软件学报 ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
Journal of Software,2017,28(7):1759−1772 [doi: 10.13328/j.cnki.jos.005066]

E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel: +86-10-62562563

# 贪婪缺省逻辑*

陈 博[1,2]， 曹存根[1]， 眭跃飞[1]

[1](中国科学院 计算技术研究所 智能信息处理重点实验室,北京 100190)

[2](国网山东省电力公司 电力科学研究院,山东 济南 250001)

通讯作者: 陈博,E-mail:chenbocb@hotmail.com

摘 要: 提出了一种贪婪缺省逻辑,旨在构造扩展的过程中尽可能地保留缺省规则当中的信息.给出了贪婪缺省逻辑的推演系统——GD 系统和贪婪缺省的 GD-扩展的定义.并且证明了对于缺省理论$(T,\Delta)$的一个扩展,必定存在一个贪婪缺省理论的 GD-扩展,使得缺省逻辑的扩展是贪婪缺省逻辑扩展的子集.同时,还存在贪婪缺省理论$(T,\Delta)$的某一 GD-扩展,该 GD-扩展不包含缺省理论的任一扩展.因此缺省逻辑和贪婪缺省逻辑是两种不同的逻辑.

关键词: 缺省逻辑;扩展;GD-扩展;伪子公式;Gentzen 系统

中图法分类号: TP181

中文引用格式: 陈博,曹存根,眭跃飞.贪婪缺省逻辑.软件学报,2017,28(7):1759−1772. http://www.jos.org.cn/1000-9825/5066.htm

英文引用格式: Chen B, Cao CG, Sui YF. Greedy default logic. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2017,28(7):1759−1772 (in Chinese). http://www.jos.org.cn/1000-9825/5066.htm

## Greedy Default Logic

CHEN Bo[1,2], CAO Cun-Gen[1], SUI Yue-Fei[1]

[1](Key Laboratory of Intelligent Information Processing, Institute of Computing Technology, The Chinese Academy of Sciences, Bejing 100190, China)

[2](Shandong Electric Power Research Institute, State Grid Corporation of China, Ji'nan 250001, China)

**Abstract**: A greedy default logic is proposed in this paper, in which pseudo extensions is defined with aim of keeping as much information of the defaults as possible. The paper proves that a GD-extension of a default theory $(T, \Delta)$ in the greedy default logic may not be any extension of the default theory, and vice versa. An extension of the default theory may be a subset of a pseudo extension of a default theory $(T, \Delta)$ in the greedy default. Hence, the default logic, the greedy default logic and the greedier default logic are different logics.

**Key words**: default logic; extension; GD-extension; pseudo-formula; Gentzen system

在经典逻辑中,推理是单调的,即在已知的前提中添加新的信息,不会使其推导出的集合缩小.与之相反,非单调逻辑中,推导关系 $(\vdash)$ 的单调性是不成立的.在已有的知识库中添加新的知识后,可能会推翻之前的推论.即推导出的集合不会随着前提的增加而扩大.典型的非单调逻辑有缺省逻辑、封闭世界假设、限定推理(circumscription)和单调模态逻辑等.信念修正也可以被看作是一种非单调逻辑.

经典逻辑可以准确地表明一个事物为真还是为假,但在现实世界中,很多事物都是一般情况下为真,但是有特殊情况的存在.比较经典的例子是"鸟通常会飞",在经典逻辑中,我们只能将其表示为"所有的鸟都会飞",这显然是假的,

* 基金项目: 农业部公益性行业(农业)科研专项(201303107)

Foundation item: Special Fund for Agro-Scientific Research in the Public Interest (201303107)

收稿时间: 2015-06-02; 修改时间: 2016-03-18; 采用时间: 2016-03-29; jos 在线出版时间: 2016-04-20

CNKI 网络优先出版: 2016-04-19 15:39:00, http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2560.TP.20160419.1539.004.html

因为还有类似于鸵鸟等特例的存在.但是,如果表示为"存在鸟会飞"又不符合我们想要表达的含义.因此,我们必须表示为"除了鸵鸟、企鹅...之外,所有的鸟都会飞".缺省逻辑的目的在于形式化这样的推导规则.

缺省逻辑[1]是由 Reiter 于 1980 年首先提出来的,是缺省推理的一种形式化方法.缺省逻辑中的缺省规则是基于假设的,并且在许多领域有着广泛的应用[2].包括非单调继承网络(nonmonotomnic inheritance network)[3]、信息检索[4]和常识推理[5]等.在缺省规则中,我们可以把上述情形形式化地表示为一个推导规则,即"缺省的,鸟会飞",不需要列出所有的例外.

缺省逻辑的语言是基于一阶逻辑的,公式的定义在缺省逻辑与一阶逻辑中是相同的.一个缺省规则是形如 $\frac{Bird:Flying}{Flying}$ 的表达式,其含义为"缺省的,鸟会飞".一个缺省理论$\Gamma$是一个二元组$(T,\Delta)$,其中,$T$ 是公式的集合,$\Delta$是缺省规则的集合.缺省理论的扩展是缺省推理中重要的概念,它由缺省理论和缺省推理定义.Łukaszewicz[6]给出了一种缺省逻辑的语义,但在这种语义中,缺省逻辑的模型实际上是满足扩展中所有一阶逻辑公式的模型,并没有对缺省规则进行解释,因此这种模型仍然是一阶逻辑的模型.

在实际应用方面,缺省逻辑存在着一定的局限性.研究人员提出一些缺省逻辑的变体(variant)来获得某些特定的性质或者赋予扩展更为直观的解释,亦或为了解决计算复杂度的问题.例如,在使用缺省规则对知识库进行扩充时,显式或者隐式地制定优先顺序[7];证实缺省逻辑(justified default logic)[8]和受限缺省逻辑(constrained default logic)[9]确保扩展的存在;为了降低计算扩展的难度,一些缺省逻辑的变体使用命题逻辑语言[10]、描述逻辑语言[11]以及 OWL-DL 语言[12]等可判定语言.近年来,臧良俊还提出了分层的缺省逻辑[13]和分层的缺省描述逻辑[14],将缺省规则由公式层面拓展到了规则层面,为缺省逻辑引入了分层的概念.

考虑如下例子,给定一个缺省理论$(T,\Delta)$,其中,$T=\{\mathrm{Man(Jone)},\neg\mathrm{HasArm(Jone)}\}$,表达某个人 Jone 没有胳膊;$\Delta$由一个缺省规则 $\frac{\mathrm{Man}(x):\mathrm{HasArm}(x)\wedge\mathrm{HasLeg}(x)}{\mathrm{HasArm}(x)\wedge\mathrm{HasLeg}(x)}$ 组成,该缺省规则的含义是:缺省地,人是有胳膊和腿的.在缺省逻辑中,缺省理论$(T,\Delta)$只有一个扩展 $\mathrm{Th}(\{\mathrm{Man(Jone)},\neg\mathrm{HasArm(Jone)}\})$, 即我们不能获得该人是否具有腿的信息.事实上,我们希望能够从上述的缺省理论中推导出没有胳膊的 Jone 是缺省的有腿的.形式化地表示为由 $\mathrm{Man(Jone)},\neg\mathrm{HasArm(Jone)},\frac{\mathrm{Man}(x):\mathrm{HasArm}(x)\wedge\mathrm{HasLeg}(x)}{\mathrm{HasArm}(x)\wedge\mathrm{HasLeg}(x)}$ 缺省地推导出 HasLeg(Jone).

本文将提出一种贪婪缺省逻辑,使得在贪婪缺省逻辑中,缺省理论的扩展(我们称其为 GD-扩展)要尽可能地保留缺省规则中结论公式中所蕴含的信息.为了表达缺省理论中公式和扩展的关系,参照子公式的概念,我们引入了伪子公式的概念.并且,一个公式的子公式一定是该公式的伪子公式,反之,结论不成立.例如,上述的例子,在贪婪缺省逻辑中,我们会将公式 $q$^$r$ 的伪子公式 $r$ 添加到扩展中去,即保留了公式 $q$^$r$ 与$\{p,\neg q\}$协调的部分.本文将给出贪婪缺省逻辑中的推导规则,建立了贪婪缺省逻辑的推演系统——GD 系统.类似于经典逻辑中的 Gentzen 推演系统[15],缺省逻辑推演系统——GD 系统的推导规则通过分解连接词的方法,将每个缺省规则的结论部分拆分为原子公式或者原子公式的否定,判断原子公式(原子公式的否定)是否保留或者删除,将保留的原子公式(原子公式的否定)重新按照原有的连接词进行复合,得到结论公式的伪子公式.本文给出了贪婪缺省逻辑扩展的构造方法,并对贪婪缺省逻辑的扩展和缺省逻辑的 GD-扩展进行了比较,证明了如果一个缺省理论存在扩展 $E$,则存在一个 GD-扩展 $E'$,使得 $E\subseteq E'$.反之不成立.

本文第 1 节给出缺省逻辑的基本定义和伪公式的定义.第 2 节给出贪婪缺省逻辑的推演系统——GD 系统.第 3 节讨论贪婪缺省逻辑的推演系统——GD 系统的性质.第 4 节通过例子对贪婪缺省逻辑的扩展(即 GD-扩展)和缺省逻辑的扩展进行比较.第 5 节总结全文.

## 1 研究框架

为了简化讨论,我们使用命题逻辑的语言作为缺省逻辑的语言.

**定义 1.1**. 给定命题逻辑的语言 $L$,$L$ 包含下列符号.

- 命题变量:$p_0,p_1,\ldots$;

- 逻辑连接词:¬,∧,∨.

公式定义如下:

$$\phi = p \mid \neg p \mid \phi_1 \wedge \phi_2 \mid \phi_1 \vee \phi_2.$$

在本文中,否定连接词“¬”仅出现在原子公式的前面.因为由德摩根律,我们可以将一般公式化简为否定连接词限定只能出现在原子公式前的形式.

模型 **M** 是一个赋值 $v$.我们称公式$\phi$在模型 **M** 下是可满足的,记为 $\mathbf{M} \vDash \phi$,如果

$$\begin{cases} v(p)=1, & \text{如果}\phi = p \\ v(p)=0, & \text{如果}\phi = \neg p \\ \mathbf{M} \vDash \phi_1\text{并且}\mathbf{M} \vDash \phi_2, & \text{如果}\phi = \phi_1 \wedge \phi_2 \\ \mathbf{M} \vDash \phi_1\text{或者}\mathbf{M} \vDash \phi_2, & \text{如果}\phi = \phi_1 \vee \phi_2 \end{cases}.$$

**定义 1.2(缺省规则)**. 缺省规则$\delta$是形如 $\dfrac{\phi:\psi_1,\ldots,\psi_n}{\chi}$ 的表达式,其中,

- $\phi,\psi_1,\ldots,\psi_n,\chi$为公式;
- $\phi$称为$\delta$的前提条件,记为 pre($\delta$);
- $\psi_1,\ldots,\psi_n$ 称为$\delta$的检验条件,记为 just($\delta$);
- $\chi$称为$\delta$的结论,记为 cons($\delta$).

一个缺省规则$\delta$是正则的,如果$\delta$形如 $\dfrac{\phi:\psi}{\psi}$, 通常,为了便于表示,我们记为 $\phi \rightsquigarrow \psi$.

