi)$;
- $\mathfrak{M},w\vDash H\phi$ 当且仅当 $w\in N$ 并且 $\forall v\in W(wR_Pv\Rightarrow\mathfrak{M},v\vDash\phi)$.

由定义 2 可得:

- $\mathfrak{M},w\vDash F\phi$ 当且仅当 $w\notin N$ 或者 $\exists v\in W(wR_Fv$ 并且 $\mathfrak{M},w\vDash\phi)$;

- $\mathfrak{M},w\vDash P\phi$当且仅当 $w\notin N$ 或者$\exists v\in W(wR_Pv$ 并且 $\mathfrak{M},w\vDash\phi)$.

令 $V(\phi)=\{w\in W|\mathfrak{M},w\vDash\phi\}$表示使得$\phi$为真的所有点的集合.称$\phi$在正则模型 $\mathfrak{M}$ 上是全局真的(记为 $\mathfrak{M}\vDash\phi$),如果对任意 $w\in W,\mathfrak{M},w\vDash\phi$.称公式集$\Sigma$在 w 上可满足(记为 $\mathfrak{M},w\vDash\Sigma$),如果对任意$\psi\in\Sigma,\mathfrak{M},w\vDash\psi$.称$\Sigma$在一个正则模型类$\mathbb{K}$上可满足,如果存在 $\mathfrak{M}'\in\mathbb{K}$,使得$\Sigma$在 $\mathfrak{M}'$某点上可满足.

2 C2t-互模拟

本节定义正则模型类上的 C2t-互模拟概念,证明时态公式在 C2t-互模拟下保持不变.不相交并、生成子模型等正则模型类上运算都是 C2t-互模拟的特殊情况.

定义 3(时态等价). 令 $\mathfrak{M}=(W,N,R_F,R_P,V)$和 $\mathfrak{M}'=(W',N',R'_F,R'_P,V')$ 是两个正则模型,w 和 w'分别是 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$上的点.w 上的理论 $Th(w)$是在该点上为真的所有公式的集合,即 $Th(w)=\{\phi|\mathfrak{M},w\vDash\phi\}$.称 w 和 w'时态等价(记为 $w\leftrightsquigarrow w'$),如果 $Th(w)=Th(w')$.$\mathfrak{M}$的理论 $Th(\mathfrak{M})$是在 $\mathfrak{M}$所有点上都是真的公式构成的集合,即 $Th(\mathfrak{M})=\{\phi|\mathfrak{M}\vDash\phi\}$.称 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$时态等价(记为 $\mathfrak{M}\leftrightsquigarrow\mathfrak{M}'$),如果 $Th(\mathfrak{M})=Th(\mathfrak{M}')$.

定义 4. 令 $\mathfrak{M}=(W,N,R_F,R_P,V)$和 $\mathfrak{M}'=(W',N',R'_F,R'_P,V')$ 是正则模型.一个非空二元关系 $Z\subseteq W\times W'$称为 $\mathfrak{M}$和 $\mathfrak{M}'$之间的一个 C2t-互模拟(记为 $Z:\mathfrak{M}\leftrightharpoons\mathfrak{M}'$),如果下列条件成立:对任意 $w,v\in W$ 和 $w',v'\in W'$,如果 wZw',那么,

(1) 对任意 $p\in Prop,\mathfrak{M},w\vDash p$ 当且仅当 $\mathfrak{M}',w'\vDash p$;

(2) $w\in N$ 当且仅当 $w'\in N'$;

(3) 如果 wR_Fv,那么存在点 $v'\in W'$满足 $w'R'_Fv'$ 并且 vZv';

(4) 如果 wR_Pv,那么存在点 $v'\in W'$满足 $w'R'_Pv'$ 并且 vZv';

(5) 如果 $w'R'_Fv'$,那么存在点 $v\in W$ 满足 wR_Fv 并且 vZv';

(6) 如果 $w'R'_Pv'$,那么存在点 $v\in W$ 满足 wR_Pv 并且 vZv'.

如果 Z 是 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$之间的一个 C2t-互模拟并且 wZw',那么称 w 和 w'是 C2t-互模拟的,记为 $Z:\mathfrak{M},w\leftrightharpoons\mathfrak{M}',w'$,有时简记为 $w\leftrightharpoons w'$.称 $Z:\mathfrak{M}\leftrightharpoons\mathfrak{M}'$是 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$之间的一个满 C2t-互模拟,如果对任意 $w'\in W'$,存在 $w\in W$ 满足 wZw'.这时称 $\mathfrak{M}'$是 $\mathfrak{M}$ 在满 C2t-互模拟 Z 下的像.

定义 5. 称一个公式集Δ定义一个正则模型类$\mathbb{K}$,如果对任意正则模型 $\mathfrak{M}$,$\mathfrak{M}\in\mathbb{K}$当且仅当 $\mathfrak{M}\vDash\Delta$.称一个正则模型类是时态可定义的,如果存在一个公式集定义该正则模型类.

下面命题表明 C2t-互模拟的两个点是时态等价的.

命题 1. 对任意正则模型 $\mathfrak{M}=(W,N,R_F,R_P,V)$和 $\mathfrak{M}'=(W',N',R'_F,R'_P,V')$,任意 $w\in W$ 和 $w'\in W'$,如果 $w\leftrightharpoons w'$,那么 $w\leftrightsquigarrow w'$.

证明:假设 $w\leftrightharpoons w'$,那么存在 C2t-互模拟关系 $Z:\mathfrak{M},w\leftrightharpoons\mathfrak{M}',w'$.只需证对任意公式$\phi$,$\mathfrak{M},w\vDash\phi$当且仅当$\mathfrak{M}',w'\vDash\phi$.对公式$\phi$进行归纳.$\phi$是原子公式或者$\bot$时,根据 C2t-互模拟定义直接可得.$\phi=\phi_0\to\phi_1$ 时易证.$\phi=G\psi$时,设$\mathfrak{M},w\vDash G\psi$,则 $w\in N$ 并且$\forall v\in W(wR_Fv\Rightarrow\mathfrak{M},v\vDash\psi)$.由于 wZw',所以 $w'\in N'$.设 $v'\in W'$并且 $w'R'_Fv'$,所以存在 $v\in W$,满足 wR_Fv 并且 vZv'.所以 $\mathfrak{M},v\vDash\psi$.由归纳假可得,$\mathfrak{M}',v'\vDash\psi$.因此 $\forall v'\in W'(w'R'_Fv'\Rightarrow\mathfrak{M}',v'\vDash\psi)$.即 $\mathfrak{M}',w'\vDash G\psi$.反方向证明类似.$\phi=H\psi$时的证明和$\phi=G\psi$类似. □

命题 2. 正则模型的时态可定义类在满 C2t-互模拟下是封闭的.

