软件学报 ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
Journal of Software,2016,27(10):2499−2508 [doi: 10.13328/j.cnki.jos.005087]
©中国科学院软件研究所版权所有.
E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel: +86-10-62562563

插值边界的四边网格离散极小曲面建模方法*

徐 岗[1,2], 朱亚光[1], 李 鑫[1], 许金兰[1,2], 汪国昭[3], 许健泉[4]

[1](杭州电子科技大学 计算机学院,浙江 杭州 310018)

[2](复杂系统建模与仿真教育部重点实验室,浙江 杭州 310018)

[3](浙江大学 数学科学学院,浙江 杭州 310027)

[4](Department of Mechanical and Automation Engineering, The Chinese University of Hong Kong, China)

通讯作者: 徐岗, E-mail: gxu@hdu.edu.cn

摘 要: 如何实现极小曲面的快速三维建模,是几何设计与计算领域中的难点和热点问题.给定一条封闭的边界离散折线,研究如何构造以其为边界的四边网格离散极小曲面.首先从曲面的内蕴微分几何度量出发,给出了离散四边网格极小曲面的数学定义;然后利用保长度边界投影、四边网格生成、径向基函数插值映射和非线性优化技术,提出了由给定边界离散折线快速构造离散四边网格极小曲面的一般技术框架.最后通过若干建模实例验证了所提方法的有效性.该方法可实现四边网格极小曲面的高质量建模,在建筑几何领域具有一定的应用价值.

关键词: 建筑几何;离散极小曲面;四边网格;网格生成;径向基函数插值

中图法分类号: TP391

中文引用格式: 徐岗,朱亚光,李鑫,许金兰,汪国昭,许健泉.插值边界的四边网格离散极小曲面建模方法.软件学报,2016, 27(10):2499−2508. http://www.jos.org.cn/1000-9825/5087.htm

英文引用格式: Xu G, Zhu YG, Li X, Xu JL, Wang GZ, Hui KC. Constructing discrete minimal surfaces with quadrilateral meshes from described boundary. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2016,27(10):2499−2508 (in Chinese). http://www.jos.org.cn/ 1000-9825/5087.htm

Constructing Discrete Minimal Surfaces with Quadrilateral Meshes from Described Boundary

XU Gang[1,2], ZHU Ya-Guang[1], LI Xin[1], XU Jin-Lan[1,2], WANG Guo-Zhao[3], HUI Kin-Chuen[4]

[1](School of Computer Science and Technology, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China)

[2](Key Laboratory of Complex Systems Modeling and Simulation, Ministry of Education, Hangzhou 310018, China)

[3](School of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

[4](Department of Mechanical and Automation Engineering, The Chinese University of Hong Kong, China)

Abstract: Efficient modeling of minimal surfaces is a challenging problem and hot topic in the field of geometric design and computation. Taking boundary closed polylines, this paper proposes a general framework to construct discrete minimal surfaces with quadrilateral meshes. First, the mathematical definition of discrete minimal surface with quadrilateral mesh is given from the intrinsic differential-geometry metric of surfaces. Next, based on the length-preserving boundary projection method, quad-mesh generation approach and non-linear numerical optimization technique, a novel framework is presented to construct discrete minimal surfaces with quadrilateral meshes from a described boundary closed discrete polylines. Finally, the effectiveness of the proposed approach is illustrated by several modeling examples. The results show that the proposed method can achieve high-quality modeling of discrete minimal surfaces and provide potential usage in architecture geometry.

* 基金项目: 国家自然科学基金(61472111, 61272300, 61602138); 浙江省杰出青年自然科学基金(LR16F020003); 浙江省自然科学基金(LQ16F020005)

Foundation item: National Natural Science Foundation of China (61472111, 61272300, 61602138); Natrual Science Foundation of Zhejiang Province for Distinguished Young Scholars (LR16F020003); Natural Science Foundation of Zhejiang Province (LQ16F020005)

收稿时间: 2016-01-21; 修改时间: 2016-03-25; 定稿时间: 2016-05-09; jos 在线出版时间: 2016-08-08

CNKI 网络优先出版: 2016-08-09 15:37:54, http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2560.TP.20160809.1537.006.html

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

Key words: architectural geometry; discrete minimal surface; quadrilateral mesh; mesh generation; radial basis function interpolation

建筑几何是计算机辅助设计和图形学中一个新兴的研究领域,它基于传统的曲线曲面设计理论及新兴的离散微分几何理论,利用计算机辅助几何设计技术和数字几何处理方法,进行建筑结构的建模与处理,并解决建筑结构设计中的一系列技术难题.

在经典的微分几何理论中,极小曲面是指插值给定边界曲线的面积最小的曲面,其平均曲率处处为 0[1,2].由于其特有的内在几何性质,极小曲面在建筑几何设计、飞机外形设计、仿生学、纳米建模等领域具有重要的应用价值[3].特别地,在建筑几何中,极小曲面是张拉膜等空间建筑结构的理想几何形状.因而,以几何设计与计算的视角,研究极小曲面的快速几何建模问题,对建筑几何这一新兴研究领域的发展具有重要意义.

与三角网格相比,按照四边网格(以四边形为主导的网格)所构建的空间结构具有重量较轻、成本较低、更加符合人们对几何形状变化的自然感知等特点,因而在玻璃结构和钢结构中,四边网格表现出更好的优越性.由于在实际应用中玻璃结构和钢结构等新兴建筑结构均以离散四边网格曲面为表现形式,因此,研究以四边网格为表现形式的离散极小曲面的高效建模方法,便成为当务之急.