**定义 1.3(缺省理论)**. 缺省理论$\Gamma$是一个二元组$(T,\Delta)$,其中,$T$ 是公式的集合,$\Delta$是缺省规则的集合.如果$\Delta$中的缺省规则都是正则的,则称缺省理论$\Gamma=(T,\Delta)$为正则缺省理论.

**定义 1.4($\wedge_\Gamma$演算)**. 给定缺省理论$\Gamma=(T,\Delta)$,$A$ 是公式的集合,$\wedge_\Gamma(A)$是满足下列条件的最小集合.

- $\wedge_\Gamma 1)$. $T \subseteq \wedge_\Gamma(A)$;
- $\wedge_\Gamma 2)$. $Th(\wedge_\Gamma(A)) = \wedge_\Gamma(A)$;
- $\wedge_\Gamma 3)$. 对于任意的 $\delta = \dfrac{\phi:\psi_1,\ldots,\psi_n}{\chi} \in \Delta$, 如果 $\phi \in \wedge_\Gamma(A)$, $\neg\psi_1 \notin A,\ldots,\neg\psi_n \notin A$, 则 $\chi \in \wedge_\Gamma(A)$.

$Th(A)$表示 $A$ 的理论闭包.

**定义 1.5(扩展)**. 给定缺省理论$\Gamma$和一个公式集合 $E$,如果 $E$ 是$\wedge_\Gamma$ 的固定点,即 $E=\wedge_\Gamma(E)$,则称 $E$ 为$\Gamma$的一个扩展.

**定义 1.6**. 给定公式的集合 $E$ 和缺省理论$\Gamma=(T,\Delta)$.定义

$E\_0=T$,

$$E_{i+1} = Th(E_i) \cup \left\{ \chi \mid \frac{\phi:\psi_1,\ldots,\psi_n}{\chi} \in \Delta, \phi \in E_i, \neg\psi_1,\ldots,\neg\psi_n \notin E \right\},$$

则 $E$ 是缺省理论$\Gamma=(T,\Delta)$的扩展当且仅当 $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$.

**定义 1.7(子公式)**. 给定公式$\phi$,公式$\psi$是$\phi$的子公式,记作$\psi \le \phi$,如果$\phi=\psi$或者

(i) 如果$\phi=\neg\phi_1$,则$\psi \le \phi_1$;

(ii) 如果$\phi=\phi_1 \vee \phi_2$ 或$\phi_1 \wedge \phi_2$,则$\psi \le \phi_1$ 或$\psi \le \phi_2$.

令$\phi=(p\vee q)\wedge(r\vee s)$,则有 $p\vee q, r\vee s \le \phi$和 $p\wedge r, q\wedge r, p\wedge(r\vee s) \le \phi$.

为了区分形如$p\wedge r, q\wedge r, p\wedge(r\vee s)$这种既是公式$\phi$的一部分,但又不是$\phi$的子公式的公式,我们引入伪子公式的概念.

**定理 1.8(伪子公式)**. 给定公式$\phi[\psi_1,\ldots,\psi_n]$,其中,$\psi_i$ 是$\psi_i$ 在$\phi$中的一次出现,令公式$\psi=\phi[\psi_1/\lambda,\ldots,\psi_n/\lambda]$,即将$\phi$中的$\psi_i$替换为空公式$\lambda$,我们称$\psi$为$\phi$的伪子公式,记作$\psi \subseteq \phi$. $\psi$为$\phi$的伪子公式,如果$\psi \subseteq \phi$且$\psi \ne \phi$.

令$\phi=(p\vee q)\wedge(r\vee s)$,则有 $p\vee q, r\vee s, p\wedge r, q\wedge r, p\wedge(r\vee s) \subseteq \phi$.

**命题 1.9**. 给定公式$\phi_1,\phi_2,\psi_1$ 和$\psi_2$,

(i) $\psi_1 \le \phi_1$ 蕴含 $\psi_1 \le \phi_1 \vee \phi_2$ 并且 $\psi_1 \le \phi_1 \wedge \phi_2$;

(ii) $\psi_1 \subseteq \phi_1$ 与 $\psi_2 \subseteq \phi_2$ 蕴含 $\neg\psi_1 \subseteq \neg\phi_1, \psi_1 \vee \psi_2 \subseteq \phi_1 \vee \phi_2$ 与 $\psi_1 \wedge \psi_2 \subseteq \phi_1 \wedge \phi_2$.

**命题 1.10**. 对于任意公式$\phi$和$\psi$,如果$\psi \le \phi$,则$\psi \subseteq \phi$.

**命题 1.11**. $\le$和$\subseteq$是定义在公式集合上的偏序关系.

给定公式$\phi$,令 $P(\phi)$为$\phi$的所有伪子公式构成的集合.每一个公式$\psi \in P(\phi)$都由一个集合$\tau(\psi)=\{[p_1],...,[p_n]\}$来决定,其中,$[p_i]$是原子公式 $p_i$ 在$\phi$中的一次出现,满足$\psi=\phi([p_1]/\lambda,\ldots,[p_n]/\lambda)$.

给定任意$\psi_1,\psi_2 \in P(\phi)$,定义:

$$\psi_1 \cap \psi_2 = \max\{\psi : \psi \subseteq \psi_1, \psi \subseteq \psi_2\};$$
$$\psi_1 \cup \psi_2 = \min\{\psi : \psi \supseteq \psi_1, \psi \supseteq \psi_2\}.$$

**命题 1.12**. 对于任意的伪子公式$\psi_1,\psi_2 \in P(\phi)$, $\psi_1 \cap \psi_2$ 和 $\psi_1 \cup \psi_2$ 都是存在的.$\mathbf{P}(\phi)=(P(\phi),\cup,\cap,\phi,\lambda)$是具有最大元$\phi$和最小元 $\lambda$ 的格.

**命题 1.13**. 对于任意的伪子公式$\psi_1,\psi_2 \in P(\phi)$, $\psi_1 \subseteq \psi_2$ 当且仅当 $\tau(\psi_1) \supseteq \tau(\psi_2)$,并且有

$$\tau(\psi_1 \cap \psi_2) = \tau(\psi_1) \cup \tau(\psi_2);$$
$$\tau(\psi_1 \cup \psi_2) = \tau(\psi_1) \cap \tau(\psi_2).$$

## 2 贪婪缺省推演系统——GD 系统

在本节中,我们考虑的缺省规则均为正则缺省规则.考虑缺省理论:$\Gamma=(T,\Delta)$,其中,

$$T = \{\mathrm{Man(Jone)}, \neg\mathrm{HasArm(Jone)}\},\ \Delta = \{\mathrm{Man}(x) \rightsquigarrow \mathrm{HasLeg}(x) \wedge \mathrm{HasArm}(x)\}.$$

在经典缺省逻辑中,$\Gamma$的扩展为 $E=Th(\{\mathrm{Man(Jone)},\neg\mathrm{HasArm(Jone)}\})$.我们从已知的缺省规则中不能获得更多的信息,并且因为 HasArm(Jone)$\wedge$HasLeg(Jone)与$\neg$HasArm(Jone)矛盾而将 HasLeg(Jone)也一同舍弃了.一般来说,一个没有手的人是有腿的,这是符合我们日常认知的.因此我们提出贪婪缺省逻辑,使得在贪婪缺省逻辑中,$E'=Th(\{\mathrm{Man(Jone)},\neg\mathrm{HasArm(Jone)},\mathrm{HasLeg(Jone)}\})$为缺省理论$\Gamma$的扩展(GD-扩展).

**定义 2.1**. 缺省矢列式是形如 $T_1|\Delta_1 \Rightarrow T_2|\Delta_2$ 的表达式.其中,$T_1,T_2$ 是公式的集合,$\Delta_1,\Delta_2$ 是缺省规则的序列.

表达式$\Delta_1,\delta,\Delta_2$ 表示$\Delta_2 \le \delta \le \Delta_1$,其中,$\Delta_1$ 和$\Delta_2$ 是缺省规则的序列,$\delta$是缺省规则,即$\Delta_1$ 中的缺省规则的序优于$\delta$,并且$\delta$的序优于$\Delta_2$ 中的缺省规则.

缺省矢列式 $T|\Delta_1,\delta,\Delta_2 \Rightarrow T,\theta|\Delta_1,\Delta_2$ 的含义为:缺省表达式 $T|\Delta_1,\delta,\Delta_2$ 可以通过作用缺省规则$\delta$规约为 $T,\theta|\Delta_1,\Delta_2$.

在这里,我们要求对于任意的公式$\phi \in \mathrm{pre}(\Delta_1)\mathrm{pre}(\Delta_1)$, $T \nvdash \phi$;并且 $T \vdash \mathrm{pre}(\delta)$.

在缺省逻辑中,缺省规则作用的思路是:给定一个缺省规则 $\phi \rightsquigarrow \psi$ 和公式集合 $T$,我们首先判断条件 $T \vdash \phi$ 是否成立,如果条件成立,再判断$\psi$与 $T$ 是否协调;若协调,则将$\psi$添加到集合 $T$ 中去.因此,改变现有集合 $T$ 的是公式$\psi$而不是$\phi$.

如果将 $T$ 看作是一个知识系统,公式$\phi$可以看作是规则的启动条件,它不对原有的系统的内容进行扩展.并且,如果启动条件得到满足,已有的知识与$\psi$不矛盾的话,我们就可以将$\psi$作为一条新的知识添加到系统中去.但是,如果$\psi$与原有的知识矛盾,在缺省逻辑中我们会将$\psi$舍去.而缺省规则 $\phi \rightsquigarrow \psi$,它实际上是一条经验规则,其含义,是当$\phi$成立时,通常有$\psi$成立.公式$\psi$的结构也可能不是简单的原子公式,而是通过逻辑连接词复合而成的复杂公式.正如上面的例子一样,即使$\psi$在系统中不成立,但$\psi$中可能还有一些与原系统不矛盾的信息,因此,我们希望能够通过分解连接词的方法,尽可能地保留$\psi$中与 $T$ 不矛盾的信息.

贪婪缺省推演系统——GD 系统:推导规则.

在下列所有的推导规则中,$T$ 是公式集合,$\Delta_1$ 和$\Delta_2$ 是缺省规则的序列,并且对于$\Delta_1$ 中的任意缺省规则$\delta=\phi \rightsquigarrow \psi$,都有 $T \nvdash \phi$.

**定义 2.2**. Atomic$^+$-rule:

$$\frac{T \vdash \phi \quad T \nvdash \neg p}{T\,|\,\Delta_1,\phi \rightsquigarrow p,\Delta_2 \Rightarrow T,p\,|\,\Delta_1,\Delta_2},\quad \frac{T \vdash \phi \quad T \nvdash p}{T\,|\,\Delta_1,\phi \rightsquigarrow \neg p,\Delta_2 \Rightarrow T,\neg p\,|\,\Delta_1,\Delta_2}.$$

公式$\theta$可能是属于$T$的,但是我们仍记为$T\mid\Delta_1,\phi\rightsquigarrow\psi,\Delta_2\Rightarrow T,\theta\mid\Delta_1,\Delta_2$来表示该$\theta$是通过作用缺省规则产生的.