证明:设公式集Σ定义一个正则模型类$\mathbb{K}$,$\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$是任意正则模型并且 $\mathfrak{M}\in\mathbb{K}$.再设 $Z:\mathfrak{M}\leftrightharpoons\mathfrak{M}'$是 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$之间的满 C2t-互模拟.下面证明 $\mathfrak{M}'\in\mathbb{K}$.设任意$\phi\in\Delta$并且任意 $w'\in W'$.由于 $Z:\mathfrak{M}\leftrightharpoons\mathfrak{M}'$是满 C2t-互模拟,所以$\exists w\in W$ 满足 wZw'.又因 $\mathfrak{M}\in\mathbb{K}$,所以 $\mathfrak{M}\vDash\Delta$.所以 $\mathfrak{M}\vDash\phi$.所以 $\mathfrak{M},w\vDash\phi$.根据命题 1,有 $\mathfrak{M}',w'\vDash\phi$.根据$\phi$和 w'的任意性,可得 $\mathfrak{M}'\vDash\Delta$.所以 $\mathfrak{M}'\in\mathbb{K}$. □

对任意一族正则模型,称它们是互不相交的,如果它们的域两两之间没有共同的元素.显然,如果它们的域不是互不相交的,那么总是可以取与它们同构的模型,使得它们的域彼此之间互不相交.

定义 6. 令$\{\mathfrak{M}_i|i\in I\}$是一族正则模型,其中,$\mathfrak{M}_i=(W_i,N_i,R_F^i,R_P^i,V_i)$,$i\in I$.不妨设$\{\mathfrak{M}_i|i\in I\}$是互不相交的.它们的不相交并是$\biguplus_{i\in I}\mathfrak{M}_i=(W,N,R_F,R_P,V)$,其中,

(1) $W=\bigcup_{i\in I}W_i$;

(2) $N=\bigcup_{i\in I}N_i$;

(3) $R_F=\bigcup_{i\in I}R_F^i$;

(4) $R_P=\bigcup_{i\in I}R_P^i$;

(5) $V(p)=\bigcup_{i\in I}V_i(p)$,其中,$p\in Prop$.

命题 3. 任意一族正则模型的不相交并是正则模型.

证明:根据不相交的定义易证. □

命题 4. 正则模型的时态可定义类对不相交并封闭.

证明:设正则模型类$\mathbb{K}$是由公式集Σ定义并且$\{\mathfrak{M}_j|j\in I\}\subseteq\mathbb{K}$.下面证明$\biguplus_{j\in I}\mathfrak{M}_j\in\mathbb{K}$.设任意$\phi\in\Delta$并且任意$w\in\bigcup_{j\in I}W_j$.那么$\exists i\in I,w\in W_i$.容易验证,关系$\{\langle v,v\rangle|v\in W_i\}$是$\mathfrak{M}_i$和$\biguplus_{j\in I}\mathfrak{M}_j$之间的C2t-互模拟.因为$\mathfrak{M}_i\in\mathbb{K}$,所以$\mathfrak{M}_i\vDash\Delta$.因此 $\mathfrak{M}_i,w\vDash\phi$.所以$\biguplus_{j\in I}\mathfrak{M}_j,w\vDash\phi$.所以$\forall\phi\in\Delta$, $\forall w\in\bigcup_{j\in I}W_j$,$\biguplus_{j\in I}\mathfrak{M}_j,w\vDash\phi$, 即$\biguplus_{j\in I}\mathfrak{M}_j\vDash\Delta$.所以$\biguplus_{j\in I}\mathfrak{M}_j\in\mathbb{K}$. □

定义 7. 对任意正则模型 $\mathfrak{M}=(W,N,R_F,R_P,V)$和$\mathfrak{M}'=(W',N',R_F',R_P',V')$,称$\mathfrak{M}'$是$\mathfrak{M}$的子模型,如果$W'\subseteq W$, $N'=N\cap W'$, $R_F'=R_F\cap(W'\times W')$, $R_P'=R_P\cap(W'\times W')$, $V'(p)=V(p)\cap W'$,其中,$p\in Prop$.称$\mathfrak{M}'$是$\mathfrak{M}$的生成子模型,如果$\mathfrak{M}'$是$\mathfrak{M}$的子模型,并且满足下面的封闭条件:如果$w\in W'$并且$w(R_F\cup R_P)v$,那么$v\in W'$.其中,$R_F\cup R_P$表示关系R_F和R_P的并,即对任意$w,v\in W$,$w(R_F\cup R_P)v$当且仅当wR_Fv或者wR_Pv.

递归定义集合W上的二元关系$(R_F\cup R_P)^n$如下.

(1) $w(R_F\cup R_P)^0v$当且仅当$w=v$;

(2) $w(R_F\cup R_P)^{n+1}v$当且仅当$\exists w'\in W$满足$w(R_F\cup R_P)w'$并且$w'(R_F\cup R_P)^nv$.

给定W中的一点w,存在最小的包含w的生成子模型,该生成子模型记为$\mathfrak{M}_w$.易知,$\mathfrak{M}_w$的域是w通过关系$(R_F\cup R_P)$在有穷步内到达的所有点构成的集合.下面给出$\mathfrak{M}_w$的定义:$\mathfrak{M}_w=(W_w,N_w,R_F^w,R_P^w,V_w)$,其中,

(1) $W_w=\{v\in W|w(R_F\cup R_P)^nv,n\in\mathbf{N}\}$;

(2) $N_w=N\cap W_w$;

(3) $R_F^w=R_F\cap(W_w\times W_w)$;

(4) $R_P^w=R_P\cap(W_w\times W_w)$;

(5) $V_w=V(p)\cap W_w$,其中,$p\in Prop$.