基于以上应用背景,在本文中我们主要研究如下问题:即给定一条封闭的边界离散折线,如何构造以其为边界的离散四边网格极小曲面.首先从曲面的内蕴微分几何度量出发,我们给出了离散四边网格极小曲面的数学定义方法;然后基于保长度边界投影、四边网格生成、径向基函数插值映射和多层次非线性优化技术,提出了由给定边界离散折线快速构造离散四边网格极小曲面的一般框架.最后通过若干建模实例,验证了本文方法的有效性,并研究了其在玻璃结构及钢结构建模中的应用.

1 相关工作

极小曲面一直是经典微分几何领域的重要研究对象.自从 Jin 等人首次将极小曲面引入几何设计与计算领域以来[4],已有不少学者从 CAGD 的视角对参数形式的极小曲面造型问题进行了研究.具体可参考作者对 CAGD 中参数形式极小曲面造型的研究进展所做的综述[5].按照建模方式的不同,可将此领域的相关工作分为两大类,即精确造型方法和逼近造型方法.目前,CAGD 中极小曲面的精确造型方法主要有两大方面的内容:一是某些特殊极小曲面的控制网格表示与构造[6−8],二是等温参数多项式极小曲面的挖掘与性质[9−11].逼近造型方面的工作大体可以分为 3 类:基于线性偏微分方程的逼近方法[12,13];基于能量函数最优化的逼近方法[14−19];基于数值计算的逼近方法[20−22].

Plateau 问题是极小曲面理论中的经典问题,即如何寻找以给定的空间可求长 Jordan 闭曲线为边界的极小曲面.为了找到 Plateau 问题的 Bézier 近似解,Monterde 提出了 Plateau-Bézier 问题[14],即在所有的插值给定边界曲线的 Bézier 曲面中找到最小面积的曲面,并利用 Dirichlet 能量函数极小化的方法近似求解.随后,Wu 等人将 Dirichlet 方法推广到 Plateau-B 样条问题[16]以及 Plateau-NURBS 问题[17];Xu 等人基于平均曲率提出了一种新的能量函数,对 Dirichlet 方法进行了改进[18].Hao 等人研究了非多项式空间中 quasi-Bézier 极小曲面的求解问题[19].Pan 等人利用平均曲率流方法研究了细分极小曲面的约束建模方法[23];Li 等人则研究了基于测地线约束的近似极小曲面的造型问题[24].

与参数形式极小曲面相比,离散极小曲面造型方面的相关工作比较少,而面向建筑几何的离散极小曲面的研究工作更是凤毛麟角.Pinkall 和 Polthier 基于离散 Dirichlet 能量来近似求解共性映射和离散 Plateau 问题[25]. Dziuk 和 Hutchinson 运用有限元方法求解离散 Plateau 问题[26].Zhang 等人研究了加权极小曲面与加权离散极小曲面的性质及其构造[27];Bobenko 等人研究了以圆为基本单元的离散极小曲面的构造方法[28].Wallner 等人研究了以圆锥网格为表示形式的离散极小曲面的对偶构造方法[29].Pan 等人利用 CVT 技术研究了三角网格常平均曲率曲面的优化问题[30],在优化的同时可以有效地提高三角网格单元质量.目前,针对四边网格曲面的离散 Plateau 问题还鲜有研究工作提及.

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

2 离散四边网格极小曲面及问题描述

2.1 离散四边网格极小曲面的定义

假设 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 为一张参数曲面,其第 1 基本形式的系数为

$$E=\langle \boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_u\rangle, F=\langle \boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v\rangle, G=\langle \boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{r}_v\rangle,$$

其中, $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$ 是 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 中分别对 u 和 v 的一阶偏导数和定义向量的点积.

$\boldsymbol{r}(u,v)$ 的第 2 基本形式的系数为

$$L=\langle \boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{r}_{uu}\rangle, M=\langle \boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{r}_{uv}\rangle, N=\langle \boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{r}_{vv}\rangle,$$

$\boldsymbol{r}_{uu},\boldsymbol{r}_{uv}$ 和 r_{vv} 是 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 中分别对 u 和 v 的二阶偏导数和定义向量的混合乘积.

曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 的面积 A 可由下式计算:

$$A=\int_U \sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{1}$$

$\boldsymbol{r}(u,v)$ 的平均曲率 H 则可由下式计算而得:

$$H=\frac{EN-2FM+LG}{2(EG-F^2)}.$$

若曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 的平均曲率 H 处处为 0,则称 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 为极小曲面,即是以给定曲线为边界的所有曲面中面积最小的曲面.

对于离散四边网格曲面,如何定义其在顶点处的平均曲率,是离散微分几何中的一个难点问题.本文采用文献[31]中的离散平均曲率定义方法.如图 1 所示,假设 $\boldsymbol{P}_i$, $\boldsymbol{P}_j$,$\boldsymbol{P}_{j+1}$,$\boldsymbol{P}_j'$ 这 4 个顶点组成了四边网格曲面 M 上的一个离散网格单元 E_j ,则可在该单元上定义一个双线性 Bézier 曲面片 $\boldsymbol{S}(u,v)$,并可计算该曲面片对 u 和 v 的一阶偏导分别为