**定义 2.3**. Atomic-rule:

$$\frac{T\vdash\phi\ \ T\vdash\neg p}{T\mid\Delta_1,\phi\rightsquigarrow p,\Delta_2\Rightarrow T,\lambda\mid\Delta_1,\Delta_2},\quad \frac{T\vdash\phi\ \ T\vdash p}{T\mid\Delta_1,\phi\rightsquigarrow\neg p,\Delta_2\Rightarrow T,\lambda\mid\Delta_1,\Delta_2}.$$

原子公式和原子公式的否定形式是公式的最基本形式,如果协调,则将公式添加到集合$T$中去.如果不协调,则表明$T$可以推导出公式的否定,由于原子公式不能再继续分解,因此将公式舍去.

**定义 2.4**. $\wedge^{\downarrow}$-rule:

$$\frac{T\vdash\phi\ \ T\mid\Delta_1,\phi\rightsquigarrow\psi_1,\Delta_2\Rightarrow T,\psi_1\mid\Delta_1,\Delta_2\ \ T,\psi_1\mid\Delta_1,\phi\rightsquigarrow\psi_2,\Delta_2\Rightarrow T,\psi_1,\psi_2\mid\Delta_1,\Delta_2}{T\mid\Delta_1,\phi\rightsquigarrow\psi_1\wedge\psi_2,\Delta_2\Rightarrow T,\psi_1\wedge\psi_2\mid\Delta_1,\Delta_2}.$$

$\wedge^{\downarrow}$-rule 是指对于缺省规则$\phi\rightsquigarrow\psi_1\wedge\psi_2$,如果$T\vdash\phi$成立,集合$T$作用缺省规则$\phi\rightsquigarrow\psi_1$可以得到$T\cup\{\psi_1\}$, $T\cup\{\psi_1\}$作用缺省规则$\phi\rightsquigarrow\psi_2$可以得到$T\cup\{\psi_1,\psi_2\}$,则集合$T$作用缺省规则$\phi\rightsquigarrow\psi_1\wedge\psi_2$可以得到$T\cup\{\psi_1\wedge\psi_2\}$.

事实上,$\wedge^{\downarrow}$-rule 还有另外一种形式:

$$\frac{T\vdash\phi\ \ T\mid\Delta_1,\phi\rightsquigarrow\psi_2,\Delta_2\Rightarrow T,\psi_2\mid\Delta_1,\Delta_2\ \ T,\psi_2\mid\Delta_1,\phi\rightsquigarrow\psi_1,\Delta_2\Rightarrow T,\psi_1,\psi_2\mid\Delta_1,\Delta_2}{T\mid\Delta_1,\phi\rightsquigarrow\psi_1\wedge\psi_2,\Delta_2\Rightarrow T,\psi_1\wedge\psi_2\mid\Delta_1,\Delta_2}.$$

即如果$T\vdash\phi$成立,集合$T$作用缺省规则$\phi\rightsquigarrow\psi_1$可以得到$T\cup\{\psi_2\},T\cup\{\psi_2\}$作用缺省规则$\phi\rightsquigarrow\psi_1$可以得到$T\cup\{\psi_1,\psi_2\}$,则集合$T$作用缺省规则$\phi\rightsquigarrow\psi_1\wedge\psi_2$可以得到$T\cup\{\psi_1\wedge\psi_2\}$.因为对于集合$T$和公式$\psi_1,\psi_2,T\cup\{\psi_1,\psi_2\}$是协调的,所以这两条规则是等价的,我们只保留其中的一条.并且,我们在之后的定理中也证明,如果$\psi$可以全部保留,则$\psi$与集合$T$是协调的.

**定义 2.5**. $\wedge^{\uparrow}$-rule:

$$\frac{T\vdash\phi\ \ T\mid\Delta_1,\phi\rightsquigarrow\psi_1,\Delta_2\Rightarrow T,\theta_1\mid\Delta_1,\Delta_2\ \ T,\theta_1\mid\Delta_1,\phi\rightsquigarrow\psi_2,\Delta_2\Rightarrow T,\theta_1,\theta_2\mid\Delta_1,\Delta_2}{T\mid\Delta_1,\phi\rightsquigarrow\psi_1\wedge\psi_2,\Delta_2\Rightarrow T,\theta_1\wedge\theta_2\mid\Delta_1,\Delta_2},$$

$$\frac{T\vdash\phi\ \ T\mid\Delta_1,\phi\rightsquigarrow\psi_2,\Delta_2\Rightarrow T,\theta_2\mid\Delta_1,\Delta_2\ \ T,\theta_2\mid\Delta_1,\phi\rightsquigarrow\psi_1,\Delta_2\Rightarrow T,\theta_2,\theta_1\mid\Delta_1,\Delta_2}{T\mid\Delta_1,\phi\rightsquigarrow\psi_1\wedge\psi_2,\Delta_2\Rightarrow T,\theta_1\wedge\theta_2\mid\Delta_1,\Delta_2},$$

其中,$\theta_1$和$\theta_2$分别是$\psi_1$和$\psi_2$的伪子公式.

在$\wedge^{\uparrow}$-rule 中,缺省规则$\phi\rightsquigarrow\psi$作用在集合$T$上得到的是$\psi$的一个伪子公式.这说明,$\psi$本身与集合$T$是不协调的.$\psi$的最外层逻辑联结词是合取符号,即$\psi=\psi_1\wedge\psi_2$.于是有$\psi_1\wedge\psi_2$与$T$是不协调的,缺省规则$\phi\rightsquigarrow\psi_1$和$\phi\rightsquigarrow\psi_2$作用的顺序不同,则可能产生的伪子公式不同.例如,最简单的情况,令$T=\{p\},\phi\rightsquigarrow\psi_1\wedge\psi_2=p\rightsquigarrow q\wedge\neg q$.先作用$p\rightsquigarrow q$产生的集合为$\{p,q\}$,而先作用$p\rightsquigarrow\neg q$产生的集合为$\{p,\neg q\}$.

所以上述规则并不是等价的,需要一一列出.

**定义 2.6**. $\vee^{\downarrow}$-rule:

$$\frac{T\vdash\phi\ \ T\mid\Delta_1,\phi\rightsquigarrow\psi_1,\Delta_2\Rightarrow T,\psi_1\mid\Delta_1,\Delta_2}{T\mid\Delta_1,\phi\rightsquigarrow\psi_1\vee\psi_2,\Delta_2\Rightarrow T,\psi_1\vee\psi_2\mid\Delta_1,\Delta_2},\quad \frac{T\vdash\phi\ \ T\mid\Delta_1,\phi\rightsquigarrow\psi_2,\Delta_2\Rightarrow T,\psi_2\mid\Delta_1,\Delta_2}{T\mid\Delta_1,\phi\rightsquigarrow\psi_1\vee\psi_2,\Delta_2\Rightarrow T,\psi_1\vee\psi_2\mid\Delta_1,\Delta_2}.$$

在$\vee^{\downarrow}$-rule 中,如果$T$和$\psi_1$或者$\psi_2$是协调的,则$T$与$\psi_1\vee\psi_2$是协调的.因此只要满足上述条件之一,我们即可把$\psi_1\vee\psi_2$添加到$T$当中去.即当$\psi$与集合$T$是协调的,则将$\psi$全部保留.

**定义 2.7**. $\vee^{\uparrow}$-rule:

$$\frac{T\vdash\phi\ \ T\mid\Delta_1,\phi\rightsquigarrow\psi_1,\Delta_2\Rightarrow T,\theta_1\mid\Delta_1,\Delta_2\ \ T\mid\Delta_1,\phi\rightsquigarrow\psi_2,\Delta_2\Rightarrow T,\theta_2\mid\Delta_1,\Delta_2}{T\mid\Delta_1,\phi\rightsquigarrow\psi_1\vee\psi_2,\Delta_2\Rightarrow T\mid\Delta_1,\Delta_2},$$

其中,$\theta_1$和$\theta_2$分别是$\psi_1$和$\psi_2$的真伪子公式.

在$\vee^{\downarrow}$-rule 中,公式$\psi_1\vee\psi_2$与集合$T$是不协调的.因此公式$\psi_1$和$\psi_2$与集合$T$都是不协调的.即集合$T$作用$\phi\rightsquigarrow\psi_1$和$\phi\rightsquigarrow\psi_2$产生的新公式都是$\psi_1$和$\psi_2$的伪子公式,考虑到公式$\psi_1$和$\psi_2$与集合$T$都是不协调的,我们不将任何公式添加到$T$中去.

**定义 2.8**. **TR**-rule:

$$\frac{T_1 \mid \Delta_1 \Rightarrow T_2 \mid \Delta_2 \quad T_2 \mid \Delta_2 \Rightarrow T_3 \mid \Delta_3}{T_1 \mid \Delta_1 \Rightarrow T_3 \mid \Delta_3}.$$

直观上,**TR**-rule 表明缺省矢列式是具有传递性的,即如果矢列式 $T_1|\Delta_1\Rightarrow T_2|\Delta_2$ 成立,且有 $T_2|\Delta_2\Rightarrow T_3|\Delta_3$ 成立,则有 $T_1|\Delta_1\Rightarrow T_3|\Delta_3$ 成立.

**定义 2.9**(**证明**). 给定公式的集合 $S_1$ 和 $S_2$,缺省规则的集合$\Delta_1$ 和$\Delta_2$($\Delta_2$ 可能是$\varnothing$).我们称缺省矢列式 $S_1|\Delta_1\Rightarrow S_2|\Delta_2$ 是 GD-可证的,记为$\vdash^{\mathbf{GD}} S_1 \mid \Delta_1 \Rightarrow S_2 \mid \Delta_2$,当且仅当存在一棵以 $S_1|\Delta_1\Rightarrow S_2|\Delta_2$ 为根节点的证明树 **T**,满足:

1) **T** 的非叶节点都是缺省矢列式;

2) **T** 的所有叶节点都是 Axiom 的上层;

3) **T** 中除了根节点以外的所有节点都是某一个推导规则的上层,且其直接后继节点为该缺省规则的下层.

显然,证明树 **T** 的任意子树也是证明树.

例如:给定缺省理论 $\Gamma=(T,\Delta)$, 其中, $T=\{p\}, \Delta=\{p \rightsquigarrow q, q \rightsquigarrow r\}$, 则

$$\frac{\dfrac{T \vdash p \quad T \nvdash \neg q}{p \mid p \rightsquigarrow q, q \rightsquigarrow r \Rightarrow p,q \mid q \rightsquigarrow r} \quad \dfrac{p,q \vdash q \quad p,q \nvdash \neg r}{p,q \mid q \rightsquigarrow r \Rightarrow p,q,r}}{T \mid p \rightsquigarrow q, q \rightsquigarrow r \Rightarrow p,q,r}$$

为 $T|\Delta\Rightarrow p,q,r$ 的一棵证明树,即 $T|\Delta\Rightarrow p,q,r$ 是可证的.

**命题 2.10**. 给定缺省矢列式 $S_1|\Delta_1\Rightarrow S_2|\Delta_2$,如果 $S_1|\Delta_1\Rightarrow S_2|\Delta_2$ 是 GD-可证的,则有$\Delta_2\subseteq\Delta_1, S_1\subseteq S_2$.