其中,$\mathbf{N}$表示自然数集合.

命题 5. 对任意正则模型$\mathfrak{M}$和$\mathfrak{M}$中任意点w.

(1) $\mathfrak{M}$和$\mathfrak{M}_w$之间存在一个满 C2t-互模拟;

(2) $\biguplus_{v\in W}\mathfrak{M}_v$和$\mathfrak{M}$之间存在一个满 C2t-互模拟.

证明:

(1) 容易验证,关系$\{\langle v,v\rangle|v\in W_w\}$是$\mathfrak{M}$和$\mathfrak{M}_w$之间的一个满 C2t-互模拟;

(2) 容易验证,关系$\{\langle v,v'\rangle\mid v\in\biguplus_{w\in W}\mathfrak{M}_w,v'\in\mathfrak{M}$并且$v'$和$v$是相同的点的副本$\}$是$\biguplus_{w\in W}\mathfrak{M}_w$和$\mathfrak{M}$之间的一个满 C2t-互模拟. □

由命题 5 可得如下推论:

推论 1. 如果是$\mathbb{K}$是任意时态可定义的正则模型类,那么对任意正则模型 $\mathfrak{M}$,$\mathfrak{M}\in\mathbb{K}$当且仅当对任意点$w\in\mathfrak{M}$,$\mathfrak{M}_w\in\mathbb{K}$.

证明:假设公式集Σ定义$\mathbb{K}$.下面证从左到右方向:设 $\mathfrak{M}\in\mathbb{K}$.那么 $\mathfrak{M}\vDash\Delta$.设 $w\in W$.再设$\phi\in\Delta,v\in W_w$.那么 $v\in W$.因此 $\mathfrak{M},v\vDash\phi$.根据命题 5(1)的证明,$\{\langle u,u\rangle|u\in W_w\}$是 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}_w$ 之间的满 C2t-互模拟,所以 $\mathfrak{M}_w,v\vDash\phi$.所以$\forall\phi\in\Delta$, $\forall v\in W_w,\mathfrak{M}_w,v\vDash\phi$.所以 $\mathfrak{M}_w\vDash\Delta$.因此 $\mathfrak{M}_w\in\mathbb{K}$.所以$\forall w\in W,\mathfrak{M}_w\in\mathbb{K}$.从右到左方向:设$\forall w\in W,\mathfrak{M}_w\in\mathbb{K}$,因此$\forall w\in W$, $\mathfrak{M}_w\vDash\Delta$.所以$\biguplus_{w\in W}\mathfrak{M}_w\vDash\Delta$.再设 $w\in W$ 并且$\phi\in\Delta$,那么$\biguplus_{w\in W}\mathfrak{M}_w\vDash\phi$.根据命题 5(2),$\biguplus_{w\in W}\mathfrak{M}_w$ 和 $\mathfrak{M}$ 存在满 C2t-互模拟,所以 $\mathfrak{M},w\vDash\phi$.所以$\forall w\in W,\forall\phi\in\Delta,\mathfrak{M},w\vDash\phi$,即 $\mathfrak{M}\vDash\Delta$.所以 $\mathfrak{M}\in\mathbb{K}$. □

3 时态饱和

在模态逻辑中,互模拟蕴涵模态等价,但是反过来不必然成立.在饱和模型类上,两个模态等价的模型是互模拟的[13].在正则时态逻辑中,也可以定义时态饱和的正则模型类,可以证明正则模型类的时态等价蕴涵 C2t-互模拟.

令Σ是一个公式集,$\mathfrak{M}=(W,N,R_F,R_P,V)$是正则模型,并且$A\subseteq W$.称$\Sigma$在 A 上可满足,如果Σ在 A 中某点上可满足;称Σ在 A 上有穷可满足,如果Σ的任意有穷子集在 A 上可满足.

定义 8. 称一个正则模型 $\mathfrak{M}=(W,N,R_F,R_P,V)$是时态饱和的,如果下面的条件成立:对任意 $w\in W$,任意公式集Σ:

(1) 如果 $w\notin N$,那么 $R_F[w]=R_P[w]=\varnothing$;

(2) 如果Σ在 $R_F[w]$上有穷可满足,那么Σ在 $R_F[w]$上可满足;

(3) 如果Σ在 $R_P[w]$上有穷可满足,那么Σ在 $R_P[w]$上可满足.

其中,$\varnothing$表示空集,$R_F[w]=\{v\in W|wR_Fv\}$,$R_P[w]=\{v\in W|wR_Pv\}$.

命题 6. 令 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$是时态饱和的正则模型,并且 w 和 w'分别是 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$上的点.那么 $w\leftrightharpoons w'$当且仅当 $w\leftrightsquigarrow w'$.

证明:

- 从左到右方向是显然的.
- 从右到左方向:

设 $w\leftrightsquigarrow w'$.下面证明时态等价关系$\leftrightsquigarrow$是 C2t-互模拟关系.只需验证$\leftrightsquigarrow$是满足 C2t-互模拟的 4 个条件.第 1 个和第 2 个条件显然成立.第 3 个条件验证如下:假设 $w\leftrightsquigarrow w'$并且 wR_Fv.根据时态饱和的定义,可得 $w\in N$.所以 $w'\in N'$.令$\Sigma=\{\phi|\mathfrak{M},v\vDash\phi\}$.为了证明 v 和 w'的某个后继点时态等价,只需证Σ在 $R'_F[w']$ 上可满足.根据时态饱和的定义,只需证Σ在 $R'_F[w']$ 中有穷可满足.假设Σ_0 是Σ的任意有穷子集,显然 $\mathfrak{M},w\vDash F\psi$,其中,$\psi=\wedge\Sigma_0$.由于 $w\leftrightsquigarrow w'$,所以 $\mathfrak{M}',w'\vDash F\psi$.又因 $w\in N'$,所以$\exists v'\in\mathfrak{M}'$,使得 $w'R'_Fv'$ 并且 $\mathfrak{M}',v'\vDash\psi$.所以$\Sigma_0$ 在 $R'_F[w']$ 上可满足.因此,Σ在 $R'_F[w']$ 上有穷可满足,所以Σ在 $R'_F[w']$ 上可满足.对关系 R_P 验证与 R_F 类似.第 4 个条件的验证与第 3 条类似. □

4 C2t-超滤扩张

在模态逻辑中,一个模型的超滤扩张是模态饱和的[12].在时态逻辑中,本节定义正则模型的 C2t-超滤扩张,并且证明任何正则模型的 C2t-超滤扩张是时态饱和的.