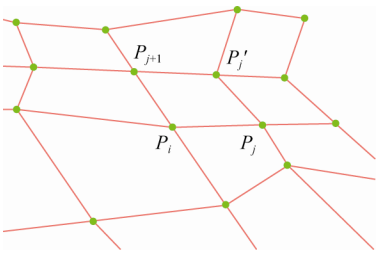


Fig.1 Quad mesh representation and notation

图 1 四边网格表示及记号

$$\boldsymbol{S}_u=(1-v)(\boldsymbol{P}_{j+1}-\boldsymbol{P}_i)+v(\boldsymbol{P}_j'-\boldsymbol{P}_j),$$
$$\boldsymbol{S}_v=(1-u)(\boldsymbol{P}_j-\boldsymbol{P}_i)+u(\boldsymbol{P}_j'-\boldsymbol{P}_{j+1}).$$

由式(1)可知,该网格单元 E_i 的面积 A_j 可由下式计算:

$$A_j=\iint_U \sqrt{\|\boldsymbol{S}_u\|^2\|\boldsymbol{S}_v\|^2-\langle \boldsymbol{S}_u,\boldsymbol{S}_v\rangle^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

进一步地,我们可以得到在顶点 $\boldsymbol{P}_i$ 处的平均曲率向量估计公式为

$$H(\boldsymbol{P}_i)\approx\frac{2}{\sum_j A_j}\sum_j[\alpha_j(\boldsymbol{P}_j-\boldsymbol{P}_i)+\beta_j(\boldsymbol{P}_{j+1}-\boldsymbol{P}_i)+\gamma_j(\boldsymbol{P}_j'-\boldsymbol{P}_i)],$$

其中, $\alpha_j,\beta_j,\gamma_j$ 为与网格单元 E_i 的几何度量有关的系数,具体可参考文献[31].易得,顶点 P_i 处的平均曲率度量为 $\sqrt{\|H(\boldsymbol{P}_i)\|^2}$. 基于此,下面我们给出四边网格离散极小曲面的局部定义方式.

定义 1. 若四边网格曲面 M 上每一个顶点处的平均曲率值 $\sqrt{\|H(\boldsymbol{P}_i)\|^2}$ 均为 0,则称 M 为四边网格离散极小曲面.

在一般情况下,构造满足定义 1 的四边网格离散极小曲面是十分困难的.基于面积极小化的思想,我们给出四边网格离散极小曲面的全局定义方式.

定义 2. 给定三维空间中的一条封闭离散折线 $B=\{\boldsymbol{b}_i\}_{i=0}^N$,若四边网格曲面 M 是以该封闭折线为边界的所有四边网格曲面中面积最小的离散曲面,则称 M 为四边网格离散极小曲面.

在本文中,定义 1 中的平均曲率度量和定义 2 中的面积度量均将作为四边网格离散极小曲面的优化目标集成到构造框架中.

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

2.2 问题描述

本文所探讨的离散极小曲面建模问题可描述为:给定三维空间中的一条封闭离散折线 $B=\{\boldsymbol{b}_i\}_{i=0}^N$,如何构造以该折线为边界的四边网格离散曲面,使其为离散极小曲面.

需要说明的是,给定封闭的离散折线,以其为边界的四边网格曲面的顶点连接方式与顶点数目有无穷多种选择.在本文所探讨的问题范畴内,我们需要首先确定以 $B=\{\boldsymbol{b}_i\}_{i=0}^N$ 为边界的四边网格曲面的拓扑连接关系(即顶点连接方式及网格顶点数目),然后再通过优化算法来构造在此拓扑连接关系约束下的离散极小曲面.在下一节中我们将详细加以讨论.

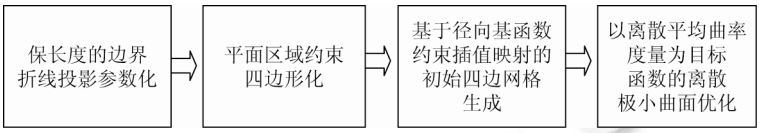
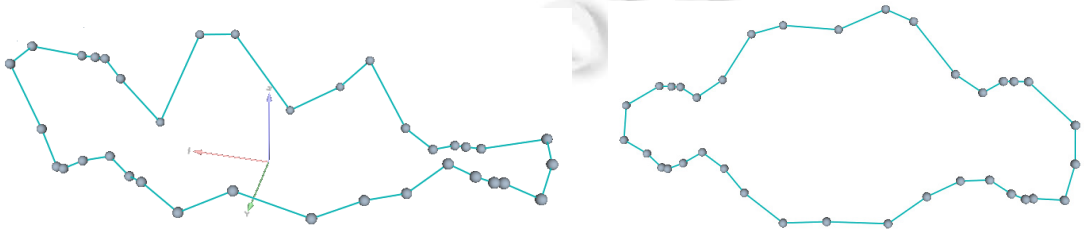


Fig.2 Algorithm framework

图 2 算法框架



(a) 空间边界折线 (b) 保长度平面投影

Fig.3 Length-Preserving planar projection of space boundary polygon

图 3 空间边界折线的保长度平面投影

3 四边网格离散极小曲面的快速构造方法

3.1 算法框架

在本文中,我们拟采取的算法大体上可以概括为图 2 中的 4 步.即首先将空间边界折线保长参数化到二维平面上;然后在参数化投影所得到的二维区域内,利用四边网格生成算法得到二维区域的四边网格化结果;接着以所给定的三维空间边界折线作为约束,运用径向基函数映射插值技术得到初始的四边网格离散曲面;最后运用约束优化求解方法,以四边网格上的离散平均曲率度量及面积度量为目标函数,对所得到的初始网格进行迭代优化,得到最终的四边网格离散极小曲面.下面我们将分别对每一步骤的技术细节进行详细阐述.