**定义 2.11**(**公式的序 *L* 下可证性**). 给定缺省理论$\Gamma=(T,\Delta)$和一个定义在$\Delta$上的全序 $L$,其中,$L=\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_n,\dots$ 公式$\psi$是关于缺省理论$\Gamma=(T,\Delta)$在序 $L$ 下可证的,如果存在一个$\Delta$中的缺省规则的序列 $\delta'_1,\delta'_2,\dots,\delta'_j$,使得:

$\vdash^{\mathbf{GD}} T_0 \mid \Delta_{0'},\delta'_1,\Delta_{0''} \Rightarrow T_0,\theta_1 \mid \Delta_{0'},\Delta_{0''}$,

...

$\vdash^{\mathbf{GD}} T_{i-1} \mid \Delta_{i-1'},\delta'_i,\Delta_{i-1''} \Rightarrow T_{i-1},\theta_i \mid \Delta_{i-1'},\Delta_{i-1''}$,

...

$\vdash^{\mathbf{GD}} T_{j-1} \mid \Delta_{j-1'},\delta'_1,\Delta_{j-1''} \Rightarrow T_{j-1},\theta_j \mid \Delta_{j-1'},\Delta_{j-1''}$,

$T_j \vdash \psi$,

其中, $\Delta_0=\Delta=\Delta_{0'}\cup\Delta_{0''}, \Delta_i=\Delta_{i-1}-\{\delta_{i'}\}=\Delta_{i'}\cup\Delta_{i''}$; 对于任意的缺省规则 $\delta\in\Delta_{i'}$, $\delta \geq^L \delta_{i+1'}$ 并且 $T_i \nvdash \mathrm{pre}(\delta)$; 同时,对于任意的缺省规则 $\delta\in\Delta_{i''}$, 都有 $\delta_{i+1'} \geq^L \delta$.

从公式的可证性我们了解到,缺省规则的作用依赖于给定的严格偏序,每一步作用的缺省规则都是活动的,并且具有最优先的序.在每次作用完之后,我们就将这个缺省规则从原有的集合中移除.我们要求每一步的矢列式都是缺省可证的,并且由这些矢列式组成了一个连续可证的缺省矢列式的序列,使得可证的公式可以被矢列式当中的某一个集合 $T'$推导出来.这样按照严格偏序去一步一步地作用缺省规则而生成的公式,都是在该序下关于缺省理论 $\Gamma$ 可证的公式,那么包含所有这些公式的集合,我们定义为 GD-扩展,定义如下.

**定义 2.12**(**GD-扩展**).给定缺省理论$\Gamma=(T,\Delta)$,其中,$T$ 是协调的公式集合,$\Delta$是缺省规则的集合.公式的集合 $E$ 是缺省理论$\Gamma=(T,\Delta)$的一个 GD-扩展,如果存在一个$\Delta$上的全序 $L=\delta_0,\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_i,\dots$,使得

$\vdash^{\mathbf{GD}} T_0 \mid \Delta_{0'},\delta'_1,\Delta_{0''} \Rightarrow T_0,\theta_1 \mid \Delta_{0'},\Delta_{0''}$,

...

$\vdash^{\mathbf{GD}} T_{i-1} \mid \Delta_{i-1'},\delta'_i,\Delta_{i-1''} \Rightarrow T_{i-1},\theta_i \mid \Delta_{i-1'},\Delta_{i-1''}$,

...

$E=Th\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} T_i\right)$,

其中, $T_0=T, T_i=T_{i-1}\cup\{\theta_i\}$; $\Delta_0=\Delta=\Delta_{0'}\cup\Delta_{0''}, \Delta_i=\Delta_{i-1}-\{\delta_{i'}\}=\Delta_{i'}\cup\Delta_{i''}$; 对于任意的缺省规则 $\delta\in\Delta_{i-1'}$, $\delta \geq^L \delta_{i'}$, 并且 $T_{i-1} \nvdash \mathrm{pre}(\delta)$;同时,对于任意的缺省规则 $\delta\in\Delta_{i-1''}$, 都有 $\delta_{i'} \geq^L \delta$.

我们称 $E$ 是缺省理论$\Gamma$=($T$,Δ)的一个关于序 $L$ 的 GD-扩展.并且,对于任意公式 $\phi \in \mathrm{pre}\left(\bigcap_{i=0}^{\infty}\Delta_i\right), E \nvdash \phi$.

不同于缺省逻辑,贪婪缺省逻辑的 GD-扩展的定义是构造型的.在贪婪缺省逻辑中,由于随着作用集合的变化,作用相同的缺省规则产生的伪子公式是不尽相同的;即便是将缺省规则作用在最终生成的 GD-扩展上所生成的公式与在生成扩展的过程中作用于该规则所产生的公式也未必相同.而在缺省逻辑中,即使集合发生变化,作用相同的缺省规则产生的公式要么是其本身,要么是一个空公式;并且,将缺省规则作用在最终生成的扩展上生成的公式与在生成扩展的过程中作用于该规则上产生的公式是相同的.因此,我们不能把 GD-扩展不动点型定义为类似于缺省逻辑中形式,即 $\wedge_\Gamma(S) = Th(T \cup \{\phi : S \vdash \phi, E \nvdash \neg\psi, \phi \rightsquigarrow \psi \in \Delta\})$,其中,$E$ 是扩展.

例 2.13:给定缺省理论$\Gamma$=($T$,Δ), $T=\{p_1,\neg p_2\}, \Delta=\{p_3 \rightsquigarrow p_4, p_1 \rightsquigarrow p_2 \wedge p_3, p_4 \rightsquigarrow p_2\}$. $L$ 是定义在Δ上的全序,其中,$L = p_3 \rightsquigarrow p_4, p_1 \rightsquigarrow p_2 \wedge p_3, p_4 \rightsquigarrow p_2$.我们构造缺省理论$\Gamma$=($T$,Δ)的一个关于序 $L$ 的 GD-扩展如下.

Step 1.

$$T_0 = T, \Delta_0 = \Delta;\ \delta_{k_0} = p_1 \rightsquigarrow p_2 \wedge p_3, \Delta_{0'} = \{p_3 \rightsquigarrow p_4\}, \Delta_{0''} = \{p_4 \rightsquigarrow p_2\};$$

因为

$$\frac{\dfrac{T_0 \vdash p_1 \quad T_0 \vdash \neg p_2}{T_0 \mid \Delta_{0'}, p_1 \rightsquigarrow p_2, \Delta_{0''} \Rightarrow T_0, \lambda \mid \Delta_{0'}, \Delta_{0''}} \quad \dfrac{T_0 \vdash p_1 \quad T_0 \nvdash \neg p_3}{T_0 \mid \Delta_{0'}, p_1 \rightsquigarrow p_3, \Delta_{0''} \Rightarrow T_0, p_3 \mid \Delta_{0'}, \Delta_{0''}}}{T_0 \mid \Delta_{0'}, p_1 \rightsquigarrow p_2 \wedge p_3, \Delta_{0''} \Rightarrow T_0, p_3 \mid \Delta_{0'}, \Delta_{0''}},$$

故而有$\vdash^{\mathbf{D}} T_0 \mid \Delta_{0'}, \delta_{k_0}, \Delta_{0''} \Rightarrow T_0, \theta_{k_0} \mid \Delta_{0'}, \Delta_{0''}$,其中,$\theta_{k_0} = p_3$.

Step 2.

$$\Delta_1 = \Delta_{0'} \cup \Delta_{0''} = \{p_3 \rightsquigarrow p_4, p_4 \rightsquigarrow p_2\}, T_1 = T_0 \cup \{\theta_{k_0}\};\ \delta_{k_1} = p_3 \rightsquigarrow p_4, \Delta_{1'} = \varnothing, \Delta_{0''} = \{p_4 \rightsquigarrow p_2\};$$

因为

$$\frac{T_1 \vdash p_3 \quad T_1 \nvdash \neg\neg p_4}{T_1 \mid p_3 \rightsquigarrow p_4, \Delta_{1''} \Rightarrow T_1, p_4 \mid \Delta_{1''}},$$

故而有$\vdash^{\mathbf{D}} T_1 \mid p_3 \rightsquigarrow p_4, \Delta_{1''} \Rightarrow T_1, p_4 \mid \Delta_{1''}$,其中,$\theta_{k_1} = p_4$.

Step 3.

$$\Delta_2 = \Delta_{0'} \cup \Delta_{0''} = \{p_4 \rightsquigarrow p_2\}, T_2 = T_1 \cup \{\theta_{k_1}\};\ \delta_{k_2} = p_4 \rightsquigarrow p_2, \Delta_{1'} = \varnothing, \Delta_{0''} = \varnothing;$$

因为

$$\frac{T_2 \vdash p_4 \quad T_2 \vdash \neg p_2}{T_2 \mid p_4 \rightsquigarrow p_2 \Rightarrow T_2, \lambda},$$

故而有$\vdash^{\mathbf{D}} T_2 \mid p_4 \rightsquigarrow p_2 \Rightarrow T_2, \lambda$,其中,$\theta_{k_2} = \lambda$.

故而 $Th(T_2)$是缺省理论$\Gamma$=($T$,Δ)的一个关于序 $L$ 的 GD-扩展,并且公式 $p_3$,$p_4$ 都是于缺省理论$\Gamma$=($T$,Δ)在序 $L$ 下可证的.

## 3 贪婪缺省推演系统-GD 系统的性质

例 3.1:给定公式集合 $S=\{p,\neg q_2,\neg q_4\}$ 和缺省规则 $\delta = p \rightsquigarrow (q_1 \wedge q_2) \wedge (q_3 \wedge q_4)$.首先,因为 $S \vdash p$,缺省规则$\delta$是可作用于集合 $S$ 上的;之后,按照贪婪缺省逻辑的推导规则,将缺省规则$\delta$作用在集合 $S$ 上.

$$\frac{\dfrac{\dfrac{S \vdash p \quad S \nvdash \neg q_1}{S \mid p \rightsquigarrow q_1 \Rightarrow S, q_1} \quad \dfrac{S \vdash p \quad S \vdash \neg q_2}{S, q_1 \mid p \rightsquigarrow q_2 \Rightarrow S, q_1, \lambda}}{S \mid p \rightsquigarrow q_1 \wedge q_2 \Rightarrow S, q_1} \quad \dfrac{\dfrac{S \vdash p \quad S \nvdash \neg q_3}{S \mid p \rightsquigarrow q_3 \Rightarrow S, q_3} \quad \dfrac{S \vdash p \quad S \vdash \neg q_4}{S, q_3 \mid p \rightsquigarrow q_4 \Rightarrow S, q_3, \lambda}}{S \mid p \rightsquigarrow q_3 \wedge q_4 \Rightarrow S, q_3}}{S \mid p \rightsquigarrow (q_1 \wedge q_2) \wedge (q_3 \wedge q_4) \Rightarrow S, q_1 \wedge q_3}.$$

我们可以得到公式 $q_1 \wedge q_3$.$q_1 \wedge q_3$ 并不是$(q_1 \wedge q_2) \wedge (q_3 \wedge q_4)$的子公式,而是$(q_1 \wedge q_2) \wedge (q_3 \wedge q_4)$的伪子公式.

从上述的例子中我们发现,在贪婪缺省逻辑中,作用缺省规则$\delta$而产生的公式是 cons($\delta$)的伪子公式.正如接下来的定理 3.2.

**定理 3.2**. 给定协调的公式集合 $S$,缺省规则集合$\Delta_1,\Delta_2$ 和缺省规则 $\delta=\phi\rightsquigarrow\psi$; 其中,对于任意的公式 $\phi_1\in\text{pre}(\Delta_1)$, 都有 $S\nvdash\phi_1$.那么,如果 $S\,|\,\Delta_1,\phi\rightsquigarrow\psi,\Delta_2\Rightarrow S,\theta\,|\,\Delta_1,\Delta_2$ 是 GD-可证的,则$\theta$是$\psi$的伪子公式.

**证明**: 我们对公式$\psi$的结构进行归纳证明.

基始:如果$\psi=p$ 或者$\psi=\neg p$,根据推导规则的定义,$\theta$的形式要么是$\psi$本身,要么是空公式.显然,$\psi$和空公式 $\lambda$ 都是$\psi$的伪子公式,结论成立.

归纳步骤:假设结论在结构比公式$\psi$简单的公式上成立.

如果$\vdash^{\mathbf{GD}} S\,|\,\Delta_1,\phi\rightsquigarrow\psi,\Delta_2\Rightarrow S,\theta\,|\,\Delta_1,\Delta_2$,根据证明的定义,存在一棵以 $S\,|\,\Delta_1,\phi\rightsquigarrow\psi,\Delta_2\Rightarrow S,\theta\,|\,\Delta_1,\Delta_2$ 为根节点的证明树.那么存在以下几种情形.

情形 1: $\psi=\psi_1\vee\psi_2$.

根据证明树的定义,证明树的最低两层有以下 3 种可能:

$$\frac{S\,|\,\Delta_1,\phi\rightsquigarrow\psi_1,\Delta_2\Rightarrow S,\psi_1\,|\,\Delta_1,\Delta_2}{S\,|\,\Delta_1,\phi\rightsquigarrow\psi,\Delta_2\Rightarrow S,\psi_1\vee\psi_2\,|\,\Delta_1,\Delta_2},$$

$$\frac{S\,|\,\Delta_1,\phi\rightsquigarrow\psi_2,\Delta_2\Rightarrow S,\psi_2\,|\,\Delta_1,\Delta_2}{S\,|\,\Delta_1,\phi\rightsquigarrow\psi,\Delta_2\Rightarrow S,\psi_1\vee\psi_2\,|\,\Delta_1,\Delta_2},$$

$$\frac{S\,|\,\Delta_1,\phi\rightsquigarrow\psi_1,\Delta_2\Rightarrow S,\theta_1\,|\,\Delta_1,\Delta_2\quad S\,|\,\Delta_1,\phi\rightsquigarrow\psi_2,\Delta_2\Rightarrow S,\theta_2\,|\,\Delta_1,\Delta_2}{S\,|\,\Delta_1,\phi\rightsquigarrow\psi,\Delta_2\Rightarrow S\,|\,\Delta_1,\Delta_2}.$$

对于第 1 种和第 2 种可能,显然,$\psi_1\vee\psi_2$ 是其本身的伪子公式,结论成立.第 3 种情形是一种特殊的情形,空公式是所有公式的伪子公式.

情形 2: $\psi=\psi_1\wedge\psi_2$.

根据证明树的定义,证明树的最低两层有以下 3 种可能:

$$\frac{S\,|\,\Delta_1,\phi\rightsquigarrow\psi_1,\Delta_2\Rightarrow S,\psi_1\,|\,\Delta_1,\Delta_2\quad S,\psi_1\,|\,\Delta_1,\phi\rightsquigarrow\psi_2,\Delta_2\Rightarrow S,\psi_1,\psi_2\,|\,\Delta_1,\Delta_2}{S\,|\,\Delta_1,\phi\rightsquigarrow\psi_1\wedge\psi_2,\Delta_2\Rightarrow S,\psi_1\wedge\psi_2\,|\,\Delta_1,\Delta_2},$$

$$\frac{S\,|\,\Delta_1,\phi\rightsquigarrow\psi_1,\Delta_2\Rightarrow S,\theta_1\,|\,\Delta_1,\Delta_2\quad S,\theta_1\,|\,\Delta_1,\phi\rightsquigarrow\psi_2,\Delta_2\Rightarrow S,\theta_1,\theta_2\,|\,\Delta_1,\Delta_2}{S\,|\,\Delta_1,\phi\rightsquigarrow\psi_1\wedge\psi_2,\Delta_2\Rightarrow S,\theta_1\wedge\theta_2\,|\,\Delta_1,\Delta_2},$$

$$\frac{S\,|\,\Delta_1,\phi\rightsquigarrow\psi_2,\Delta_2\Rightarrow S,\theta_2\,|\,\Delta_1,\Delta_2\quad S,\theta_2\,|\,\Delta_1,\phi\rightsquigarrow\psi_1,\Delta_2\Rightarrow S,\theta_2,\theta_1\,|\,\Delta_1,\Delta_2}{S\,|\,\Delta_1,\phi\rightsquigarrow\psi_1\wedge\psi_2,\Delta_2\Rightarrow S,\theta_1\wedge\theta_2\,|\,\Delta_1,\Delta_2}.$$

对于第 1 种情形,显然,$\psi_1\wedge\psi_2$ 是其本身的伪子公式,结论成立.我们下面将对第 2 种情形进行讨论.

因为缺省矢列式 $S\,|\,\Delta_1,\phi\rightsquigarrow\psi_1,\Delta_2\Rightarrow S,\theta_1\,|\,\Delta_1,\Delta_2$ 和 $S,\theta_1\,|\,\Delta_1,\phi\rightsquigarrow\psi_2,\Delta_2\Rightarrow S,\theta_1,\theta_2\,|\,\Delta_1,\Delta_2$ 都是 GD-可证的;由归纳假设,$\theta_1$ 与$\theta_2$ 分别是$\psi_1$ 与$\psi_2$ 的伪子公式.根据证明树的定义,$\theta=\theta_1\wedge\theta_2$.又根据伪子公式的定义,$\theta_1\wedge\theta_2$ 是$\psi_1\vee\psi_2$ 的伪子公式,故而结论成立.

第 3 种情形与第 2 种类似. □

**定理 3.3.** 给定协调的公式集合 $S$,缺省规则集合$\Delta_1,\Delta_2$ 和缺省规则 $\delta=\phi\rightsquigarrow\psi$; 其中,对于任意的公式 $\phi_1\in\text{pre}(\Delta_1)$, 都有 $S\nvdash\phi_1$.那么, $S\,|\,\Delta_1,\phi\rightsquigarrow\psi,\Delta_2\Rightarrow S,\psi\,|\,\Delta_1,\Delta_2$ 是 GD-可证的,当且仅当 $S\vdash\phi$, 并且 $S\nvdash\neg\psi$.

**证明**: 我们对公式$\psi$的结构进行归纳证明.

基始:如果$\psi=p$ 或者$\phi=\neg p$,根据推导规则的定义,结论成立.

归纳步骤:假设结论在结构比公式$\psi$简单的公式上成立.

情形 1: $\psi=\psi_1\vee\psi_2$.

($\Rightarrow$) 如果 $S|\delta\Rightarrow S,\psi$是可证的,则存在一棵以 $S|\delta\Rightarrow S,\psi$为根节点的证明树,使得该证明树的最底部的两层为

$$\frac{S\,|\,\phi\rightsquigarrow\psi_1\Rightarrow S,\psi_1}{S\,|\,\phi\rightsquigarrow\psi_1\vee\psi_2\Rightarrow S,\psi_1\vee\psi_2}\text{ 或者 }\frac{S\,|\,\phi\rightsquigarrow\psi_2\Rightarrow S,\psi_2}{S\,|\,\phi\rightsquigarrow\psi_1\vee\psi_2\Rightarrow S,\psi_1\vee\psi_2}.$$

根据证明的定义,可以得到矢列式 $S\,|\,\phi\rightsquigarrow\psi_1\Rightarrow S,\psi_1$ 或者 $S\,|\,\phi\rightsquigarrow\psi_2\Rightarrow S,\psi_2$ 是可证的.由归纳假设 $S\cup\{\psi_1\}$ 或者 $S\cup\{\psi_2\}$ 是协调的.因此 $S\cup\{\psi_1\vee\psi_2\}$ 是协调的.即 $S\nvdash\neg\psi$.

($\Leftarrow$) 如果 $S\nvdash\neg\psi$, 则有 $S\nvdash\neg\psi_1\wedge\neg\psi_2$. 即 $S\nvdash\neg\psi_1$ 或者 $S\nvdash\neg\psi_2$. 不妨假设 $S\nvdash\neg\psi_1$. 由归纳假设, $S\,|\,\phi\rightsquigarrow$

$\psi_1 \Rightarrow S,\psi_1$ 是可证的.故而由推导规则$\vee^{\downarrow}$,有

$$\frac{S\,|\,\phi \rightsquigarrow \psi_1 \Rightarrow S,\psi_1}{S\,|\,\phi \rightsquigarrow \psi_1 \vee \psi_2 \Rightarrow S,\psi_1 \vee \psi_2}.$$

可以知道,$S\,|\,\phi \rightsquigarrow \psi_1 \vee \psi_2 \Rightarrow S,\psi_1 \vee \psi_2$ 是可证的.同样地,如果 $S \nvdash \neg\psi_2$,则有 $S\,|\,\phi \rightsquigarrow \psi_1 \vee \psi_2 \Rightarrow S,\psi_1 \vee \psi_2$ 是可证的.

即结论在情形 1 的情况下成立.

情形 2:$\psi=\psi_1\wedge\psi_2$.

($\Rightarrow$) 如果 $S|\delta\Rightarrow S,\psi$是可证的,则存在一棵以 $S\,|\,\delta \Rightarrow S,\psi$ 为根节点的证明树,使得该证明树的最底两层为

$$\frac{S\,|\,\phi \rightsquigarrow \psi_1 \Rightarrow S,\psi_1 \quad S,\psi_1\,|\,\phi \rightsquigarrow \psi_2 \Rightarrow S,\psi_1,\psi_2}{S\,|\,\phi \rightsquigarrow \psi \Rightarrow S,\psi_1 \wedge \psi_2}.$$

根据证明树的定义,$S\,|\,\phi \rightsquigarrow \psi_1 \Rightarrow S,\psi_1$ 是可证的,由归纳假设可知 $S\cup\{\psi_1\}$ 是协调的.同理,$S,\psi_1\,|\,\phi \rightsquigarrow \psi_2 \Rightarrow S,\psi_1,\psi_2$ 也是可证的,再次使用归纳假设可知,$S\cup\{\psi_1\}\cup\{\psi_2\}$ 是协调的.因此,$S\cup\{\psi_1\wedge\psi_2\}$ 是协调的,故而 $S \nvdash \neg\psi$.