对任意集合 W,集合族 $u\subseteq\mathcal{P}(W)$称为 W 上的超滤子,如果满足下面的条件:

(1) 如果 $A,B\in u$,那么 $A\cap B\in u$;

(2) 如果 $A\in u$ 并且 $A\subseteq B\subseteq W$,那么 $B\in u$;

(3) 对任意 $A\subseteq W,A\in u$ 当且仅当 $A^c\notin u$.

其中,$\mathcal{P}(W)=\{A|A\subseteq W\}$是 W 的幂集,A^c 表示 A 相对于 W 的补集.

对任意集族 $E\subseteq\mathcal{P}(W)$,称 E 具有有穷交性质,如果 E 中任意有穷个集合的交集非空,即如果 $A_i\in E,i\in n$,那么,

$$\bigcap_{i\in n}A_i\neq\varnothing.$$

事实 1. 对任意 $w\in W$,容易验证$\pi_w=\{A\subseteq W|w\in A\}$是 W 上的超滤子,并且称π_w是由 w 生成的主超滤子.对任意

集族 $E\subseteq\mathcal{P}(W)$,如果 E 具有有穷交性质,那么 E 可以扩张为一个超滤子,即存在 W 上的一个超滤子 u,使得 $E\subseteq u$.

事实 2. 如果 $E\subseteq\mathcal{P}(W)$是 W 上的任意超滤子,那么,

(1) 对任意 $A,B\in\mathcal{P}(W)$,有 $A\cup B\in u$ 当且仅当 $A\in u$ 或 $B\in u$.

(2) $W\in u$.

(3) $\varnothing\notin u$.

(4) 如果 u 包含一个有穷集,那么 u 是 W 中的某个元素生成的主超滤子.因此当 W 是有穷集时,其上的超滤子恰好有$|W|$个.

关于事实 1、事实 2 的证明可参考文献[14].

定义 9. 对任意正则框架 $\mathfrak{F}=(W,N,R_F,R_P)$,在 W 幂集上定义 4 个运算如下:

- $F(X):=\{w\in W|w\notin N$ 或者$\exists v\in W(wR_Fv$ 并且 $v\in X)\}$;
- $G(X):=\{w\in W|w\in N$ 并且$\forall v\in W(wR_Fv\Rightarrow v\in X)\}$;
- $P(X):=\{w\in W|w\notin N$ 或者$\exists v\in W(wR_Pv$ 并且 $v\in X)\}$;
- $H(X):=\{w\in W|w\in N$ 并且$\forall v\in W(wR_Pv\Rightarrow v\in X)\}$.

命题 7. 对任意正则框架 $\mathfrak{F}=(W,N,R_F,R_P)$,任意 $X,Y\subseteq W$,有:

(1) $G(X)=(F(X^c))^c$;

(2) $H(X)=(P(X^c))^c$;

(3) $F(X)=(G(X^c))^c$;

(4) $P(X)=(H(X^c))^c$;

(5) $G(X\cap Y)=G(X)\cap G(Y)$并且 $H(X\cap Y)=H(X)\cap H(Y)$;

(6) 如果 $X\subseteq Y$,那么 $G(X)\subseteq G(Y)$并且 $H(X)\subseteq H(Y)$.

证明:根据 F,G,P,H 的定义易证. □

定义 10(C2t-超滤扩张). 对任意正则框架 $\mathfrak{F}=(W,N,R_F,R_P)$,结构 $ue\mathfrak{F}=(Uf(W),N^{ue},R_F^{ue},R_P^{ue})$ 称为 $\mathfrak{F}$ 的 C2t-超滤扩张,其中,

(1) $Uf(W):=\{u|u$ 是 W 上的超滤子$\}$;

(2) $N^{ue}:=\{u\in Uf(W)|N\in u\}$;

(3) $u_0\in N^{ue}$ 时,$u_0R_F^{ue}u_1$ 当且仅当$\{A|G(A)\in u_0\}\subseteq u_1$;

(4) $u_0\notin N^{ue}$ 时,$R_F^{ue}[u_0]=\varnothing$;

(5) $u_0\in N^{ue}$ 时,$u_0R_P^{ue}u_1$ 当且仅当$\{A|H(A)\in u_0\}\subseteq u_1$;

(6) $u_0\notin N^{ue}$ 时,$R_P^{ue}[u_0]=\varnothing$.

命题 8. 对任意 $u_0,u_1\in Uf(W)$:

(1) 如果 $u_0\in N^{ue}$,那么 $u_0R_F^{ue}u_1$ 当且仅当$\{F(A)|A\in u_1\}\subseteq u_0$;

(2) 如果 $u_0\in N^{ue}$,那么 $u_0R_P^{ue}u_1$ 当且仅当$\{P(A)|A\in u_1\}\subseteq u_0$;

(3) 如果 $G(A)\in u_0$,那么 $u_0\in N^{ue}$ 并且对任意 $v\in Uf(W)$, $u_0R_F^{ue}v$ 蕴涵 $A\in v$;

(4) 如果 $H(A)\in u_0$,那么 $u_0\in N^{ue}$ 并且对任意 $v\in Uf(W)$, $u_0R_P^{ue}v$ 蕴涵 $A\in v$.