3.2 平面区域约束四边形化

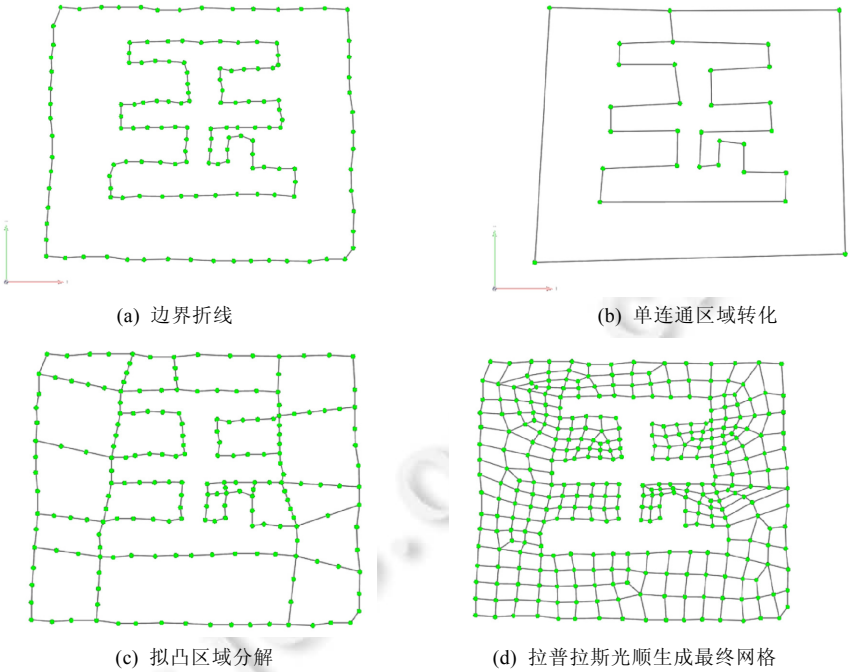
给定三维空间边界折线 $B=\{\boldsymbol{b}_i\}_{i=0}^N\in\Re^3$,我们首先利用文献[32]中的保长度投影参数化方法,得到其在二维平面上的投影 $B^P=\{\boldsymbol{b}_i^P\}_{i=0}^N\in\Re^2$,并尽可能地保持三维空间折线 $B=\{\boldsymbol{b}_i\}_{i=0}^N$ 的长度不变(如图 3 所示).在得到空间边界折线的保长度平面投影之后,下面需要对由该平面折线 $B^P=\{\boldsymbol{b}_i^P\}_{i=0}^N$ 所围成的区域 Ω^P 进行四边形化,即在该区域的内部用一定数量的四边形网格单元填充起来,这也是离散极小曲面造型方法中极为关键的一步.本文提出了一种新的四边形网格生成方法,可生成高质量的四边形网格.该算法的主要步骤如下.

Step 1. 将复杂的多连通边界变换为单连通边界,也就是说,用一个单连通多边形来代替原来的多连通多边形,并保证替换前后多边形的几何形状保持一致.这样对于替换后的多边形边界来说,它将始终是只有一条外部

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

边界的单连通多边形(如图 4(b)所示).

Step 2. 将变换后的单连通区域进行拟凸区域分解,得到一系列简单的拟凸区域(如图 4 所示)).



(a) 边界折线 (b) 单连通区域转化

(c) 拟凸区域分解 (d) 拉普拉斯光顺生成最终网格

Fig.4 An example of quad mesh generation

图 4 四边网格生成算法实例

Step 3. 对每一个拟凸区域,利用模板方法生成四边网格的拓扑连接结构,然后根据模板域每条边侧所对应实际域中的边界,计算其每个顶点的权值,并确定参数域中边界顶点的位置坐标信息.

Step 4. 利用拉普拉斯网格光顺技术,对内部生成的拓扑顶点进行光顺处理,并得到每个内部顶点的坐标信息(如图 4(d)所示).

在上述算法中,凸区域划分的作用主要是为了能方便地使用基于模板的平面四边网格拓扑生成方法,即在每一个划分得到的子区域内利用模板方法生成内部的网格拓扑信息.平面网格的拉普拉斯光滑算子可使内部顶点尽量趋近于其 1-邻域顶点的加权平均,从而使得四边网格单元大小比较均匀,以得到高质量的平面四边网格,继而得到质量较好的初始曲面 M^0.

通过上述算法,我们便可得到拟构造的四边网格曲面的内部拓扑连接信息,为后续的四边网格极小曲面优化算法打下了基础.

3.3 基于径向基函数约束插值映射的初始四边网格生成

在上一步,已生成平面投影折线所包围区域 Ω^P 的四边形化网格 $M^P \in \Re^2$,下面需要将该平面四边网格 M^P 映射到三维空间 $\Re^3$,得到三维空间四边网格曲面 $M^0 \in \Re^2$,并且使得初始网格曲面 M^0 插值预先给定的三维空间折线 $B=\{\boldsymbol{b}_i\}_{i=0}^N$.为了解决这一问题,本文借鉴径向基函数插值映射技术来构造插值给定边界的初始网格曲面 M^0.将三维空间折线 B 上的顶点 $\{\boldsymbol{b}_i\}_{i=0}^N$ 和二维平面折线 B^P 上的顶点 $\{\boldsymbol{b}_i^P\}_{i=0}^N$ 作为约束,平面四边网格 M^P 上的顶点可通过径向基函数映射到待求的初始网格曲面 M^0 上.特别地,该径向基函数映射可表示为如下形式.

$$f(\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^{N} d_j \phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}_j^P)+g(\boldsymbol{x}) \tag{2}$$

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

其中,$\{\boldsymbol{b}_i^P\}_{i=0}^N$ 为平面四边网格 M^P 的边界约束点,d_j 为待求的权值,$g(\boldsymbol{x})$ 为线性多项式函数.