($\Leftarrow$) 如果 $S \nvdash \neg\psi$,则 $S \nvdash \neg\psi_1 \vee \neg\psi_2$.即 $S \nvdash \neg\psi_1$ 且 $S \nvdash \neg\psi_2$.因为 $S\cup\{\psi_1,\psi_2\}$ 是协调的,所以,$S,\psi_1 \nvdash \neg\psi_2$.由归纳假设,$S\,|\,\phi \rightsquigarrow \psi_1 \Rightarrow S,\psi_1$ 和 $S,\psi_1\,|\,\phi \rightsquigarrow \psi_2 \Rightarrow S,\psi_1,\psi_2$ 都是可证的.使用推导规则$\wedge^{\downarrow}$,有

$$\frac{S\,|\,\phi \rightsquigarrow \psi_1 \Rightarrow S,\psi_1 \quad S,\psi_1\,|\,\phi \rightsquigarrow \psi_2 \Rightarrow S,\psi_1,\psi_2}{S\,|\,\phi \rightsquigarrow \psi_1 \wedge \psi_2 \Rightarrow S,\psi_1 \wedge \psi_2},$$

可知 $S\,|\,\phi \rightsquigarrow \psi_1 \wedge \psi_2 \Rightarrow S,\psi_1 \wedge \psi_2$ 是可证的.

即结论在情形 2 的情况下成立. □

**定理 3.4**. 给定协调的公式集合 $S$,缺省规则集合$\Delta_1,\Delta_2$ 和缺省规则 $\delta=\phi\rightsquigarrow\psi$;其中,对于任意的公式 $\phi_1\in\mathrm{pre}(\Delta_1)$,都有 $S \nvdash \phi_1$.如果 $S\,|\,\Delta_1,\phi\rightsquigarrow\psi,\Delta_2 \Rightarrow S,\theta\,|\,\Delta_1,\Delta_2$ 是 GD-可证的,则 $S\cup\{\theta\}$ 是协调的.

**证明**: 我们对$\psi$的公式结构进行归纳假设.

基始:如果$\psi=p$ 或者$\phi=\neg p$,由推导规则定义可知,结论成立.

归纳步骤:假设结论在结构比公式$\psi$简单的公式上成立.

情形 1:$\psi=\psi_1\vee\psi_2$.

子情形 1.1:$\theta=\psi_1\vee\psi_2$,

由定理 3.3 可知,结论成立.

子情形 1.2:$\theta=\lambda$,结论成立.

情形 2:$\psi=\psi_1\wedge\psi_2$.

子情形 2.1:$\theta=\theta_1\wedge\theta_2$.

如果 $S\,|\,\phi\rightsquigarrow\psi \Rightarrow S,\theta_1\wedge\theta_2$ 是可证的,则存在一棵以 $S\,|\,\phi\rightsquigarrow\psi \Rightarrow S,\theta_1\wedge\theta_2$ 为根节点的证明树,使得该证明树的最底两层为

$$\frac{S\,|\,\phi \rightsquigarrow \psi_1 \Rightarrow S,\theta_1 \quad S,\theta_1\,|\,\phi \rightsquigarrow \psi_2 \Rightarrow S,\theta_1,\theta_2}{S\,|\,\phi \rightsquigarrow \psi_1 \wedge \psi_2 \Rightarrow S,\theta_1 \wedge \theta_2} \tag{1}$$

$$\frac{S\,|\,\phi \rightsquigarrow \psi_2 \Rightarrow S,\theta_2 \quad S,\theta_2\,|\,\phi \rightsquigarrow \psi_1 \Rightarrow S,\theta_2,\theta_1}{S\,|\,\phi \rightsquigarrow \psi_1 \wedge \psi_2 \Rightarrow S,\theta_1 \wedge \theta_2} \tag{2}$$

其中,在公式(1)中出现的$\theta_1$和$\theta_2$与公式(2)中出现的$\theta_1$和$\theta_2$不一定相同.

由式(1)可知,$S\,|\,\phi \rightsquigarrow \psi_1 \Rightarrow S,\theta_1$ 是可证的,故由归纳假设可知 $S\cup\{\theta_1\}$ 是协调的.同理,$S,\theta_1\,|\,\phi \rightsquigarrow \psi_2 \Rightarrow S,\theta_1,\theta_2$ 也是可证的,因此,$S\cup\{\theta_1\}\cup\{\theta_2\}$ 是协调的.故而 $S\cup\{\theta_1\wedge\theta_2\}$ 是协调的.

式(2)的情形与式(1)类似.

子情形 2.2:$\theta=\psi_1\wedge\theta_2$ 与$\theta=\theta_1\wedge\psi_2$.

与子情形 2.1 类似.

子情形 2.3:$\theta=\psi_1\wedge\psi_2$.

由定理 3.3 可知,结论成立. □

**推论 3.5**. 给定缺省理论$\Gamma$=($T$,$\Delta$),其中,$T$ 是协调的公式集合,$\Delta$是缺省规则的集合.对于任意的公式集合 $E$,如果 $E$ 是缺省理论$\Gamma$=($T$,$\Delta$)的一个 GD-扩展,则 $E$ 是协调的.

**证明**: 根据 GD-扩展的定义,我们对自然数 $n$ 进行归纳.

基始:当 $n$=0 时,由于 $T_0$=$T$,$T$ 是协调的,因此$T_0$是协调的公式集合.结论成立.

归纳步骤:假设当$n=k$时,结论成立,即 $T_k$ 是协调的公式集合.当 $n$=$k$+1 时,令 $\delta$ 是序最优的,并且是可以被作用的缺省规则.根据缺省规则的推导规则,

$$\vdash^{\mathbf{GD}} T_k\mid\Delta_1,\delta,\Delta_2\Rightarrow T_k,\theta\mid\Delta_1,\Delta_2,$$

并且 $T_{k+1}=T_k\cup\{\theta\}$. 由定理 3.4,$T_{k+1}$ 是协调的.并且根据 GD-扩展的定义过程,对于任意的自然数 $i$,$j$,如果 $i\le j$,则有 $T_i\subseteq T_j$.因此,$\bigcup_{i=0}^{k+1}T_i=T_{k+1}$. 于是,对于任意的自然数 $n$,都有 $T_n$ 和$\bigcup_{i=0}^{n}T_i$ 均是协调的.又因为 GD-扩展 $E=Th\left(\bigcup_{i=0}^{\infty}T_i\right)$,因此 $E$ 是协调的. □

## 4 GD-扩展的性质及与扩展的比较

在第 2 节中,我们给出了贪婪缺省逻辑中 GD-扩展的定义.自然而然地,我们会产生疑问,对于缺省理论$\Gamma$,$\Gamma$在贪婪缺省逻辑中的 GD-扩展 $E$ 和缺省逻辑中的扩展 $E'$存在怎样的区别与联系呢?

可以发现,贪婪缺省逻辑 GD-扩展的定义与缺省逻辑扩展的构造定理是类似的,且贪婪缺省逻辑的目标是尽可能地保留缺省规则中的信息.那么,对于 GD-扩展 $E$,是否存在扩展 $E'$使得 $E'\subseteq E$?亦或对于扩展 $E'$,是否存在 GD-扩展 $E$ 使得 $E'\subseteq E$?

首先,回到本文开始部分提出的问题,Jone 是一个没有腿的人和人是缺省的有胳膊并且有腿的;其次,我们使用贪婪缺省逻辑的推导规则,是否可以得到我们想要的结果?

例 4.1:给定缺省理论$\Gamma$=($T$,$\Delta$),其中,$T=\{\text{Man(Jone)},\neg\text{HasLeg(Jone)}\}$, $\Delta=\{\text{Man}(x)\rightsquigarrow\text{HasLeg}(x)\wedge\text{HasArm}(x)\}$.

构造关于缺省理论$\Gamma$的证明树如下:

$$\frac{\dfrac{T\vdash\text{Man(Jone)}\quad T\vdash\neg\text{HasLeg(Jone)}}{T\mid\text{Man(Jone)}\rightsquigarrow\text{HasLeg(Jone)}\Rightarrow T,\lambda}\quad\dfrac{T\vdash\text{Man(Jone)}\quad T\nvdash\neg\text{HasArm(Jone)}}{T,\lambda\mid\text{Man(Jone)}\rightsquigarrow\text{HasArm(Jone)}\Rightarrow T,\text{HasArm(Jone)}}}{T\mid\text{Man(Jone)}\rightsquigarrow\text{HasLeg(Jone)}\wedge\text{HasArm(Jone)}\Rightarrow T,\text{HasArm(Jone)}}.$$

于是,缺省理论的 GD-扩展为 $Th(\{\text{Man(Jone)},\neg\text{HasLeg(Jone)},\text{HasArm(Jone)}\})$.因此,通过人是缺省的有胳膊和腿的这条规则以及 Jone 是一个没有腿的人推导出 Jone 是有胳膊而没有腿的.

下面我们将通过给出的几个具体例子来探讨贪婪缺省逻辑的扩展与缺省逻辑扩展之间的关系.

例 4.2:给定缺省理论$\Gamma$=($T$,$\Delta$),$T$={$p$},$\Delta$={$\delta_1$,$\delta_2$},其中,$\delta_1=p\rightsquigarrow\neg q_1,\delta_2=p\rightsquigarrow q_1\wedge q_2$.

我们可以写出两棵关于该缺省理论的证明树.

$$\frac{\dfrac{T\vdash p\quad T\nvdash q_1}{T\mid\delta_1,\delta_2\Rightarrow T,\neg q_1\mid\delta_2}\quad\dfrac{\dfrac{T,\neg q_1\vdash p\quad T,\neg q_1\vdash\neg q_1}{T,\neg q_1\mid p\rightsquigarrow q_1\Rightarrow T,\neg q_1}\quad\dfrac{T,\neg q_1\vdash p\quad T,\neg q_1\nvdash\neg q_2}{T,\neg q_1\mid p\rightsquigarrow q_2\Rightarrow T,\neg q_1,q_2}}{T,\neg q_1\mid\delta_2\Rightarrow T,\neg q_1,q_2}}{T\mid\delta_1,\delta_2\Rightarrow T,\neg q_1,q_2},$$

$$\frac{\dfrac{\dfrac{T\vdash p\quad T\nvdash\neg q_1}{T\mid p\rightsquigarrow q_1,\delta_1\Rightarrow T,q_1\mid\delta_1}\quad\dfrac{T,q_1\vdash p\quad T,q_1\nvdash\neg q_2}{T,q_1\mid p\rightsquigarrow q_2,\delta_1\Rightarrow T,q_1,q_2\mid\delta_1}}{T\mid\delta_2,\delta_1\Rightarrow T,q_1\wedge q_2\mid\delta_1}\quad\dfrac{T,q_1\wedge q_2\vdash p\quad T,q_1\wedge q_2\vdash q_1}{T,q_1\wedge q_2\mid\delta_1\Rightarrow T,q_1\wedge q_2,\lambda}}{T\mid\delta_2,\delta_1\Rightarrow T,q_1\wedge q_2,\lambda}.$$

根据证明树,可以得到缺省理论$\Gamma$的两个 GD-扩展: $E_1=Th(\{p,\neg q_1,q_2\}),E_2=Th(\{p,q_1\wedge q_2\})$. 另一方面,根据缺省理论扩展的定义,缺省理论$\Gamma$有两个扩展: $E_3=Th(\{p,\neg q_1\}),E_4=Th(\{p,q_1\wedge q_2)\}$, 且有 $E_3\subseteq E_1$ 和 $E_2$=$E_4$.

即缺省理论的扩展可能是其 GD-扩展,也可能是其 GD-扩展的子集.

接下来,我们考虑一个公式结构稍微复杂些的例子.

例 4.3:给定缺省理论 $\Gamma=(T,\Delta),T=\{p\},\Delta=\{\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4\}$, 其中, $\delta_1=p\rightsquigarrow\neg q_1$, $\delta_2=p\rightsquigarrow\neg q_3$, $\delta_3=p\rightsquigarrow\neg q_4$ 以

及 $\delta_4 = p \rightsquigarrow ((q_1 \wedge q_2) \wedge q_3) \vee q_4$.

以序列 $L=\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4$ 构造的证明树为例.

$$\frac{\dfrac{S_1}{T \mid \delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4 \Rightarrow T,\neg q_1,\neg q_3,\neg q_4 \mid \delta_4} \quad \dfrac{S_2}{T,\neg q_1,\neg q_3,\neg q_4 \mid \delta_4 \Rightarrow T,\neg q_1,\neg q_3,\neg q_4,\lambda}}{T \mid \delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4 \Rightarrow T,\neg q_1,\neg q_3,\neg q_4}(\mathbf{TR})$$

首先分解左边的这一支 $S_1$,可以得到

$$S_1 = \frac{\dfrac{S_3}{T \mid \delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4 \Rightarrow T,\neg q_1,\neg q_3 \mid \delta_3,\delta_4} \quad \dfrac{S_4}{T,\neg q_1,\neg q_3 \mid \delta_3,\delta_4 \Rightarrow T,\neg q_1,\neg q_3,\neg q_4 \mid \delta_4}}{T \mid \delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4 \Rightarrow T,\neg q_1,\neg q_3,\neg q_4 \mid \delta_4}(\mathbf{TR})$$

$$S_3 = \frac{\dfrac{S_5}{T \mid \delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4 \Rightarrow T,\neg q_1 \mid \delta_2,\delta_3,\delta_4} \quad \dfrac{S_6}{T,\neg q_1 \mid \delta_2,\delta_3,\delta_4 \Rightarrow T,\neg q_1,\neg q_3 \mid \delta_3,\delta_4}}{T \mid \delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4 \Rightarrow T,\neg q_1,\neg q_3 \mid \delta_3,\delta_4}(\mathbf{TR})$$

$$S_4 = \frac{T,\neg q_1,\neg q_3 \vdash p \quad T,\neg q_1,\neg q_3 \nvdash q_4}{T,\neg q_1,\neg q_3 \mid \delta_3,\delta_4 \Rightarrow T,\neg q_1,\neg q_3,\neg q_4 \mid \delta_4}(\mathbf{Atomic}^+)$$

$$S_5 = \frac{T \vdash p \quad T \nvdash q_1}{T \mid \delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4 \Rightarrow T,\neg q_1 \mid \delta_2,\delta_3,\delta_4}(\mathbf{Atomic}^+)$$

$$S_6 = \frac{T,\neg q_1 \vdash p,\ T,\neg q_1 \nvdash q_3}{T,\neg q_1 \mid \delta_2,\delta_3,\delta_4 \Rightarrow T,\neg q_1,\neg q_3 \mid \delta_3,\delta_4}(\mathbf{Atomic}^+)$$

再来分解 $S_2$ 这一支,可以得到(为了简化标记,我们使用符号 $T'$ 表示集合 $T \cup \{\neg q_1,\neg q_3,\neg q_4\}$):

$$S_2 = \frac{\dfrac{S_7}{T' \mid p \rightsquigarrow (q_1 \wedge q_2) \wedge q_3 \Rightarrow T',q_2} \quad \dfrac{S_8}{T' \mid p \rightsquigarrow q_4 \Rightarrow T',\lambda}}{T' \mid \delta_4 \Rightarrow T',q_2}(\vee^{\uparrow})$$

$$S_7 = \frac{\dfrac{S_9}{T' \mid p \rightsquigarrow q_1 \wedge q_2 \Rightarrow T',q_2} \quad \dfrac{S_{10}}{T' \mid p \rightsquigarrow q_3 \Rightarrow T',\lambda}}{T' \mid p \rightsquigarrow (q_1 \wedge q_2) \wedge q_3 \Rightarrow T',q_2}(\wedge^{\uparrow})$$

$$S_8 = \frac{T' \vdash p \quad T' \vdash \neg q_4}{T' \mid p \rightsquigarrow q_4 \Rightarrow T',\lambda}(\mathbf{Atomic}^+)$$

$$S_9 = \frac{\dfrac{S_{11}}{T' \mid p \rightsquigarrow q_1 \Rightarrow T',\lambda} \quad \dfrac{S_{12}}{T',\lambda \mid p \rightsquigarrow q_2 \Rightarrow T'q_2}}{T' \mid p \rightsquigarrow q_1 \wedge q_2 \Rightarrow T',q_2}(\wedge^{\uparrow})$$

$$S_{10} = \frac{T' \vdash p \quad T \vdash \neg q_3}{T' \mid p \rightsquigarrow q_3 \Rightarrow T',\lambda}(\mathbf{Atomic}^-)$$

$$S_{11} = \frac{T' \vdash p \quad T \vdash \neg q_1}{T' \mid p \rightsquigarrow q_1 \Rightarrow T',\lambda}(\mathbf{Atomic}^-)$$

$$S_{12} = \frac{T' \vdash p \quad T \nvdash \neg q_2}{T' \mid p \rightsquigarrow q_2 \Rightarrow T',q_2}(\mathbf{Atomic}^+)$$

节点 $S_5,S_6,S_8,S_{10},S_{11}$ 和 $S_{12}$ 的上层公式都是 **Atomic** 规则,即它们都是叶子节点,其他节点都是中间节点,它们都是通过联结词的分解规则亦或是传递规则联结起来的.这样即构成了一棵以 $T \mid \delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4 \Rightarrow T,\neg q_1,\neg q_3,\neg q_4,q_2$ 为根节点的证明树.

我们给出图 1 证明树的结构示意图以帮助理解.

根据证明树与 GD-扩展的定义,我们可以得到缺省理论$\Gamma$的一个 GD-扩展 $E_1 = Th(\{p,\neg q_1,\neg q_3,\neg q_4\})$.

类似地,我们可以得到缺省理论$\Gamma$在其他 23 种序列下的证明树,由于数目较多,这里我们不再一一列举.从 24 种不同序列的证明树中,我们可以根据定义得到缺省理论$\Gamma$的 3 个不同的 GD-扩展.

$$E_1 = Th(\{p,\neg q_1,\neg q_3,\neg q_4\}),$$

$$E_2 = Th(\{p,\neg q_1,\neg q_3,((q_1\wedge q_2)\wedge q_3)\vee q_4\}),$$
$$E_3 = Th(\{p,\neg q_4,(((q_1\wedge q_2)\wedge q_3)\vee q_4\}).$$

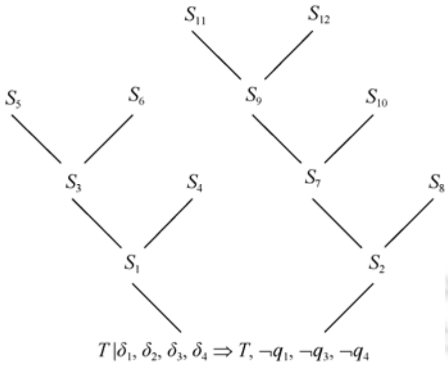


Fig.1 Structure of proof tree

图 1 证明树结构示意图

根据缺省逻辑扩展的定义,$E_1$,$E_2$和$E_3$都是缺省理论$\Gamma$的扩展.即在这个缺省理论中,$E_1$,$E_2$和$E_3$既是缺省理论的扩展,又是缺省理论的GD-扩展.并且,$\Gamma$任意的两个不同的GD-扩展的并集都是不协调的.

下面的例子则说明,可能存在某些GD-扩展,并不存在扩展,使得这些GD-扩展与扩展之间有包含关系.

**例** 4.4:给定缺省理论$\Gamma=(T,\Delta),T=\{p\},\Delta=\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$,其中,$\delta_1=p\rightsquigarrow q_1\wedge q_2$, $\delta_2=p\rightsquigarrow\neg q_1$以及$\delta_3=p\rightsquigarrow\neg q_2$.

与例4.3类似,可以得到缺省理论$\Gamma$在6种序列下的证明树,因此下面的缺省矢列式都是GD-可证的.

$$T\mid\delta_1,\delta_2,\delta_3\Rightarrow p,q_1\wedge q_2,\qquad T\mid\delta_1,\delta_3,\delta_2\Rightarrow p,q_1\wedge q_2,\qquad T\mid\delta_2,\delta_1,\delta_3\Rightarrow p,\neg q_1,q_2,$$
$$T\mid\delta_2,\delta_3,\delta_1\Rightarrow p,\neg q_1,\neg q_2,\qquad T\mid\delta_3,\delta_1,\delta_2\Rightarrow p,\neg q_2,q_1,\qquad T\mid\delta_3,\delta_2,\delta_1\Rightarrow p,\neg q_2,\neg q_1.$$

根据GD-扩展的定义,我们可以得到缺省理论$\Gamma$的4种不同的GD-扩展.

$$E_1=Th(\{p,q_1\wedge q_2\}),\qquad E_2=Th(\{p,\neg q_1,q_2\}),$$
$$E_3=Th(\{p,\neg q_1,\neg q_2\}),\qquad E_4=Th(\{p,\neg q_2,q_1\}).$$

根据缺省逻辑中扩展的定义,$\Gamma$的扩展为

$$E_5=Th(\{p,q_1\wedge q_2\})\text{ 和 }E_6=Th(\{p,\neg q_1,\neg q_2\}).$$

从而有$E_1=E_5,E_3=E_6$,即$E_1$和$E_3$既是缺省理论的扩展,又是缺省理论的GD-扩展.但是,不同于例4.3,在该例子中,GD-扩展$E_2$和$E_4$并不包含该缺省理论的扩展.

那么贪婪缺省逻辑中缺省理论的GD-扩展是否也与扩展一样具有半单调性呢?我们先看下面的例子.

**例** 4.5:给定缺省理论$\Gamma=(T,\Delta)$和$\Gamma'=(T,\Delta')$, $T=\{p\},\Delta=\{\delta_1\},\Delta'=\{\delta_1,\delta_2\}$;其中,$\delta_1=p\rightsquigarrow q_1\wedge q_2$, $\delta_2=p\rightsquigarrow\neg q_1$.

分别构造缺省理论$\Gamma$与$\Gamma'$的证明树.$\Gamma$只有1棵证明树如下:

$$\frac{\dfrac{p\vdash p\quad p\nvdash q_1}{p\mid p\rightsquigarrow q_1\Rightarrow p,q_1}\quad\dfrac{p,q_1\vdash p\quad p,q_1\nvdash q_2}{p,q_1\mid p\rightsquigarrow q_2\Rightarrow p,q_1,q_2}}{p\mid p\rightsquigarrow q_1\wedge q_2\Rightarrow p,q_1\wedge q_2}.$$

缺省理论$\Gamma'$有两棵证明树,分别为

$$\frac{\dfrac{\dfrac{p\vdash p\quad p\nvdash q_1}{p\mid p\rightsquigarrow q_1,\delta_2\Rightarrow p,q_1\mid\delta_2}\quad\dfrac{p,q_1\vdash p\quad p,q_1\nvdash q_2}{p,q_1\mid p\rightsquigarrow q_2,\delta_2\Rightarrow p,,q_1,q_2\mid\delta_2}}{p\mid p\rightsquigarrow q_1\wedge q_2,\delta_2\Rightarrow p,q_1\wedge q_2\mid\delta_2}\quad\dfrac{p,q_1\vdash p\quad p,q_1\vdash q_1}{p,q_1\wedge q_2\mid\delta_2\Rightarrow p,q_1\wedge q_2,\lambda}}{p\mid\delta_1,\delta_2\Rightarrow p,q_1\wedge q_2},$$

$$\dfrac{\dfrac{p \vdash p \quad p \nvdash q_1}{p \mid p \rightsquigarrow \neg q_1, \delta_2 \Rightarrow p, \neg q_1 \mid \delta_2} \quad \dfrac{\dfrac{p,\neg q_1 \vdash p \quad p,\neg q_1 \vdash \neg q_1}{p,\neg q_1 \mid p \rightsquigarrow q_1 \Rightarrow p,\neg q_1,\lambda} \quad \dfrac{p,\neg q_1 \vdash p \quad p,\neg q_1 \nvdash \neg q_2}{p,\neg q_1 \mid p \rightsquigarrow q_2 \Rightarrow p,\neg q_1, q_2}}{p,\neg q_1 \mid p \rightsquigarrow q_1 \wedge q_2 \Rightarrow p,\neg q_1, q_2}}{p \mid \delta_2, \delta_1 \Rightarrow p, \neg q_1, q_2}.$$

因此,缺省理论$\Gamma$只有一个 GD-扩展: $E = Th(\{p, q_1 \wedge q_2\})$, 缺省理论$\Gamma'$有两个 GD-扩展 $E_1' = Th(\{p, q_1 \wedge q_2\})$ 和 $E_2' = Th(\{p, \neg q_1, q_2\})$, 其中, $E = E_1'$.

根据上述的例子,我们可以得到下面的定理.

**定理 4.6(GD-扩展的存在性)**. 一个缺省理论至少有一个 GD-扩展.

**定理 4.7(GD-扩展的半单调性)**. 给定缺省理论$\Gamma_1=(T,\Delta)$和缺省理论$\Gamma=(T,\Delta')$,满足$\Delta\subseteq\Delta'$.如果 $E$ 是缺省理论$\Gamma_1$的一个 GD-扩展,那么一定存在缺省理论$\Gamma_2$的一个 GD-扩展 $E'$,使得 $E\subseteq E'$.

**证明**: 因为 $E$ 是缺省理论$\Gamma_1$的一个 GD-扩展,根据 GD-扩展的定义,一定存在序列 $T_1,T_2,\ldots,T_i,\ldots$($T_i$ 的定义见定义 2.12),使得 $E = Th\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} T_i\right)$. 下面我们证明存在 $E'$,使得 $E\subseteq E'$.

因为根据 GD-扩展的定义,对于每一个集合 $T_i$,都对应一个缺省规则$\delta_{i+1}$,并且$\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_i,\ldots$是缺省规则集合$\Delta$上的一个全序 $L$.定义$\Delta^-=\Delta'-\Delta$和$\Delta'$上的一个全序 $L'$,$L'$满足

- 对于任意$\delta_1,\delta_2\in\Delta$,如果 $\delta_1 \succeq^L \delta_2$, 则 $\delta_1 \succeq^{L'} \delta_2$;
- 对于任意$\delta\in\Delta$和$\delta'\in\Delta^-$,都有 $\delta \succeq^{L'} \delta'$.

因此根据定义,按照序列 $L'$生成的 GD-扩展 $E'$满足对于任意 $T_i$,都有 $T_i\subseteq E'$.故而 $Th\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} T_i\right) \subseteq E'$, 即 $E\subseteq E'$. □

**定理 4.8**. 给定缺省理论$\Gamma=(T,\Delta)$,如果存在公式的集合 $E$ 是$\Gamma$的扩展,则存在$\Gamma$的一个 GD-扩展 $E'$,使得 $E\subseteq E$.反之不成立.

**证明**: 因为集合 $E$ 是 $\Gamma$ 的扩展,根据定理 1.6,存在一个集合的序列 $E_0,\ldots,E_i,\ldots$,使得

$$E\_0 = T; E_{i+1} = Th(E_i) \cup \{\psi \mid \phi \rightsquigarrow \psi \in \Delta, \text{其中}, \phi \in T_i \text{ 并且 } \neg\psi \notin E\}; E = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i.$$

故而,令

$$\Delta_0 = \{\psi \mid \phi \rightsquigarrow \psi \in \Delta, \text{其中}, \phi \in T_0 \text{ 并且 } \neg\psi \notin E\};$$

$$\Delta_{i+1} = \left\{\psi \mid \phi \rightsquigarrow \psi \in \Delta - \bigcup_{j=0}^{i} \Delta_j, \text{其中}, \phi \in T_i \text{ 并且 } \neg\psi \notin E\right\},$$

则有 $E_{i+1} = Th(E_i) \cup \{\psi \mid \phi \rightsquigarrow \psi \in \Delta_i\}$. 并且,对于每个 $\Delta_i = \{\delta_{i1} = \phi_{i1} \rightsquigarrow \psi_{i1}, \delta_{i2} = \phi_{i2} \rightsquigarrow \psi_{i2}, \ldots\}$, 都有:

$$\begin{aligned} E_i \mid \delta_{i1}, \delta_{i2}, \ldots \quad & \Rightarrow E_i, \psi_{i1} \mid \delta_{i2}, \delta_{i3} \ldots \\ & \Rightarrow E_i, \psi_{i1}, \psi_{i2} \mid \delta_{i3}, \delta_{i4} \ldots \\ & \ldots \\ & \Rightarrow E_i, \psi_{i1}, \ldots \psi_{ij} \mid \delta_{i(j+1)}, \delta_{i(j+2)} \ldots \end{aligned}$$

并且, $\{\psi \mid \phi \rightsquigarrow \psi \in \Delta_i\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{\psi_{ij}\}$, 即 $E_{i+1} = Th(E_i) \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} \{\psi_{ij}\}$.

我们将$\Delta$中缺省规则的序列定义为 $L :: \delta_{01}, \delta_{02}, \ldots \delta_{i1}, \delta_{i2}, \ldots \delta_1', \ldots, \delta_i', \ldots$ ,其中, $\delta_{ij} \in \bigcup_{k=0}^{\infty} \Delta_k, \delta_{i'} \in \Delta - \bigcup_{k=0}^{\infty} \Delta_k$. 故而由 $L$ 生成的序列 $E'$满足 $E \subseteq E'$.

反之不成立,见例 4.4.在例 4.4 中,$Th(\{p,q_1\wedge q_2\})$和 $Th(\{p,\neg q_1,\neg q_2\})$是$\Gamma$的 GD-扩展,又是$\Gamma$的扩展,但是 GD-扩展 $Th(\{p,\neg q_1,q_2\})$和 $Th(\{p,\neg q_2,q_1\})$都不是$\Gamma$的扩展. □

我们可以得出贪婪缺省逻辑是不能退化为缺省逻辑的,故而我们得到下面的定理.

**定理 4.9(不可退化性)**. 存在一个缺省理论$\Gamma$,对于任意的集合 $E$,都有 $E$ 是缺省理论$\Gamma$的扩展当且仅当 $E$ 是缺省理论$\Gamma$的 GD-扩展.

## 5 总　结

本文提出了一种贪婪缺省逻辑,旨在构造扩展时能尽可能地保留缺省规则中的信息,并给出了贪婪缺省逻辑的推演系统——GD系统和贪婪缺省逻辑的GD-扩展的构造型定义.证明了贪婪缺省逻辑的存在性、半单调性和不可退化性等性质,说明了贪婪缺省逻辑与经典缺省逻辑是两种不同的逻辑.


**References**:

[1] Reiter R. A logic for default reasoning. Artificial Intelligence, 1980,13(1):81–132. [doi: 10.1016/0004-3702(80)90014-4]

[2] Antoniou G. A tutorial on default logics. ACM Computing Surveys (CSUR), 1999,31(4):337–359. [doi: 10.1145/344588.344602]

[3] Etherington DW, Reiter R. On inheritance hierarchies with exceptions. In: Proc. of the AAAI. 1983,83:104–108. https://vvvvw.aaai.org/Papers/AAAI/1983/AAAI83-017.pdf

[4] Hunter A. Using default logic in information retrieval. In: Proc. of the Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning and Uncertainty. 1995. 235–242. [doi: 10.1007/3-540-60112-0_27]

[5] Brewka G. Nonmonotonic Reasoning: Logical Foundations of Commonsense. Vol.12, Cambridge University Press, 1991.

[6] Lukaszewlcz W. Two results on default logic. In: Proc. of the 9th Int'l Joint Conf. on Artificial Intelligence, Vol.1. Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1985. 459–461. http://dl.acm.org/citation.cfm?id=1625225

[7] Baader F, Hollunder B. Priorities on defaults with prerequisites, and their application in treating specificity in terminological default logic. Journal of Automated Reasoning, 1995,15(1):41–68. [doi: 10.1007/BF00881830]

[8] Schaub T. On constrained default theories. In: Proc. of the ECAI. 1992. 304–308. http://www.intellektik.informatik.tu-darmstadt.de/TR/1992/92-02.ps.Z

[9] Mikitiuk A, Truszczynski M. Constrained and rational default logics. In: Proc. of the IJCAI. 1995. 1509–1517. http://ijcai.org/Proceedings/95-2/Papers/064.pdf

[10] Cholewinski P, Marek VW, Truszczynski M. Default reasoning system deres. KR, 1996,96:518–528.

[11] Baader F, Hollunder B. Embedding defaults into terminological knowledge representation formalisms. Journal of Automated Reasoning, 1995,14(1):149–180. [doi: 10.1007/BF00883932]

[12] Kolovski V, Parsia B, Katz Y. Implementing owl defaults. Technical Report, DTIC Document, 2006.

[13] Zang L, Cao C, Sui Y. Two-Level default theories. In: Proc. of the Int'l Conf. on Artificial Intelligence (ICAI), p.1, The Steering Committee of the World Congress in Computer Science, Computer Engineering and Applied Computing (WorldComp). 2013. http://search.proquest.com/openview/a93eb9dda9bb0a7ddef38039f5b2485a/1?pq-origsite=gscholar&cbl=1976349

[14] Zang L, Wang W, Chen B, Cao C. The double-level default description logic mathcal d3l. In: Knowledge Science, Engineering and Management. 2015. 141–146. [doi: 10.1007/978-3-319-25159-2_12]

[15] Takeuti G. Proof Theory. 2nd ed., Courier Corporation, 2013.



**陈博**(1988－),男,山东济南人,博士,助理研究员,主要研究领域为人工智能.

**眭跃飞**(1963－),男,博士,研究员,博士生导师,主要研究领域为数理逻辑.

**曹存根**(1964－),男,博士,研究员,博士生导师,CCF高级会员,主要研究领域为大规模知识处理.