证明:

(1) 设 $u_0\in N^{ue}$,再设 $u_0R_F^{ue}u_1$ 并且 $A\in u_1$.由超滤子定义可知,$A^c\notin u_1$.由 $u_0R_F^{ue}u_1$ 定义可知,$G(A^c)\notin u_0$.所以$(G(A^c))^c\in u_0$.因此 $F(A)\in u_0$.反过来,设$\{F(A)|A\in u_1\}\subseteq u_0$ 并且 $G(A)\in u_0$.由命题 7(1)可得,$(F(A^c))^c\in u_0$.所以 $F(A^c)\notin u_0$.所以 $A^c\notin u_1$.因此 $A\in u_1$.所以 $u_0R_F^{ue}u_1$.

(2) 证明与(1)类似.

(3) 设 $G(A)\in u_0$.因为 $G(A)=\{w\in W|w\in N$ 并且$\forall v\in W(wR_Fv\Rightarrow v\in A)\}$,所以 $G(A)\subseteq N$.所以 $N\in u_0$.因此 $u_0\in N^{ue}$.再

设 $u_0R_F^{ue}v$,那么$\{B|G(B)\in u_0\}\subseteq v$.因为 $G(A)\in u_0$,所以 $A\in v$.

(4) 证明与(3)类似. □

命题 9. 对任意集合 $A\subseteq W$,任意超滤子 $u_0\in Uf(W)$:

(1) 如果 $F(A)\in u_0$,那么 $u_0\notin N^{ue}$ 或者存在 $u_1\in Uf(W)$使得 $u_0R_F^{ue}u_1$ 并且 $A\in u_1$;

(2) 如果 $P(A)\in u_0$,那么 $u_0\notin N^{ue}$ 或者存在 $u_1\in Uf(W)$使得 $u_0R_P^{ue}u_1$ 并且 $A\in u_1$.

证明:设 $F(A)\in u_0$ 并且 $u_0\notin N^{ue}$.下面构造超滤子 u_1 使得 $u_0R_F^{ue}u_1$ 并且 $A\in u_1$.

令 $u_1'=\{A\}\cup\{B\mid GB\in u_0\}$.下面证明 u_1' 具有有穷交性质.假设 u_1' 不具有有穷交性质,那么存在自然数 n,使得 $A\cap B_1\cap\ldots\cap B_n=\varnothing$,其中 $B_i\in\{B|GB\in u_0\},i\leqslant n$.所以 $B_1\cap\ldots\cap B_n\subseteq A^c$.因此 $G(B_1\cap\ldots\cap B_n)\subseteq G(A^c)$.所以 $G(B_1)\cap\ldots\cap G(B_n)\subseteq G(A^c)$.因为 $G(B_i)\in u_0,i\leqslant n$.所以 $G(B_1)\cap\ldots\cap G(B_n)\in u_0$.所以 $G(A^c)\in u_0$.因此$(G(A^c))^c\notin u_0$.根据命题 7(3),$F(A)\notin u_0$,这与假设矛盾.所以 u_1' 具有有穷交性质.因此 u_1' 可以扩张为一个超滤子 u_1.由 u_1 的构造可知,$u_0R_F^{ue}u_1$ 并且 $A\in u_1$.

(2)的证明与(1)类似. □

命题 10. 对任意正则框架 $\mathfrak{F}=(W,N,R_F,R_P)$,它的 C2t-超滤扩张 $ue\mathfrak{F}=(Uf(W),N^{ue},R_F^{ue},R_P^{ue})$ 是正则框架.

证明:设 $u_0,u_1\in N^{ue}$,再设 $u_0R_F^{ue}u_1$ 并且 $H(A)\in u_1$.由命题 8(1)可得,$F(H(A))\in u_0$.容易验证 $N^c\cup(F(H(A)))^c\cup A=W\in u_0$.由于 u_0 是超滤子并且 $F(H(A))\in u_0,N\in u_0$.根据事实 2,$A\in u_0$.因此 $u_1R_P^{ue}u_0$.反过来,设 $u_1R_P^{ue}u_0$ 并且 $A\in u_1$.容易验证 $N^c\cup A^c\cup H(F(A))=W\in u_1$.由于 u_1 是超滤子并且 $N\in u_1,A\in u_1$.根据事实 2,$H(F(A))\in u_1$.所以 $F(A)\in u_0$.因此 $u_0R_F^{ue}u_1$. □

定义 11. 对任意正则模型 $\mathfrak{M}=(\mathfrak{F},V)$,$ue\mathfrak{M}=(ue\mathfrak{F},V^{ue})$称为 $\mathfrak{M}$ 的 C2t-超滤扩张,其中 V^{ue} 定义为

$$V^{ue}(p)=\{u\in Uf(W)|V(p)\in u\},\text{对任意 } p\in Prop.$$

显然,任意正则模型的 C2t-超滤扩张是正则模型.

命题 11. 对任意正则模型 $\mathfrak{M}=(\mathfrak{F},V)$,任意公式$\phi$以及 W 上超滤子 u,有:

$$V(\phi)\in u \text{ 当且仅当 } ue\mathfrak{M},u\vDash\phi.$$

证明:对公式ϕ进行归纳.ϕ是原子命题或者$\perp$时,根据 C2t-超滤扩张定义易得.$\phi=\phi_0\to\phi_1$ 时易证.$\phi=G\psi$时,从左到右方向:设 $V(G\psi)\in u$.那么 $G(V(\psi))\in u$.所以 $u\in N^{ue}$ 并且对任意超滤子 v,如果 $uR_F^{ue}v$,那么 $V(\psi)\in v$.再设 v 是任意超滤子并且 $uR_F^{ue}v$,那么 $V(\psi)\in v$.根据归纳假设,$ue\mathfrak{M},v\vDash\psi$,所以 $\forall v(uR_F^{ue}v\Rightarrow ue\mathfrak{M},v\vDash\psi)$,即 $ue\mathfrak{M},u\vDash G\psi$.从右到左方向:设 $ue\mathfrak{M},u\vDash G\psi$,那么 $u\in N^{ue}$ 并且 $\forall v(uR_F^{ue}v\Rightarrow ue\mathfrak{M},v\vDash\psi)$.再设 $G(V(\psi))\notin u$.所以$(G(V(\psi)))^c\in u$.因此 $F((V(\psi))^c)\in u$.由于 $u\in N^{ue}$,所以存在超滤子 v,使得 $uR_F^{ue}v$ 并且$(V(\psi))^c\in v$.所以 $ue\mathfrak{M},v\vDash\psi$.根据归纳假设可得,$V(\psi)\in v$.这与$(V(\psi))^c\in v$ 矛盾.所以 $G(V(\psi))\in u$,即 $V(G\psi)\in u$.$\phi=H\psi$时,证明与上面类似. □

命题 12. 对任意正则模型 $\mathfrak{M}$ 和其中任意点 w,有 $w\leftrightsquigarrow\pi_w$.