为求解权值 d_j,由 $\boldsymbol{b}_i = f(\boldsymbol{b}_i^P)$ 可得

$$\boldsymbol{b}_i = \sum_{j=1}^{N} d_j \phi(\boldsymbol{b}_i^P - \boldsymbol{b}_j^P) + g(\boldsymbol{b}_i^P) \tag{3}$$

因此,我们可以通过求解一个线性方程组来得到 d_j 和 $g(\boldsymbol{x})$ 的系数.

令 $\boldsymbol{b}_j^P = (v_i^{P,x}, v_i^{P,y}, v_i^{P,z}), \phi_{ij} = \phi(\boldsymbol{b}_i^P - \boldsymbol{b}_j^P)$,则该线性方程组可表示为

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1k} & 1 & v_1^{P,x} & v_1^{P,y} & v_1^{P,z} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2k} & 1 & v_2^{P,x} & v_2^{P,y} & v_2^{P,z} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{k1} & \phi_{k2} & \cdots & \phi_{kk} & 1 & v_k^{P,x} & v_k^{P,y} & v_k^{P,z} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_1^{P,x} & v_2^{P,x} & \cdots & v_k^{P,x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_1^{P,y} & v_2^{P,y} & \cdots & v_k^{P,y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_1^{P,z} & v_2^{P,z} & \cdots & v_k^{P,z} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_k \\ p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_k \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \tag{4}$$

其中,$\phi(r)$为具有紧支撑性质的 Wendland 径向基函数,

$$\phi(r) = (1-r)_+^6 (3 + 18r + 35r^2),$$

其中,紧支撑集半径为 $r = \dfrac{\|\bar{\boldsymbol{x}}\|_2}{\lambda}, a_+ = \max\{a, 0\}$.

由于本文利用了具有紧支撑性质的径向基函数,因而线性系统(4)的系数矩阵是一个稀疏矩阵,可通过 LU 分解方法快速求解.求解得到 d_j 和 $g(\boldsymbol{x})$的系数之后,我们便可通过式(2)中的 $f(\boldsymbol{x})$将平面四边网格 M^P 上的顶点映射得到初始网格曲面 M^0,并且插值预先给定的三维空间折线 $B = \{\boldsymbol{b}_i\}_{i=0}^N$.

3.4 离散极小曲面优化算法

在得到初始的离散网格曲面 M^0 之后,本节将研究如何得到最终的四边网格离散极小曲面.通过任意的给定边界折线,若构造严格满足定义 1(即平均曲率处处为 0)的四边网格离散极小曲面,难度很大.因此,本文拟采用优化算法,由插值边界构造一张尽可能满足离散平均曲率处处为 0 的四边网格离散曲面.

为生成一张表面光滑的高质量离散极小曲面,我们将文献[33]中的 Laplacian 算子推广到四边网格曲面,并将其度量引入到待优化的目标函数之中.四边网格曲面在顶点 v_i 处的光滑性条件定义如下:

$$\boldsymbol{v}_i = \frac{1}{|N(\boldsymbol{v}_i)|} \sum_{j \in N(v_i)} \boldsymbol{v}_j,$$

其中,$N(\boldsymbol{v}_i)$ 为顶点 $N(\boldsymbol{v}_i)$ 的 1-环邻域的顶点集合.由此,我们可以定义四边网格曲面上的光滑性度量如下:

$$J_{smooth} = \frac{1}{2} \sum_k \|L\boldsymbol{v}_k\|^2,$$

其中,$L = [L_{i,j}]$为四边网格曲面上的 Laplacian 算子,即

$$L_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ -\dfrac{1}{|N(\boldsymbol{v}_i)|}, & j \in N(\boldsymbol{v}_i) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

需要说明的是,上述拉普拉斯优化项的加入主要是为了生成比较光滑的空间网格曲面,即需要对网格内部顶点的 3 个坐标分量 x,y,z 同时加以考虑,这与平面网格生成阶段的拉普拉斯光顺过程并不重复:即网格生成阶段的拉普拉斯光滑处理是为了生成质量较好的平面四边网格,进而得到比较理想的初始空间四边网格曲面;而后一个拉普拉斯优化是为了在对面积极小相关的目标函数进行优化的同时,保证空间离散网格极小曲面的光

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

滑性.

由定义 1,构造与平均曲率度量相关的目标函数如下:

$$J_{mean}=\sum_k \|H(\boldsymbol{P}_k)\|^2.$$

同理,由定义 2,构造与面积度量相关的目标函数如下:

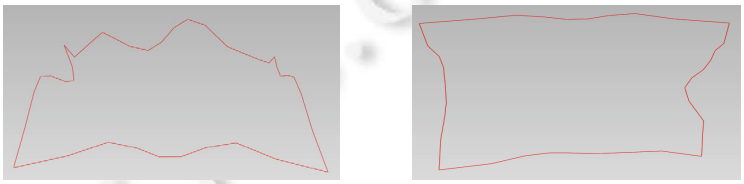
$$J_{area}=\sum_k A(E_k),$$

其中, $A(E_k)$ 为网格单元 E_k 的面积.

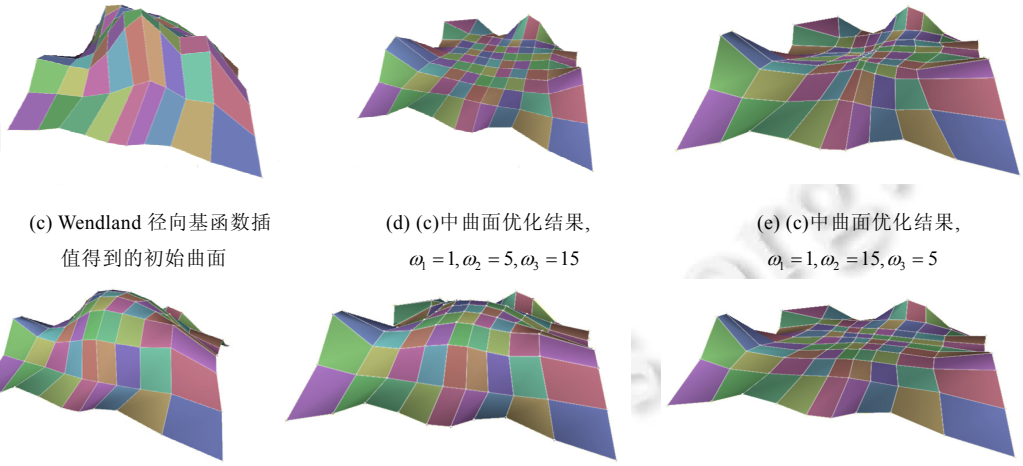
综上,本文所研究的四边网格离散极小曲面建模问题可归结为一个非线性优化问题:即由第 3.4 节中所构造的网格曲面 M^0 作为初始解,优化变量为其内部网格顶点,优化函数为

$$\arg\min_{P_k} \omega_1 J_{smooth}+\omega_2 J_{mean}+\omega_3 J_{area} \tag{5}$$

其中,$\omega_1,\omega_2,\omega_3$ 为加权系数.ω_1 越大,所得到的网格曲面越接近拉普拉斯能量函数极小化结果;ω_2 越大,所得到的四边网格曲面越接近平均曲率能量函数极小化结果;ω_3 越大,所得到的四边网格曲面越接近面积函数极小化结果.为了使得最终的四边网格曲面模型既能尽量满足极小曲面条件又能具有较光滑的形状,一般来说,参数 ω_2 和 ω_3 的取值较大,而参数 ω_1 的取值较小.在本文的极小曲面造型实例中,我们一般取 ω_1=1,ω_2=5,ω_3=15.给定同一初始曲面,图 5(d)~图 5(f)中分别给出了选取不同的 ω_1,ω_2 和 ω_3 时所得到的极小曲面优化结果.



(a) 给定边界折线 (b) 保长度平面投影



(c) Wendland 径向基函数插值得到的初始曲面

(d) (c)中曲面优化结果, $\omega_1=1,\omega_2=5,\omega_3=15$

(e) (c)中曲面优化结果, $\omega_1=1,\omega_2=15,\omega_3=5$

(f) (c)中曲面优化结果, $\omega_1=30,\omega_2=1,\omega_3=1$

(g) 高斯径向基函数插值得到的初始曲面

(h) (g)中曲面优化结果, $\omega_1=1,\omega_2=5,\omega_3=15$

Fig.5 Simple example and comparison of constructing minimal surfaces with quad meshes

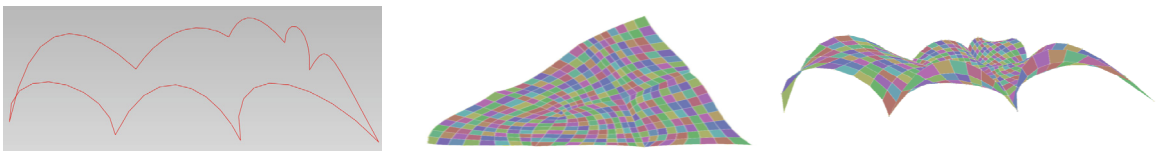
图 5 四边网格极小曲面构造的简单实例与分析比较

对于优化问题(5),本文通过拟牛顿非线性优化算法进行求解[34].需要指出的是,初始曲面 M^0 对最终所得到的离散极小曲面形状具有一定的影响.为了说明初始构造对优化结果的影响,图 5(g)中给出了采用高斯径向基函数方法构造的初始网格曲面,图 5(h)给出了由该初始曲面得到的极小曲面优化结果,其与由图 5(c)中的初始

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

曲面优化得到的极小曲面(即如图 5(d)所示)具有不同的形状和面积值.

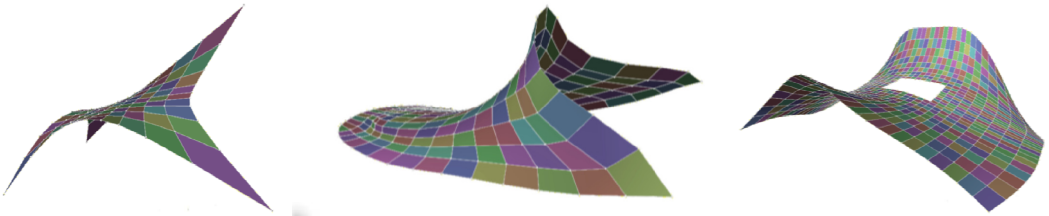
图 6 和图 7 分别给出了基于边界约束的四边网格离散极小曲面的若干建模实例.特别地,图 7(c)给出了一个给定边界为两条封闭折线的例子.需要说明的是,对于多条封闭折线的复杂情形,我们将在以后的研究工作中继续讨论.