证明:只需证对任意 $w\in W$ 和任意ϕ,$\mathfrak{M},w\vDash\phi$当且仅当 $ue\mathfrak{M},\pi_w\vDash\phi$.从左到右方向:假设 $\mathfrak{M},w\vDash\phi$.那么 $w\in V(\phi)$,所以 $V(\phi)\in\pi_w$.根据命题 11,有 $ue\mathfrak{M},\pi_w\vDash\phi$.从右到左方向:假设 $ue\mathfrak{M},\pi_w\vDash\phi$.那么 $V(\phi)\in\pi_w$.根据命题 11,有 $w\in V(\phi)$,所以 $\mathfrak{M},w\vDash\phi$. □

命题 13. 对任意公式ϕ和任意正则模型 $\mathfrak{M}$,$\mathfrak{M}\vDash\phi$当且仅当 $ue\mathfrak{M}\vDash\phi$.

证明:从左到右方向:设 $\mathfrak{M}\vDash\phi$.那么 $V(\phi)=W$.因为 W 属于 W 上任意超滤子,再根据命题 11,对任意 $u\in Uf(W)$,$ue\mathfrak{M},u\vDash\phi$,所以 $ue\mathfrak{M}\vDash\phi$.从右到左方向:设 $\mathfrak{M}\nvDash\phi$.那么$\exists w\in W,\mathfrak{M},w\nvDash\phi$.根据命题 12,$ue\mathfrak{M},\pi_w\nvDash\phi$.所以 $ue\mathfrak{M}\nvDash\phi$. □

命题 14. 正则模型的时态可定义类和它的补类在 C2t-超滤扩张下封闭.

证明:从命题 13 显然可得. □

命题 15. 对任意正则模型 $\mathfrak{M}$,$ue\mathfrak{M}$是时态饱和的.

证明:令 $\mathfrak{M}=(W,N,R_F,R_P,V)$是任意正则模型.下面验证 $ue\mathfrak{M}=(Uf(W),N^{ue},R_F^{ue},R_P^{ue},V^{ue})$ 满足时态饱和的 3 个条件.

饱和条件 1:根据 C2t-超滤扩张的定义显然可得.

饱和条件 2:设$\varSigma$是任意公式集,u 是 W 上任意超滤子,再设$\varSigma$在 $R_F^{ue}[u]$ 上有穷可满足,那么对$\varSigma$的任意有穷子

集Σ_0,存在点 $v\in Uf(W)$,使得 $uR_F^{ue}v$ 并且 $ue\mathfrak{M},v\vDash\Sigma_0$.因为$\Sigma$总是存在有穷子集的,所以 u 在关系 R_F^{ue} 下存在后继点.根据 C2t-超滤扩张的定义,有 $u\in N^{ue}$.因为如果 $u\notin N^{ue}$,那么 u 不存在后继点.

令 $B=\{V(\phi)|\phi\in\Sigma\}\cup\{A|G(A)\in u\}$.下面证 B 有有穷交性质.

设$\phi_1,\ldots,\phi_n\in\Sigma$,因为$\phi_1\wedge\ldots\wedge\phi_n$ 在 $R_F^{ue}[u]$ 可满足,所以 $V(\phi_1)\cap\ldots\cap V(\phi_n)=V(\phi_1\wedge\ldots\wedge\phi_n)\neq\varnothing$;并且对任意 $G(A_1),\ldots,G(A_m)\in u,A_1\cap\ldots\cap A_m\neq\varnothing$.因为假设不然,$G(A_1\cap\ldots\cap A_m)=G(\varnothing)$.根据命题 7(5),$G(A_1)\cap\ldots\cap G(A_m)=G(\varnothing)$.所以 $G(\varnothing)\in u$.因为 u 在关系 R_F^{ue} 下存在后继点,不妨记其中一个后继点为 u'.根据命题 8(3),有$\varnothing\in u'$.但这是不可能的.

所以,要证 B 有有穷交性质,只需证 $V(\phi_1)\cap\ldots\cap V(\phi_n)\cap A_1\cap\ldots\cap A_m\neq\varnothing$.因为$\{\phi_1,\ldots,\phi_n\}$在 $R_F^{ue}[u]$上可满足,所以存在 $v\in Uf(W)$,满足 $uR_F^{ue}v$ 并且 $ue\mathfrak{M},v\vDash(\phi_1\wedge\ldots\wedge\phi_n)$.根据命题 11,$V(\phi_1\wedge\ldots\wedge\phi_n)\in v$;又因 $G(A_1),\ldots,G(A_m)\in u$ 并且 $uR_F^{ue}v$,根据命题 8(3),所以 $A_1,\ldots,A_m\in v$.所以 $V(\phi_1)\cap\ldots\cap V(\phi_n)\cap A_1\cap\ldots\cap A_m\neq\varnothing$.所以 B 可以扩张为一个超滤子 v.根据 B 的构造,显然有 $uR_F^{ue}v$ 并且 $ue\mathfrak{M},v\vDash\Sigma$.所以$\Sigma$在 $R_F^{ue}[u]$ 可满足.

饱和条件 3:与饱和条件 2 的验证类似. □

命题 16. 令 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{N}$ 是两个正则模型,w 和 v 分别是 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{N}$ 中的点,那么 w 和 v 时态等价当且仅当它们相应的主超滤子是 C2t-互模拟的,即:

$$\mathfrak{M},w\leftrightsquigarrow\mathfrak{N},v \text{ 当且仅当 } ue\mathfrak{M},\pi_w\leftrightharpoons ue\mathfrak{N},\pi_v.$$

证明:根据命题 12,$\mathfrak{M},w\leftrightsquigarrow\mathfrak{N},v$ 当且仅当 $ue\mathfrak{M},\pi_w\leftrightsquigarrow ue\mathfrak{N},\pi_v$.根据命题 6 和命题 15,$ue\mathfrak{M},\pi_w\leftrightsquigarrow ue\mathfrak{N},\pi_v$ 当且仅当 $ue\mathfrak{M},\pi_w\leftrightharpoons ue\mathfrak{N},\pi_v$. □

5 时态可定义性

本节运用前面定义的正则模型类上的运算,证明一个正则模型类在时态语言中的可定义性的刻画定理.

引理 1. 对任意正则模型 $\mathfrak{M}'=(W',N',R_F',R_P',V')$ 和 $\mathfrak{M}=(W,N,R_F,R_P,V)$,如果 $\mathfrak{M}$ 是由点 w 生成的,即 $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_w$,并且 $Z:\mathfrak{M}',w'\leftrightharpoons\mathfrak{M}_w,w$,那么 Z 是满 C2t-互模拟.

证明:设 $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_w$ 并且 $Z:\mathfrak{M}',w'\leftrightharpoons\mathfrak{M}_w,w$.再设 $v\in\mathfrak{M}_w$.那么存在自然数 n,使得 $w(R_F\cup R_P)^n v$.下面证明 $\mathfrak{M}'$中存在某点和 v,有 C2t-互模拟关系.对 n 进行归纳.n=0,那么 w=v.显然,根据假设,w'和 w 有 C2t-互模拟关系.假设 $w(R_F\cup R_P)^{n+1}v$.那么存在 $w_0\in\mathfrak{M}_w$,使得 $w(R_F\cup R_P)^n w_0$ 并且 $w_0(R_F\cup R_P)^n v$.根据归纳假设,存在 $w_0'\in\mathfrak{M}'$,使得 $w_0'\leftrightharpoons w_0$.又因为 $w_0(R_F\cup R_P)^n v$,所以 w_0R_Fv 或者 w_0R_Pv.分两种情况讨论:第 1 种情况,w_0R_Fv,那么根据 C2t-互模拟的定义,存在 $v'\in\mathfrak{M}'$,使得 $w_0'R_F'v'$ 并且 $v'\leftrightharpoons v$;第 2 种情况,w_0R_Pv,同理,存在 $v''\in\mathfrak{M}'$,使得 $w_0'R_F'v''$ 并且 $v''\leftrightharpoons v$.因此,在两种情况下,v 和 $\mathfrak{M}'$中的点都存在 C2t-互模拟关系,所以 Z 是一个满 C2t-互模拟. □

定理 1. 正则模型类是时态可定义的当且仅当它在不相交并、满 C2t-互模拟以及 C2t-超滤扩张下封闭,并且它的补类也在 C2t-超滤扩张下封闭.

证明:

- 从左到右方向:由命题 2、命题 4、命题 14 可得.
- 从右到左方向:

设正则模型类$\mathbb{K}$在不相交并、满 C2t-互模拟像、C2t-超滤扩张下封闭,并且$\mathbb{K}$的补类在 C2t-超滤扩张下封闭.定义 $\Theta_{\mathbb{K}}=\{\phi\mid\mathbb{K}\vDash\phi\}$.下面证明 $\Theta_{\mathbb{K}}$ 定义$\mathbb{K}$,即对任意正则模型 $\mathfrak{M}$,$\mathfrak{M}\vDash\Theta_{\mathbb{K}}$ 当且仅当 $\mathfrak{M}\in\mathbb{K}$.

($\Leftarrow$)直接根据定义可得.

($\Rightarrow$)假设 $\mathfrak{M}\vDash\Theta_{\mathbb{K}}$,下面分情况考虑:

第 1 种情况:$\mathfrak{M}$是时态饱和的并且 $\mathfrak{M}$ 是点生成模型.不妨设 $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_w$,其中,$w$ 是 $\mathfrak{M}$的点.令$\Sigma=\{\sigma|\mathfrak{M},w\vDash\sigma\}$.下面证$\mathbb{K}$中存在一个时态饱和模型满足$\Sigma$.

易证:对任意公式$\sigma\in\Sigma$,存在正则模型 $\mathfrak{N}_\sigma\in\mathbb{K}$满足$\sigma$.因为假设不然,那么存在公式$\sigma_0\in\Sigma$,$\mathbb{K}$所有模型都不满足$\sigma_0$.所以,$\neg\sigma_0$ 在$\mathbb{K}$中所有模型上都是全局真的.所以 $\neg\sigma_0\in\Theta_{\mathbb{K}}$.根据假设,$\mathfrak{M},w\nvDash\sigma_0$.这与$\sigma_0\in\Sigma$矛盾.

定义 $\mathfrak{N}=\biguplus_{\sigma\in\Sigma}\mathfrak{N}_\sigma=(W',N',R'_F,R'_P,V')$.因为对任意$\sigma\in\Sigma,\mathfrak{N}_\sigma\in\mathbb{K}$并且$\mathbb{K}$在不相交并下封闭,所以 $\mathfrak{N}\in\mathbb{K}$.

令 $U(\sigma)=\{v\in W'|\mathfrak{N},v\vDash\sigma\}$.定义集合 $E\subseteq\mathcal{P}(W')$为 $E=\{U(\sigma)|\sigma\in\Sigma\}$.容易验证,$E$ 不包含空集并且在集合交运算下封闭.所以,E 有有穷交性质.所以存在 W'上超滤子 v',满足 $E\subseteq v'$.所以对任意$\sigma\in\Sigma,U(\sigma)\in v'$.根据命题 11,$ue\mathfrak{N},v'\vDash\Sigma$.根据命题 15,$ue\mathfrak{N}$ 是时态饱和的.又因 $\mathfrak{N}\in\mathbb{K}$并且$\mathbb{K}$在 C2t-超滤扩张下封闭,所以 $ue\mathfrak{N}\in\mathbb{K}$.

因此,$\mathbb{K}$中存在一个时态饱和模型(也就是 $ue\mathfrak{N}$),使得Σ在该饱和模型上可满足(即在点 v'可满足).所以,w(在$\mathfrak{M}$中)和 v'(在 $ue\mathfrak{N}$中)是时态等价的.由于 $\mathfrak{M}$和 $ue\mathfrak{N}$是时态饱和的,根据命题 6,存在 C2t-互模拟 $Z:ue\mathfrak{N},v'\leftrightharpoons\mathfrak{M},w$.由于 $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_w$ 是由点 w 生成的,根据引理 1 可得,Z 是一个满 C2t-互模拟.又因为$\mathbb{K}$在满 C2t-互模拟下封闭,所以$\mathfrak{M}\in\mathbb{K}$.

第 2 种情况:$\mathfrak{M}$ 是时态饱和的.为了叙述方便,令 $\mathfrak{M}=(W,N,R_F,R_P,V)$.那么对任意 $w_0\in W$, $\mathfrak{M}_{w_0}\vDash\Theta_{\mathbb{K}}$.容易验证:对任意 $w_0\in W$, $\mathfrak{M}_{w_0}$ 是时态饱和的.根据第 1 种情况的证明可得:对任意 $w_0\in W$, $\mathfrak{M}_{w_0}\in\mathbb{K}$.由于$\mathbb{K}$在不相交并下封闭,所以 $\biguplus_{w_0\in W}\mathfrak{M}_{w_0}\in\mathbb{K}$.根据命题 5(2), $\biguplus_{w_0\in W}\mathfrak{M}_{w_0}$ 与 $\mathfrak{M}$之间存在满 C2t-互模拟.又因为$\mathbb{K}$在满 C2t-互模拟下封闭,所以 $\mathfrak{M}\in\mathbb{K}$.

第 3 种情况:$\mathfrak{M}$ 是任意正则模型.根据命题 13, $ue\mathfrak{M}\vDash\Theta_{\mathbb{K}}$.因为 $ue\mathfrak{M}$是时态饱和的,所以根据第 2 种情况的证明可得,$ue\mathfrak{M}\in\mathbb{K}$.又因为$\mathbb{K}$及其补类在 C2t-超滤扩张下封闭,所以 $\mathfrak{M}\in\mathbb{K}$. □

6 结 论

本文证明了正则模型类在时态语言中可定义性的刻画定理.它是对克里普克模型类在模态语言中的可定义性刻画定理的推广.每个时态公式都定义一个正则模型类,但是并非每个正则模型类都能在时态语言中定义.例如,所有有穷的正则模型类在时态语言中不可定义,因为这个模型类对不相交并不是封闭的.本文证明的定理对于时态逻辑在计算机科学中的应用具有潜在的价值,运用这个定理,可以检验给定的正则模型类或正则模型性质是否能够在时态语言中表达.

References:

[1] Pnueli A. The temporal logic of programs. In: Proc. of the Foundations of Computer Science. 1977. 46−57. [doi: 10.1109/SFCS.1977.32]

[2] Tang ZS, Zhao C. A temporal logic language oriented toward software engineering. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 1994, 5(12):1−16 (in Chinese with English abstract). http://www.jos.org.cn/ch/reader/view_abstract.aspx?file_no=19941201&flag=1

[3] Duan ZH. Temporal Logic and Temporal Logic Programming. Science Press, 2005.

[4] Burgess J. Basic Tense Logic. Handbook of Philosophical Logic. Vol.7, Springer Netherlands, 2002. [doi: 10.1007/978-94-017-0462-5_1]

[5] Lemmon EJ. Algebraic semantics for modal logics I. The Journal of Symbolic Logic, 1966,31(1):46−65. [doi: 10.2307/2270619]

[6] Ma MH, Wang SX, Deng HW. Sequent calculus for minimal non-normal temporal logic. SCIENTIA SINICA Informationis, 2017,47(1):31−46 (in Chinese). [doi: 10.1360/N112015-00320]

[7] Hodges W. A Shorter Model Theory. Cambridge University Press, 1997.

[8] Nielsen M, Clausen C. Bisimulation for models in concurrency. In: Proc. of the Concurrency Theory. 1994. 385−400. [doi: 10.1007/BFb0015021]

[9] Benthem VJ. Modal correspondence theory [Ph.D. Thesis]. University of Amsterdam, 1976.

[10] Perkov T. A generation of modal frame definability. In: Proc. of the ESSLLI 2012/2013. LNCS 8607. 2014. 142−153. [doi: 10.1007/978-3-662-44116-9_10]

[11] Kurtonina N, Rijke MD. Bisimulations for temporal logic. Journal of Logic, Language, and Information, 1997,6(4):403−425. [doi: 10. 1023/A:1008223921944]

[12] Venama Y. Model definability, purely modal. In: JFAK. Essays Dedicated to Johan van Benthem on the Occasion of His 50th Birthday. Vossiuspers AUP, 1999. http://www.illc.uva.nl/j50/contribs/venema/index.html

[13] Blackburn P, Rijke DM, Venema Y. Modal Logic. Cambridge University Press, 2011.

[14] Bell JL, Slomson AB. Models and Ultraproducts. North-Holland Publishing Company, 1974.

附中文参考文献:

[2] 唐稚松,赵琛.一种面向软件工程的时序逻辑语言.软件学报,1994,5(12):1–16. http://www.jos.org.cn/ch/reader/view_abstract.aspx?file_no=19941201&flag=1

[6] 马明辉,王善侠,邓辉文.极小非正规时序逻辑的矢列式演算系统.中国科学:信息科学,2017,47(1):31–46. [doi: 10.1360/N112015-00320]

王善侠(1980－),男,河南新乡人,博士生,讲师,主要研究领域为模态逻辑,计算机科学中的逻辑,人工智能.

陈武(1976－),男,博士,教授,主要研究领域为知识表示与推理.

马明辉(1984－),男,博士,教授,博士生导师,主要研究领域为非经典逻辑,证明论,模型论.

邓辉文(1964－),男,博士,教授,博士生导师,主要研究领域为现代逻辑,密码协议分析,计算智能,软件理论及应用.