(a) 用户输入的离散折线 (b) 保长度投影后平面区域的四边形网格化 (c) 最终生成的四边网格离散极小曲面

Fig.6 Complex example of constructing minimal surfaces with quad meshes

图 6 四边网格极小曲面构造的复杂实例



(a) (b) (c)

Fig.7 More modeling examples

图 7 更多建模实例

4 结论与将来的工作

离散极小曲面建模在建筑几何中具有重要的应用价值.基于我们提出的四边网格生成方法和径向基函数插值映射方法,本文给出了由给定的一条封闭边界离散折线构造四边网格极小曲面的一般框架.通过该建模方法,用户只需给定离散边界曲线,便可自动生成具有优美形状和优良性质的四边网格,可提高设计交互性,并有望在玻璃结构及钢结构建模中得到应用.

如何找到目标函数中 3 个参数的最优选择,是值得深入研究的一个问题.另外,力学性能是建筑结构设计中需要考虑的重要因素.将来我们拟将最近新兴的等几何分析技术[35]应用于极小曲面的建模问题,以满足空间结构的力学性能要求.

References:

[1] Johannes CCN. Lectures on Minimal Surfaces, Vol.1. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

[2] Robert O. A survey of Minimal Surfaces. 2nd ed., New York: Dover Publications, 1986.

[3] Wang Y. Periodic surface modeling for computer aided nano design. Computer Aided Design, 2007,39(3):179–189. [doi: 10.1016/j.cad.2006.09.005]

[4] Jin WB, Wang GZ. Geometry design of a class of minimal surface. Chinese Journal of Computers, 1999,23(12):1277–1279 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.3321/j.issn:0254-4164.1999.12.008]

[5] Xu G, Wang GZ. Research development of minimal surface modeling in computer aided geometric design. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 2008,28(8):984–992 (in Chinese with English abstract).

[6] Man JJ, Wang GZ. Representation and geometric construction of helicoids and catenoids. Journal of Computer-Aided Design and Computer Graphics, 2005,17(3):431–436 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.3321/j.issn:1003-9775.2005.03.009]

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

[7] Xu G, Wang GZ. AHT Bézier surfaces and NUAHT B-spline curves. Journal of Computer Science and Technology, 2007,22(4): 597–607. [doi: 10.1007/s11390-007-9073-z]

[8] Xu G, Wang GZ. Control mesh representation of a class of minimal surfaces. Journal of Computer-Aided Design and Computer Graphics, 2007,19(2):240–244 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.3321/j.issn:1003-9775.2007.02.019]

[9] Man JJ, Wang GZ. Polynomial minimal surface in Isothermal parameter. Chinese Journal of Computers, 2002,25(2):197–201 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.3321/j.issn:0254-4164.2002.02.012]

[10] Xu G, Wang GZ. Quintic parametric polynomial minimal surfaces and their properties. Differential Geometry and Its Applications, 2010,28(6):697–704. [doi: 10.1016/j.difgeo.2010.07.003]

[11] Xu G, Zhu YG, Wang GZ, Galligo A, Zhang L, Hui KC. Explicit form of parametric polynomial minimal surfaces with arbitrary degree. Applied Mathematics and Computation, 2015,259:124–131. [doi: 10.1016/j.amc.2015.02.065]

[12] Monterde J, Ugail H. On harmonic and biharmonic Bézier surfaces. Computer Aided Geometric Design, 2004,21(7):697–715. [doi: 10.1016/j.cagd.2004.07.003]

[13] Xu G, Wang GZ. Harmonic B-B surfaces over the triangular domain. Chinese Journal of Computers, 2006,29(12):2180–2185 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.3321/j.issn:0254-4164.2006.12.015]

[14] Monterde J. Bézier surfaces of minimal area: The Dirichlet approach. Computer Aided Geometric Design, 2004,21(2):117–136. [doi: 10.1016/j.cagd.2003.07.009]

[15] Arnal A, Lluch A, Monterde J. Triangular Bézier surfaces of minimal area. In: Proc. of the Int'l Workshop on Computer Graphics and Geometric Modeling. Montreal, 2003. 366–375. [doi: 10.1007/3-540-44842-X_38]

[16] Wu H, Wang GJ. Extending Dirichlet approach to design B-spline surface of minimal area. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2011,22(12):3015–3022 (in Chinese with English abstract). http://www.jos.org.cn/1000-9825/4009.htm [doi: 10.3724/SP.J.1001. 2011.04009]

[17] Wu H, Wang GJ. Designing approximate minimal NURBS surfaces with boundaries interpolation. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2010,21(zk):67−74 (in Chinese with English abstract). http://www.jos.org.cn/1000-9825/10008.htm

[18] Xu G, Wang GZ. A new method to solve Plateau-Bézier problems over the triangular domain. Chinese Journal of Computers, 2011,34(3):548–555 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.3724/SP.J.1016.2011.00548]

[19] Hao YX, Wang RH, Li CJ. Minimal quasi-Bézier surface. Applied Mathematical Modelling, 2012,36(2):5751–5757. [doi: 10.1016/ j.apm.2012.01.040]

[20] Hao YX, Li CJ, Wang RH. An approximation method based on MRA for the quasi-Plateau problem. BIT Numerical Mathematics, 2013,53(2):411–442. [doi: 10.1007/s10543-012-0412-2]

[21] Man JJ, Wang GZ. Approximating to nonparameterzied minimal surface with B-spline surface. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2003,14(4):824–829 (in Chinese with English abstract). http://www.jos.org.cn/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1& file_no=20030416&journal_id=jos

[22] Qin L, Guan LT. Minimal surface modeling based on NURBS. Numerical Mathematics: A Journal of Chinese Universities, 2005,16(S1):175–181 (in Chinese with English abstract).

[23] Pan Q, Xu GL. Construction of minimal subdivision surface with a given boundary. Computer-Aided Design, 2011,43(4):374–380. [doi: 10.1016/j.cad.2010.12.013]

[24] Li CY, Wang RH, Zhu CG. Designing approximation minimal parametric surfaces with geodesics. Applied Mathematical Modelling, 2013,37(9):6415–6424. [doi: 10.1016/j.apm.2013.01.035]

[25] Ulrich P, Konrad P. Computing discrete minimal surface and their conjugates. Experimental Mathematics, 1993,2(1):15–36. [doi: 10.1080/10586458.1993.10504266]

[26] Gerhard D, Hutchinson JE. The discrete Plateau problem. Mathematics of Computation, 1999,68(225):1–23. [doi: 10.1090/S0025-5718-99-01025-X]

[27] Zhang Q, Xu GL. Weighted minimal surfaces and discrete weighted minimal surfaces. Journal of Information & Computational Science, 2005,2(2):395–408.

[28] Bobenko AI, Hoffmann T, Springborn BA, Minimal surfaces from circle patterns: Geometry from combinatorics. Annals of Mathematics, 2006,164(1):231–264. [doi: 10.4007/annals.2006.164.231]

[29] Wallner J, Pottmann H. Infinitesimally flexible meshes and discrete minimal surfaces. Monatshefte für Mathematik, 2008,153: 347−365. [doi: 10.1007/s00605-007-0502-4]

[30] Hao P, Choi YK, Liu Y, Hu WC, Du Q, Polthier K, Zhang CM, Wang WP. Robust modeling of constant mean curvature surfaces. In: Proc. of the SIGGRAPH ACM Trans. Graph. 2012. [doi: 10.1145/2185520.2185581]

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

[31] Liu D, Xu GL, Zhang Q. A discrete scheme of Laplace-Beltrami operator and its convergence over quadrilateral meshes. Computers & Mathematics with Applications, 2008,55(6):1081–1093. [doi: 10.1016/j.camwa.2007.04.047]

[32] Wang CCL. Computing length-preserved free boundary for quasi-developable mesh segmentation. IEEE Trans. on Visualization and Computer Graphics, 2008,14(1):25–36. [doi: 10.1109/TVCG.2007.1067]

[33] Olga S. Differential representations for mesh processing. Computer Graphics Forum, 2006,25(4):789–807. [doi: 10.1111/j.1467-8659.2006.00999.x]

[34] Jorge N, Stephen JW. Numerical Optimization. Springer-Verlag, 1999. [doi: 10.1007/b98874]

[35] Xu G, Mourrain B, Duvigneau R, Galligo A. Parameterization of computational domain in isogeometric analysis: Methods and comparison. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2011,(200):2021–2031. [doi: 10.1016/j.cma.2011.03.005]

附中文参考文献:

[4] 金文标,汪国昭.一类极小曲面的几何设计.计算机学报,1999,23(12):1277–1279. [doi: 10.3321/j.issn:0254-4164.1999.12.008]

[5] 徐岗,汪国昭.计算机辅助几何设计中极小曲面造型的研究进展.系统科学与数学,2008,28(8):984–992.

[6] 满家巨,汪国昭.正螺面与悬链面的表示与构造.计算机辅助设计与图形学学报,2005,17(3):431–436. [doi: 10.3321/j.issn:1003-9775.2005.03.009]

[8] 徐岗,汪国昭.一类极小曲面的控制网格表示.计算机辅助设计与图形学学报,2007,19(2):240–244. [doi: 10.3321/j.issn:1003-9775.2007.02.019]

[9] 满家巨,汪国昭.等温参数多项式极小曲面.计算机学报,2002,25(2):197–201. [doi: 10.3321/j.issn:0254-4164.2002.02.012]

[13] 徐岗,汪国昭.三角域上的调和 B-B 曲面.计算机学报,2006,29(12):2180–2185. [doi: 10.3321/j.issn:0254-4164.2006.12.015]

[16] 吴花精灵,王国瑾.推广 Dirichlet 方法用于 B 样条极小曲面设计.软件学报,2011,22(12):3015–3022. http://www.jos.org.cn/1000-9825/4009.htm [doi: 10.3724/SP.J.1001.2011.04009]

[17] 吴花精灵,王国瑾.插值边界曲线的 NURBS 近似极小曲面设计.软件学报,2010,21(增刊):67–74. http://www.jos.org.cn/1000-9825/10008.htm

[18] 徐岗,汪国昭,陈小雕.三角域上的 Plateau-Bézier 问题求解新方法.计算机学报,2011,34(3):548–555. [doi: 10.3724/SP.J.1016.2011.00548]

[21] 满家巨,汪国昭.B-样条函数极小曲面造型.软件学报,2003,14(4):824–829. http://www.jos.org.cn/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20030416&journal_id=jos

[22] 覃廉,关履泰.基于 NURBS 的极小曲面造型.高等学校计算数学学报,2005,16(S1):175–181.

徐岗(1981－),男,山东兖州人,博士,副教授,CCF 会员,主要研究领域为计算机辅助几何设计,等几何分析.

许金兰(1987－),女,博士,讲师,主要研究领域为等几何分析,几何造型.

朱亚光(1990－),男,硕士生,主要研究领域为等几何分析,曲面造型.

汪国昭(1944－),男,教授,博士生导师,主要研究领域为计算机辅助几何设计,计算机图形学.

李鑫(1994－),男,学士,主要研究领域为图像处理,数字水印.

许健泉(1956－),男,博士,教授,博士生导师,主要研究领域为计算机辅助设计,几何造型.

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn