软件学报 ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
Journal of Software,2015,26(9):2286−2296 [doi: 10.13328/j.cnki.jos.004748]

E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel: +86-10-62562563

# 具有模态词$\Box\varphi=\Box_1\varphi\vee\Box_2\varphi$且可靠与完备的公理系统*

邓少波[1,2,3], 黎 敏[3], 曹存根[1], 眭跃飞[1]

[1](中国科学院 计算技术研究所 智能信息处理重点实验室,北京 100190)

[2](中国科学院大学,北京 100049)

[3](南昌工程学院 信息工程学院,江西 南昌 330099)

通讯作者: 眭跃飞, E-mail: yfsui@ict.ac.cn

**摘 要**: 提出具有模态词$\Box\varphi=\Box_1\varphi\vee\Box_2\varphi$的命题模态逻辑,给出其语言、语法与语义,其公理化系统是可靠与完备的,其中,$\Box_1$与$\Box_2$是给定的模态词.该逻辑的公理化系统具有与公理系统 S5 相似的语言,但具有不同的语法与语义.对于任意的公式$\varphi$,$\Box\varphi=\Box_1\varphi\vee\Box_2\varphi$;框架定义为三元组$\langle W,R_1,R_2\rangle$,模型定义为四元组$\langle W,R_1,R_2,I\rangle$;在完备性定理证明过程中,需要在由所有极大协调集所构成的集合上构造出两个等价关系,其典型模型的构建方法与经典典型模型的构建方法不同.如果$\Box_1$的可达关系$R_1$等于$\Box_2$的可达关系$R_2$,那么该逻辑的公理化系统变成 S5.

**关键词**: 命题模态逻辑;模态词;公理系统

**中图法分类号**: TP18

中文引用格式: 邓少波,黎敏,曹存根,眭跃飞.具有模态词$\Box\varphi=\Box_1\varphi\vee\Box_2\varphi$且可靠与完备的公理系统.软件学报,2015,26(9): 2286−2296. http://www.jos.org.cn/1000-9825/4748.htm

英文引用格式: Deng SB, Li M, Cao CG, Sui YF. Sound and complete axiomatic system with a modality $\Box\varphi=\Box_1\varphi\vee\Box_2\varphi$. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2015,26(9):2286−2296 (in Chinese). http://www.jos.org.cn/1000-9825/4748.htm

## Sound and Complete Axiomatic System with a Modality $\Box\varphi=\Box_1\varphi\vee\Box_2\varphi$

DENG Shao-Bo[1,2,3], LI Min[3], CAO Cun-Gen[1], SUI Yue-Fei[1]

[1](Key Laboratory of Intelligent Information Processing, Institute of Computing Technology, The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

[2](University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

[3](Information Engineering, NanChang Institute of Technology, Nanchang 330099, China)

**Abstract**: This paper proposes a propositional modal logic with a modality $\Box\varphi=\Box_1\varphi\vee\Box_2\varphi$, and specifies the language, the syntax and the semantics for the logic. The axiomatic system for $\Box$ is sound and complete, where $\Box_1$ and $\Box_2$ are given in this paper. The axiomatic system for the logic has the similar language, but has the different syntax and semantics. For any formula $\varphi$, $\Box\varphi=\Box_1\varphi\vee\Box_2\varphi$; the frame for the axiomatic system is defined as an triple $\langle W,R_1,R_2\rangle$, and the model is defined as quadruple $\langle W,R_1,R_2,I\rangle$. When the completeness theorem is proved, two equivalence relations are constructed on the set that is made up of all the maximal consistent sets. The construction method of a canonical model for the axiomatic system is different from the classical canonical model. If the accessibility relation $R_1$ for $\Box_1$ is the accessibility relation $R_2$ for $\Box_2$, then the axiomatic system for $\Box$ changes into S5.

**Key words**: propositional modal logic; modality; the axiomatic system

模态逻辑是由命题逻辑或谓词逻辑加上模态词$\Box$而形成的扩张[1].在模态逻辑中,框架 $F$ 被定义为二元组$\langle W,R\rangle$[1,2],其中,$W$是非空的可能世界集合,$R$是$W$上的一种可达关系;模型$M$被定义为三元组$\langle W,R,I\rangle$,其中,$\langle W,R\rangle$

* 基金项目: 国家自然科学基金(61363047, 61173063, 60773059, 61035004); 江西省教育厅科技厅项目(GJJ14748); 江西省科技厅项目(20111BBE50008, 2011ZBBE50035, 20112BBE50052)

收稿时间: 2014-06-23; 修改时间: 2014-08-15; 定稿时间: 2014-10-29

是框架,$I$ 对命题符号进行解释并赋予真假值.模态逻辑根据可达关系 $R$ 分为公理系统 $K,D,T,B$,S4 与 S5 等等[1].在模态逻辑中,任给一个模型$\langle W,R,I\rangle$,对于任意的可能世界 $w$ 与公式$\varphi$,$M,w\vDash\Box\varphi$当且仅当对于任意的可能世界 $w'\in W$,如果 $wRw'$,那么 $M,w'\vDash\varphi$.在多模态逻辑[3−6]中,其框架与模型的定义与在模态逻辑中的定义相似.

既然公理系统 S5 可以用所有的等价框架刻画[1],那么粗糙集理论中的近似空间$(U,R)$可以用作 S5 的可能世界语义[7].给定任意的近似空间$(U,R)$,$(U,R)$可以对应 S5 的框架$\langle W,R\rangle$,即:$U=W$,并且 $R$ 既是 $U$ 上的等价关系又是 $W$ 上的可达关系.当使用 S5 形式化粗糙集理论时,对于任意的公式$\varphi$,$\varphi$的解释对应论域 $U$ 的某个子集 $X$;上近似集 $R^*(X)$与下近似集 $R_*(X)$则分别对应$\Diamond\varphi$与$\Box\varphi$的解释[7];模态词$\Box$对应某个等价类,但不能用于表达粗糙集理论中精确或模糊的特点[7],其主要原因在于模态词$\Box$只有单一的解释.如果$\Box$有两种不同的解释,那么$\Box$不仅能用于表达粗糙集理论中精确或模糊的特点,而且能够诱导出一种新的公理化系统.考虑给定近似空间$(U,R_1)$与$(U,R_2)$,那么 $R_1\cap R_2$ 必是等价关系,其中,$\cap$是关系的交运算.既然 $R_1\cap R_2$ 对应模态词$\Box$的可达关系,那么对于任意的公式$\varphi$:

$M,w\vDash\Box\varphi$ iff 对于任意的 $w'\in W$,如果 $w(R_1\cap R_2)w'$,那么 $M,w'\vDash\varphi$;

Iff 对于任意的 $w'\in W$,如果 $wR_1w'$且 $wR_2w'$,那么 $M,w'\vDash\varphi$.

既然对于任意的 $w'\in W$,如果 $wR_1w'$,那么 $M,w'\vDash\varphi$;或对于任意的 $w'\in W$,如果 $wR_2w'$,那么 $M,w'\vDash\varphi$,蕴含对于任意的 $w'\in W$,如果 $wR_1w'$且 $wR_2w'$,那么 $M,w'\vDash\varphi$.

则有:$M,w\vDash\Box_1\varphi$或 $M,w\vDash\Box_2\varphi$蕴含 $M,w\vDash\Box\varphi$.

而 $M,w\vDash\Box\varphi$不能蕴含 $M,w\vDash\Box_1\varphi$或 $M,w\vDash\Box_2\varphi$,其中,$R_i$ 对应模态词$\Box_i$ 的可达关系且 $i=1,2$.

如果令 $M,w\vDash\Box\varphi$蕴含 $M,w\vDash\Box_1\varphi$或 $M,w\vDash\Box_2\varphi$,则有 $M,w\vDash\Box\varphi$当且仅当 $M,w\vDash\Box_1\varphi$或 $M,w\vDash\Box_2\varphi$.于是,对于任意的公式$\varphi$,$\Box\varphi=\Box_1\varphi\vee\Box_2\varphi$.那么,本文得到一种新的模态词$\Box$.我们将给出具有模态词$\Box\varphi=\Box_1\varphi\vee\Box_2\varphi$的命题模态逻辑,描述其语言、语法与语义.首先给出该逻辑的语言、公式、框架、模型与可满足关系等定义,然后给出该逻辑的公理化系统的公理模式与推理规则.S5 的公理模式 $K$[1]不是该逻辑的公理化系统的定理,最后证明该公理化系统是可靠且完备的.在证明完备性定理过程中,需要在由所有极大协调集所构成的集合上构造出两个关系并证明这两个关系是等价关系,其典型模型的构建方法与经典典型模型的构建方法[1]不同.该公理化系统具有与 S5 不一样的语法与语义.对于任意的公式$\varphi$,模态逻辑或多模态逻辑不能判断 $M,w\vDash\Box\varphi$与 $M,w\vDash\neg\Box\varphi$.

本文的主要贡献:提出一种具有模态词$\Box\varphi=\Box_1\varphi\vee\Box_2\varphi$的模态逻辑,描述其语言、语法与语义,并证明其公理化系统是可靠与完备的.与公理系统 S5 相比,该逻辑的公理化系统具有以下不同:

- 对于任意的公式$\varphi$,$\Box\varphi=\Box_1\varphi\vee\Box_2\varphi$;
- 框架定义为$\langle W,R_1,R_2\rangle$;
- 模型定义为$\langle W,R_1,R_2,I\rangle$;
- 公理模式 $K$(S5 的公理模式)不是该公理化系统的定理;
- 在证明完备性定理的过程中,我们需要构建出两个等价关系 $R_1$ 与 $R_2$,如果 $R_1=R_2$,那么该公理化系统变为 S5.

本文第 1 节介绍公理系统 S5.第 2 节给出具有模态词$\Box\varphi=\Box_1\varphi\vee\Box_2\varphi$的模态逻辑,描述其语言、语法与语义;同时,给出可靠性定理与完备性定理的详细证明.第 3 节总结全文并给出相关讨论.

## 1 公理系统 S5

本节主要介绍公理系统 S5 的语言、语法与语义,并简单阐述其可靠性定理与完备性定理.

公理系统 S5 的语言如下所示:

**定义 1.1**.

- 语言:
  - 命题变量符号:$p_1,p_2,...$;
  - 逻辑连接符:$\neg,\rightarrow$;
  - 模态词:$\Box$;

- ➢ 标点符号:(,).
- 公式:

$$\varphi=p|\neg\varphi_1|\varphi_1\to\varphi_2|\Box\varphi_1.$$

其中,$p$ 是任意的命题变量符号.

**定义 1.2(框架[1])**. 框架 $F$ 是一个有序的二元组$\langle W,R\rangle$,其中,$W$ 是可能世界的集合,$R$ 是 $W$ 上的二元关系.

公理系统 S5 的公理模式与推理规则:

- 公理模式:
  - ➢ (A1) $\varphi_1\to(\varphi_2\to\varphi_1)$;
  - ➢ (A2) $(\varphi_1\to(\varphi_2\to\varphi_3))\to((\varphi_1\to\varphi_2)\to(\varphi_1\to\varphi_3))$;
  - ➢ (A3) $(\neg\varphi_1\to\neg\varphi_2)\to(\varphi_2\to\varphi_1)$;
  - ➢ (A4) $\Box(\varphi\to\psi)\to(\Box\varphi\to\Box\psi)$;
  - ➢ (A5) $\Box\varphi\to\varphi$;
  - ➢ (A6) $\Box\varphi\to\Box\Box\varphi$;
  - ➢ (A7) $\varphi\to\Box\Diamond\varphi$.

  每一个公理模式对应可数无穷多个实例.
- 推理规则:
  - ➢ 分离规则: $\dfrac{\varphi,\varphi\to\psi}{\psi}$;
  - ➢ 必然规则: $\dfrac{\varphi}{\Box\varphi}$.

**定理 1.1(可靠性定理)**. 对于任意的公式集$\Sigma$与公式$\varphi$,如果$\Sigma\vdash\varphi$,则$\Sigma\vDash\varphi$.

**定理 1.2(完备性定理)**. 对于任意的公式集$\Sigma$与公式$\varphi$,如果$\Sigma\vDash\varphi$,则$\Sigma\vdash\varphi$.

## 2 具有模态词$\Box\varphi=\Box_1\varphi\vee\Box_2\varphi$的模态逻辑

本节将给出具有模态词$\Box\varphi=\Box_1\varphi\vee\Box_2\varphi$的模态逻辑,描述其语言、语法与语义,其公理化系统记为 $^{S51}\vee^{S52}$;然后,我们证明 $^{S51}\vee^{S52}$ 的可靠性定理与完备性定理.

### 2.1 语言,语法与语义

公理系统 $^{S51}\vee^{S52}$ 的语言如下:

**定义 2.1**.

- 语言:
  - ➢ 命题变量符号:$p_1,p_2,\ldots$;
  - ➢ 逻辑连接符:$\neg,\to$;
  - ➢ 模态词:$\Box,\Box_1,\Box_2$;
  - ➢ 标点符号:(,).
- 公式:
  - ➢ $\varphi=p|\neg\varphi_1|\varphi_1\to\varphi_2|\Box\varphi_1$;
  - ➢ $\Box\varphi_1=\Box_1\varphi_1\vee\Box_2\varphi_1$.
- 其他联结词:
  - ➢ $(\varphi_1\vee\varphi_2)=_{def}(\neg\varphi_1\to\varphi_2)$;
  - ➢ $(\varphi_1\wedge\varphi_2)=_{def}\neg(\varphi_1\to\neg\varphi_2)$;
  - ➢ $(\varphi_1\leftrightarrow\varphi_2)=_{def}((\varphi_1\to\varphi_2)\wedge(\varphi_2\to\varphi_1))$;
  - ➢ $(\Diamond\varphi_1)=_{def}(\neg\Box\neg\varphi_1)$.

**定义 2.2(框架)**. 框架 $F$ 定义为有序三元组$\langle W,R_1,R_2\rangle$,其中,$W$ 是非空的可能世界集合,$R_i\subseteq W^2$ 是可能世界集 $W$ 上的等价关系,$R_i$ 对应$\Box_i$ 的可达关系并且 $i$=1,2.

**定义 2.3(模型)**. 模型 $M$ 定义为有序四元组 $M=\langle W,R_1,R_2,I\rangle$,其中:

- $\langle W,R_1,R_2\rangle$是框架;
- $I$ 是一个解释,使得对于任意命题变量 $p,I(p)\subseteq W$;并且对于任意 $w\in I(p),p$ 在 $w$ 中为真.

对于任意的公式$\varphi$与可能世界 $w$,可满足关系定义如下:

**定义 2.4(可满足关系)**. 给定任意模型 $M=\langle W,R_1,R_2,I\rangle$与公式$\varphi$,则有:

$$M,w\models\varphi\text{当且仅当}\begin{cases}w\in I(p), & \text{如果}\varphi=p\\ M,w\not\models\varphi_1, & \text{如果}\varphi=\neg\varphi_1\\ M,w\models\varphi_1\Rightarrow M,w\models\varphi_2, & \text{如果}\varphi=\varphi_1\to\varphi_2\\ \text{对于任意}w'\in W,\text{如果}wR_1w',\text{那么}M,w'\models\varphi_1\text{或} & \\ \text{对于任意}w'\in W,\text{如果}wR_2w',\text{那么}M,w'\models\varphi_1, & \text{如果}\varphi=\Box\varphi_1\end{cases}.$$

在下文,由可满足关系的定义,我们将分别给出公式在模型中有效的定义、在框架中有效的定义、在框架类中有效的定义.

**定义 2.5(有效公式)**:

- 公式$\varphi$在模型中有效当且仅当对于任意的可能世界 $w\in W,M,w\models\varphi$,记为 $M\models\varphi$;
- 公式$\varphi$在框架中有效当且仅当对于基于框架 $F$ 的任意的模型 $M,M\models\varphi$,记为 $F\models\varphi$;
- 令 $C$ 表示为框架类,公式$\varphi$在框架类 $C$ 中有效当且仅当对于任意的框架 $F\in C,F\models\varphi$;
- $\Sigma\models_C\varphi$当且仅当对于任意框架 $F\in C$:如果 $F\models\Sigma$,则 $F\models\varphi$;如果$\Sigma=\varnothing$,那么$\models_C\varphi$.

公理系统 $^{S51}\vee^{S52}$ 的公理模式与推理规则如下所示:

- 公理模式:
  - L1 $\varphi_1\to(\varphi_2\to\varphi_1)$;
  - L2 $(\varphi_1\to(\varphi_2\to\varphi_3))\to((\varphi_1\to\varphi_2)\to(\varphi_1\to\varphi_3))$;
  - L3 $(\neg\varphi_1\to\neg\varphi_2)\to(\varphi_2\to\varphi_1)$;
  - L4 $(\Box\varphi\vee\Box\psi)\to\Box(\varphi\vee\psi)$;
  - L5 $\Box\varphi\to\varphi$;
  - L6 $\Box\varphi\to\Box\Box\varphi$;
  - L7 $\Box(\Box\varphi\vee\psi)\to(\Box\varphi\vee\Box\psi)$;
  - L8 $\Diamond(\Box\varphi\vee\psi)\to(\Box\varphi\vee\Diamond\psi)$.

每一个公理模式对应可数无穷多个实例.

- 推理规则:
  - 分离规则(MP): $\dfrac{\varphi,\varphi\to\psi}{\psi}$;
  - 必然规则(N): $\dfrac{\varphi}{\Box\varphi}$.

**定义 2.6**. 设$\Sigma$是一个公式集合,$\Sigma$上的一个证明是公式的序列$\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n$使得对于每一个 $i:1\leqslant i\leqslant n$:

- 要么$\varphi_i$是一个公理;
- 要么$\varphi_i\in\Sigma$;
- 要么存在 $j,k<i$ 使得$\varphi_i$由$\varphi_j,\varphi_k$与分离规则推出;
- 要么存在 $j<i$ 使得$\varphi_i$由$\varphi_j$与必然规则推出.

公式$\varphi$是$\Sigma$的定理,记为$\Sigma\vdash\varphi$,如果存在$\Sigma$上的一个证明$\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n$使得$\varphi=\varphi_n$.

### 2.2 可靠性定理

本节主要阐述公理系统 $^{S51}\vee^{S52}$ 的可靠性定理证明.在证明之前,先证明各个公理模式的有效性:

- L4 $(\Box\varphi\vee\Box\psi)\to\Box(\varphi\vee\psi)$

证明:对于任意框架$\langle W,R_1,R_2\rangle$的任意模型 $M=\langle W,R_1,R_2,I\rangle$与任意的可能世界 $w\in W$,如果 $M,w\vDash\Box\varphi\vee\Box\psi$,那么 $M,w\vDash\Box\varphi$或 $M,w\vDash\Box\psi$.

由定义 2.4 可知:如果 $M,w\vDash\Box\varphi$,则有 $M,w\vDash\Box(\varphi\vee\psi)$;

由定义 2.4 可知:如果 $M,w\vDash\Box\psi$,则有 $M,w\vDash\Box(\varphi\vee\psi)$.

因此可以判定:对于任意框架$\langle W,R_1,R_2\rangle$的任意模型 $M=\langle W,R_1,R_2,I\rangle$与任意的可能世界 $w\in W$,如果 $M,w\vDash\Box\varphi\vee\Box\psi$,那么 $M,w\vDash\Box(\varphi\vee\psi)$. □

- L5 $\Box\varphi\to\varphi$

证明:由定义 2.4 可以证明. □

- L6 $\Box\varphi\to\Box\Box\varphi$

证明:假设对于某框架$\langle W,R_1,R_2\rangle$的某个模型 $M=\langle W,R_1,R_2,I\rangle$与某个可能世界 $w\in W,M,w\vDash\Box\varphi$且 $M,w\nvDash\Box\Box\varphi$.

既然 $M,w\vDash\Box\varphi$,那么对于任意的可能世界 $w'\in W$,如果 $wR_1w'$,那么 $M,w'\vDash\varphi$;或对于任意的可能世界 $w'\in W$,如果 $wR_2w'$,那么 $M,w'\vDash\varphi$;

既然 $M,w\nvDash\Box\Box\varphi$,那么存在可能世界 $w_1$ 与 $w_2$ 使得 $wR_1w_1$ 且 $M,w_1\vDash\neg\Box\varphi$且 $wR_2w_2$ 且 $M,w_2\vDash\neg\Box\varphi$.

因为 $M,w_1\vDash\neg\Box\varphi$,由可满足关系的定义,存在 $w_3$ 与 $w_4$ 使得 $w_1R_1w_3$ 且 $M,w_3\vDash\neg\varphi$且 $w_1R_2w_4$ 且 $M,w_4\vDash\neg\varphi$.

因为关系 $R_1$ 与 $R_2$ 是等价关系且 $wR_1w_1$ 且 $w_1R_1w_3$,则有 $wR_1w_3$ 且 $M,w_3\vDash\neg\varphi$,这与 $M,w\vDash\Box\varphi$矛盾.同理,有 $wR_2w_4$ 且 $M,w_4\vDash\neg\varphi$,这与 $M,w\vDash\Box\varphi$矛盾.

至于 $M,w_2\vDash\neg\Box\varphi$,与 $M,w_1\vDash\neg\Box\varphi$的证明类似,也存在矛盾. □

- L7 $\Box(\Box\varphi\vee\psi)\to(\Box\varphi\vee\Box\psi)$

证明:证明过程与(L6)的证明过程类似,我们省略其证明过程. □

- L8 $\Diamond(\Box\varphi\vee\psi)\to(\Box\varphi\vee\Diamond\psi)$

证明:证明过程与(L6)的证明类似,我们省略其具体的证明. □

对于公理系统 S5 的公理模式 $K$,容易证明 $K$ 不是公理系统 $^{S51}\vee^{S52}$ 的定理.

对于 MP 规则见文献[1,8,9].我们仅仅给出 N 规则的证明:

既然对于任意的框架$\langle W,R_1,R_2\rangle$的任意模型 $M=\langle W,R_1,R_2,I\rangle$与任意可能世界 $w\in W,M,w\vDash\varphi$.令 $w'$为任意一个可能世界,则有:对于任意可能世界 $w''\in W$,如果 $w'R_1w''$,那么 $M,w''\vDash\varphi$;或对于任意可能世界 $w''\in W$,如果 $w'R_2w''$,那么 $M,w''\vDash\varphi$.于是,$M,w'\vDash\Box\varphi$.

既然对于任意框架$\langle W,R_1,R_2\rangle$的任意模型 $M=\langle W,R_1,R_2,I\rangle$与任意可能世界 $w'\in W,M,w'\vDash\Box\varphi$,可以断定$\vDash\Box\varphi$. □

由 $^{S51}\vee^{S52}$ 的公理,我们可以获得以下的定理:

(1) L7′ $\Box(\Box\varphi_1\vee\ldots\vee\Box\varphi_n\vee\psi)\to(\Box\varphi_1\vee\ldots\vee\Box\varphi_n\vee\Box\psi)$;

(2) L8′ $\Diamond(\Box\varphi_1\vee\ldots\vee\Box\varphi_n\vee\psi)\to(\Box\varphi_1\vee\ldots\vee\Box\varphi_n\vee\Diamond\psi)$;

(3) L4′ $\Box(\varphi\wedge\psi)\to(\Box\varphi\wedge\Box\psi)$.

证明:

(1) 重复应用公理 L7 即可证明;

(2) 重复应用公理 L8 即可证明;

(3) 既然$\Box(\varphi\wedge\psi)\to\Box(\varphi\wedge\psi)\vee\Box(\varphi\wedge\neg\psi)$,由公理 L4,$\Box(\varphi\wedge\psi)\vee\Box(\varphi\wedge\neg\psi)\to\Box((\varphi\wedge\psi)\vee(\varphi\wedge\neg\psi))$;既然$(\varphi\wedge\psi)\vee(\varphi\wedge\neg\psi)\leftrightarrow\varphi$,因此$\Box(\varphi\wedge\psi)\vee(\varphi\wedge\neg\psi)\leftrightarrow\Box\varphi$.于是,$\Box(\varphi\wedge\psi)\to\Box\varphi$.

与$\Box(\varphi\wedge\psi)\to\Box\varphi$的证明类似,我们可以证明$\Box(\varphi\wedge\psi)\to\Box\psi$.则有$\Box(\varphi\wedge\psi)\to(\Box\varphi\wedge\Box\psi)$. □

**定理 2.1(可靠性定理)**. 对于任意的公式集$\Sigma$与公式$\varphi$,如果$\Sigma\vdash\varphi$,则$\Sigma\vDash\varphi$.

证明:$\Sigma\vdash\varphi$,则说明存在一个证明序列$\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n$使得$\varphi_n=\varphi$.因此,对$\Sigma\vdash\varphi$的证明序列长度$n$进行归纳证明:

- 归纳基础 $n=1$:证明序列中只有一个公式$\varphi$.因此,这个公式要么是一个公理,要么$\varphi\in\Sigma$,则有$\Sigma\vDash\varphi$;
- 当$n\geqslant 1$时:假设对于所有由$\Sigma$用小于$n$步推出的公式此定理成立,那么有以下几种情形:
  - 情形 1:如果$\varphi$是一个公理,则有$\vDash\varphi$,于是$\Sigma\vDash\varphi$;
  - 情形 2:如果$\varphi\in\Sigma$,则有$\Sigma\vDash\varphi$;
  - 情形 3:如果$\varphi$是由证明序列中一个公式应用必然规则 N 得到的,则$\varphi$必然是$\Box\psi$这种形式,且$\psi$可由$\Sigma$在小于$n$步内推出,即为$\Sigma\vdash\psi$.由归纳假设可知,$\Sigma\vDash\psi$.既然对于任意的框架$\langle W,R_1,R_2\rangle$的任意模型$M=\langle W,R_1,R_2,I\rangle$与任意的可能世界$w\in W,M,w\vDash\psi$,则对于任意的框架$\langle W,R_1,R_2\rangle$的任意模型$M=\langle W,R_1,R_2,I\rangle$与任意的可能世界$w\in W,M,w\vDash\Box\psi$.因此,对于任意的框架$\langle W,R_1,R_2\rangle$的任意模型$M=\langle W,R_1,R_2,I\rangle$与任意的可能世界$w\in W,M,w\vDash\Sigma$蕴含$M,w\vDash\varphi$;
  - 情形 4:如果$\varphi$是由证明序列中的两个公式使用分离规则 MP 得到,则证明序列中必有$\psi$和$\psi\rightarrow\varphi$这两种形式公式,且这两个公式均可由小于$n$步的序列推出,即为$\Sigma\vdash\psi$与$\Sigma\vdash\psi\rightarrow\varphi$.由归纳假设可知$\Sigma\vDash\psi$与$\Sigma\vDash\psi\rightarrow\varphi$,于是可得$\Sigma\vDash\varphi$. □

### 2.3 完备性定理

本节主要证明公理系统 $^{S51}\vee^{S52}$ 的完备性定理,其典型模型构建方法与经典的典型模型构建方法不同[1].

**定义 2.7(协调性)**. 一个公式集合$\Sigma$是协调的当且仅当不存在公式$\varphi$使得$\Sigma\vdash\varphi$并且$\Sigma\vdash\neg\varphi$[9].

由上述协调性定义,我们有:

公式集合$\Sigma$是不协调的当且仅当存在公式$\varphi_1,\ldots,\varphi_n\in\Sigma$使得:

$$\vdash\neg(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n).$$

**定理 2.2**. 给定任意一个协调的公式集$\Sigma$,该公式集可以扩充为极大协调集合$\Sigma^*$.

证明:假定所有的公式按照$\alpha_0,\alpha_1,\ldots$排成一列,归纳定义$\Sigma_n$:

$$\Sigma_0=\Sigma,$$

$$\Sigma_{n+1}=\begin{cases}\Sigma_n\cup\{\alpha_n\}, & \text{如果}\Sigma_n\cup\{\alpha_n\}\text{是协调的}\\ \Sigma_n\cup\{\neg\alpha_n\}, & \text{如果}\Sigma_n\cup\{\neg\alpha_n\}\text{是协调的}\end{cases}.$$

现在我们需要证明:对于任意的$n$,如果$\Sigma_n$是协调的,那么$\Sigma_{n+1}$也是协调的,则由归纳定义可知,$\Sigma_{n+1}$是协调的.

令$\Sigma^*=\bigcup\Sigma_n$,那么,

(1) $\Sigma^*$是协调的.

假设$\Sigma^*$不协调,存在一个公式$\varphi$使得:

$$\Sigma^*\vdash\varphi\text{并且}\Sigma^*\vdash\neg\varphi.$$

于是,存在有限子集$\Sigma^0,\Sigma^1\subseteq\Sigma^*$使得$\Sigma^0\vdash\varphi$并且$\Sigma^1\vdash\neg\varphi$.

既然$\Sigma^0\cup\Sigma^1$是有限公式集合,那么存在$n$使得$\Sigma^0\cup\Sigma^1\subseteq\Sigma_n$且$\Sigma_n$不协调.但我们已经证明$\Sigma_n$是协调的,因此矛盾.所以,$\Sigma^*$协调.

(2) 对于任意公式$\varphi_n$,要么$\varphi_n\in\Sigma^*$,要么$\neg\varphi_n\in\Sigma^*$.

对于任意公式$\varphi_n$,由$\Sigma_n$的定义可知:要么$\varphi_n\in\Sigma_n$要么$\neg\varphi_n\in\Sigma_n$.既然$\Sigma_n\subseteq\Sigma^*$,可以断言:要么$\varphi_n\in\Sigma^*$要么$\neg\varphi_n\in\Sigma^*$.□

构造模型$M=\langle W,R_1,R_2,I\rangle$使得对于任意的可能世界$w\in W$是一个极大协调集,而在可能世界集合$W$上的可达关系$R_1,R_2$被定义为:

**定义 2.8**.令$\Gamma=\{\Sigma_0,\Sigma_1,\ldots\}$是由所有极大协调集构成的集合,对于任意的$\Sigma_i,\Sigma_j\in\Gamma$,令:

- $S^-(\Sigma_i)=\{\varphi:\Box\varphi\in\Sigma_i\}$;
- $S(\Sigma_i)=\{\Box\varphi:\Box\varphi\in\Sigma_i\}$.

定义在$\Gamma$上的关系$R_1$与$R_2$:

- $\Sigma_iR_1\Sigma_j$当且仅当$S^-(\Sigma_i)\subseteq\Sigma_j$;

- $\Sigma_i R_2 \Sigma_j$ 当且仅当 $S(\Sigma_i)\subseteq\Sigma_j$.

**定理 2.3**. 令$\Gamma=\{\Sigma_0,\Sigma_1,\ldots\}$是由所有极大协调集构成的集合,如果对于任意的$\Sigma_i,\Sigma_j\in\Gamma$:

- $\Sigma_i R_1 \Sigma_j$ 当且仅当 $S^-(\Sigma_i)\subseteq\Sigma_j$;
- $\Sigma_i R_2 \Sigma_j$ 当且仅当 $S(\Sigma_i)\subseteq\Sigma_j$.

那么,关系 $R_1$ 与 $R_2$ 均是$\Gamma$上的等价关系.

证明:

1. 我们需要证明 $R_1$ 满足以下 3 个条件:

(i) $R_1$ 具有自反性:对于任意$\Sigma_i\in\Gamma,\Sigma_i R_1 \Sigma_i$;

(ii) $R_1$ 具有对称性:对于任意$\Sigma_i,\Sigma_j\in\Gamma$,如果$\Sigma_i R_1\Sigma_j$,则$\Sigma_j R_1\Sigma_i$;

(iii) $R_1$ 具有传递性:对于任意$\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3\in\Gamma$,如果$\Sigma_1 R_1\Sigma_2$ 且$\Sigma_2 R_1\Sigma_3$,则$\Sigma_1 R_1\Sigma_3$.

- 条件(i)的证明.

对于任意的 $i\in N$,需要证明 $S^-(\Sigma_i)\subseteq\Sigma_i$,其证明过程如下所示:

对于任意的公式$\varphi$,如果$\Box\varphi\in\Sigma_i$,那么$\varphi\in S^-(\Sigma_i)$.既然$\Box\varphi\to\varphi$(L5)与$\Box\varphi\in\Sigma_i$,那么$\varphi\in\Sigma_i$,于是 $S^-(\Sigma_i)\subseteq\Sigma_i$.

- 条件(ii)的证明.

我们需要证明:如果 $S^-(\Sigma_i)\subseteq\Sigma_j$,那么 $S^-(\Sigma_j)\subseteq\Sigma_i$.也就是说:对于任意公式$\beta$,如果$\Box\beta\in\Sigma_j$,那么$\beta\in\Sigma_i$.

假定$\beta\notin\Sigma_i,\neg\beta\in\Sigma_i$.因为$\Box\beta\to\beta$(L5)与$\neg\beta\in\Sigma_i$,可以断定$\neg\Box\beta\in\Sigma_i$.既然 $S^-(\Sigma_i)\subseteq\Sigma_j$,那么对于任意公式$\alpha$:如果$\Box\alpha\in\Sigma_i$,那么$\alpha\in\Sigma_i$.因$\neg\Box\beta\in\Sigma_i$ 与$\Box\alpha\in\Sigma_i$,则有$\Box\alpha\wedge\neg\Box\beta\in\Sigma_i$.

因$\Box\alpha\wedge\neg\Box\beta\in\Sigma_i$,则根据$(\Box\alpha\wedge\neg\Box\beta)\to\Box(\alpha\wedge\neg\Box\beta)$,$\Box(\alpha\wedge\neg\Box\beta)\in\Sigma_i$.而$(\Box\alpha\wedge\neg\Box\beta)\to\Box(\alpha\wedge\neg\Box\beta)$由公理 L8 的逆反律获得.

由$\Box(\alpha\wedge\neg\Box\beta)\in\Sigma_i$与公理 L6,有$\Box\Box(\alpha\wedge\neg\Box\beta)\in\Sigma_i$.既然$S^-(\Sigma_i)\subseteq\Sigma_j$,那么$\Box(\alpha\wedge\neg\Box\beta)\in\Sigma_j$.由$\Box(\alpha\wedge\neg\Box\beta)\in\Sigma_j$与公理 L5,则有$\alpha\wedge\neg\Box\beta\in\Sigma_j$.因此,$\alpha\in\Sigma_j$ 与$\neg\Box\beta\in\Sigma_j$.既然$\neg\Box\beta\in\Sigma_j$ 与$\Box\beta\in\Sigma_j$,那么$\Sigma_j$ 不协调,这与该定理的前提条件矛盾.

- 条件(iii)的证明.

我们需要证明:如果 $S^-(\Sigma_1)\subseteq\Sigma_2$ 与 $S^-(\Sigma_2)\subseteq\Sigma_3$,那么 $S^-(\Sigma_1)\subseteq\Sigma_3$.也就是说:对于任意公式$\beta$,如果$\Box\beta\in\Sigma_1$,那么$\beta\in\Sigma_3$.其证明过程如下所示:

由$\Box\beta\in\Sigma_1$ 与$\Box\beta\to\Box\Box\beta$(L6),则有$\Box\Box\beta\in\Sigma_1$.根据$\Sigma_1 R_1\Sigma_2$ 与关系 $R_1$ 的定义,则有$\Box\varphi\in\Sigma_2$.由$\Sigma_2 R_1\Sigma_3$ 与$\Box\beta\in\Sigma_2$,则有$\beta\in\Sigma_3$.因此对于任意公式$\beta$,如果$\Box\beta\in\Sigma_1$,那么$\beta\in\Sigma_3$.因此,$S^-(\Sigma_1)\subseteq\Sigma_3$.

2. 现在,我们需要证明关系 $R_2$ 是等价关系,下面 3 个条件需要被证明:

(i) 对于任意$\Sigma_i\in\Gamma,\Sigma_i R_2\Sigma_i$;

(ii) 对于任意$\Sigma_i,\Sigma_j\in\Gamma$,如果$\Sigma_i R_2\Sigma_j$,则$\Sigma_j R_2\Sigma_i$;

(iii) 对于任意$\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3\in\Gamma$,如果$\Sigma_1 R_2\Sigma_2$ 且$\Sigma_2 R_2\Sigma_3$,则$\Sigma_1 R_2\Sigma_3$.

条件(i)与条件(iii)比较容易证明,在此省略它们的证明过程.本文只给出条件(ii)的证明:

对于条件(ii),我们需要证明:对于任意公式$\beta$,如果$\Box\beta\in\Sigma_j$,那么$\Box\beta\in\Sigma_i$.其证明过程如下所示:

假定$\Box\beta\notin\Sigma_i$,于是$\neg\Box\beta\in\Sigma_i$.既然$\Sigma_i R_2\Sigma_j$,则有:对于任意公式$\alpha$,如果$\Box\alpha\in\Sigma_i$,那么$\Box\alpha\in\Sigma_j$.由$\neg\Box\beta\in\Sigma_i$ 与$\Box\alpha\in\Sigma_i$,则有$\Box\alpha\wedge\neg\Box\beta\in\Sigma_i$.

根据公理 L8 的逆反律,则有$(\Box\varphi\wedge\neg\Box\psi)\to\Box(\varphi\wedge\neg\Box\psi)$,然后有$(\Box\alpha\wedge\neg\Box\beta)\to\Box(\alpha\wedge\neg\Box\beta)$.

因$\neg\Box\varphi\wedge\Box\alpha\in\Sigma_i$ 与$(\Box\alpha\wedge\neg\Box\beta)\to\Box(\alpha\wedge\neg\Box\beta)$,则有$\Box(\alpha\wedge\neg\Box\beta)\in\Sigma_i$.

由$\Box(\alpha\wedge\neg\Box\beta)\in\Sigma_i$ 与公理 L4′,则有$\Box\alpha\wedge\Box\neg\Box\beta\in\Sigma_i$,于是$\Box\neg\Box\beta\in\Sigma_i$.既然$\Sigma_i R_2\Sigma_j$,那么$\Box\neg\Box\beta\in\Sigma_j$.由$\Box\neg\Box\beta\in\Sigma_j$ 与 L5,我们有$\neg\Box\beta\in\Sigma_j$.既然$\neg\Box\beta\in\Sigma_j$ 且$\Box\beta\in\Sigma_j$,可以断定$\Sigma_j$ 不协调,这与该定理的前提条件矛盾. □

**定理 2.4**. 令$\Gamma$是包含公式$\neg\Box\psi$的极大协调公式集合,$S^-(\Gamma)\cup\{\neg\psi\}$是协调的且$\neg\psi\in\Gamma$,其中,$S^-(\Gamma)=\{\varphi:\Box\varphi\in\Gamma\}$.

证明:

1. 我们需要证明 $S^-(\Gamma)\cup\{\neg\psi\}$是协调的,其证明过程如下所示:

对于 $S^-(\Gamma)$,有以下两种情况:

- 情形 1. $S^-(\Gamma)\neq\varnothing$.

于是,$\Gamma$至少包含一个$\Box\varphi$这种形式公式,比如令$\Box\varphi\in\Gamma$,则:

首先,本文需要证明$\neg\Box\psi\in S^-(\Gamma)$,其证明过程如下所示:

由$\neg\Box\psi\in\Gamma$与$\Box\varphi\in\Gamma$,可以断定$\Box\varphi\wedge\neg\Box\psi\in\Gamma$.根据公理 L8 的逆反律,可以得到$\Box\varphi\wedge\neg\Box\psi\to\Box(\varphi\wedge\neg\Box\psi)$,然后有$\Box(\varphi\wedge\neg\Box\psi)\in\Gamma$.

根据定理 L4′与$\Box(\varphi\wedge\neg\Box\psi)\in\Gamma$,$\Box\varphi\wedge\Box\neg\Box\psi\in\Gamma$,然后$\Box\neg\Box\psi\in\Gamma$.

由 $S^-(\Gamma)$的定义,则有$\neg\Box\psi\in\Gamma$.

其次,利用反证法证明 $S^-(\Gamma)\cup\{\neg\psi\}$是协调的,其证明过程如下所示:

假定 $S^-(\Gamma)\cup\{\neg\psi\}$不协调,则意味着存在 $S^-(\Gamma)$的有限子集$\{\neg\Box\beta_1,\dots,\neg\Box\beta_n\}$,使得:

$$\vdash\neg(\neg\Box\beta_1\wedge\dots\wedge\neg\Box\beta_n\wedge\neg\psi),$$

其中,$n\geqslant 1$.

对于 $n$,我们有以下两种情况:

情形 1.1. $n\geqslant 2$.

于是,

$$\begin{aligned}\vdash\neg(\neg\Box\beta_1\wedge\dots\wedge\neg\Box\beta_n\wedge\neg\psi)\quad &\text{iff}\quad \vdash\Box\beta_1\vee\dots\vee\Box\beta_n\vee\psi\\ &\text{iff}\quad \vdash\Box(\Box\beta_1\vee\dots\vee\Box\beta_n\vee\psi) && \text{(根据 N)}\\ &\text{iff}\quad \vdash\Box\beta_1\vee\dots\vee\Box\beta_n\vee\Box\psi && \text{(根据 L7)}\\ &\text{iff}\quad \vdash\neg(\neg\Box\beta_1\wedge\dots\wedge\neg\Box\beta_n\wedge\neg\Box\psi)\end{aligned}$$

于是,$\{\neg\Box\beta_1,\dots,\neg\Box\beta_n,\neg\Box\psi\}$不协调.

对于任意$\neg\Box\beta_i\in S^-(\Gamma)$,由 $S^-(\Gamma)$的定义可知,$\Box\neg\Box\beta_i\in\Gamma$.既然$\Box\neg\Box\beta_i\to\neg\Box\beta_i$且$\Box\neg\Box\beta_i\in\Gamma$,那么则有$\neg\Box\beta_i\in\Gamma$,其中,$i=1,\dots,n$.因此,$\{\neg\Box\beta_1,\dots,\neg\Box\beta_n\}\subseteq\Gamma$.于是,$\{\neg\Box\beta_1,\dots,\neg\Box\beta_n,\neg\Box\psi\}\subseteq\Gamma$.既然$\{\neg\Box\beta_1,\dots,\neg\Box\beta_n,\neg\Box\psi\}$不协调,那么$\Gamma$也不协调,这与该定理的前提条件矛盾.

情形 1.2. $n=1$.

易知 $S^-(\Gamma)$仅仅包含一个$\neg\Box\alpha$这种形式的公式,也就是$\neg\Box\psi$,

因此,

$$\vdash\neg(\neg\Box\psi\wedge\neg\psi).$$

于是,

$$\begin{aligned}\vdash\neg(\neg\Box\psi\wedge\neg\psi)\quad &\text{iff}\quad \vdash\Box\psi\vee\psi\\ &\text{iff}\quad \vdash\Box(\Box\psi\vee\psi) && \text{(根据 N)}\\ &\text{iff}\quad \vdash\Box\psi\vee\Box\psi && \text{(根据 L7)}\\ &\text{iff}\quad \vdash\Box\psi\\ &\text{iff}\quad \vdash\neg(\neg\Box\psi)\end{aligned}$$

于是,$\{\neg\Box\psi\}$不协调.

因为$\neg\Box\psi\in S^-(\Gamma)$,根据 $S^-(\Gamma)$的定义可知,$\Box\neg\Box\psi\in\Gamma$.既然$\Box\neg\Box\psi\to\neg\Box\psi$且$\Box\neg\Box\psi\in\Gamma$,则有$\neg\Box\psi\in\Gamma$.因为$\neg\Box\psi\in\Gamma$,所以$\{\neg\Box\psi\}\subseteq\Gamma$.既然$\{\neg\Box\psi\}$不协调,那么$\Gamma$也不协调,这与该定理的前提条件矛盾.

- 情形 2. $S^-(\Gamma)=\varnothing$.

假定$\{\neg\psi\}$不协调,则有$\vdash\psi$.由推演规则 N,可以断定$\vdash\Box\psi$.

因为$\vdash\Box\psi$,则有$\Box\psi\in\Gamma$.

由$\Box\psi\in\Gamma$与$\neg\Box\psi\in\Gamma$,可知$\Gamma$不协调,这与该定理的前提条件矛盾.

2. 本文需要证明$\neg\psi\in\Gamma$,其证明过程是:

既然$\Gamma$是某个极大协调集合,由极大协调集的生成过程可知,应该证明:存在公式集合$\Gamma_{k+1}$,使得$\Gamma_{k+1}=\Gamma_k\cup\{\neg\psi\}$协调,其中,$\neg\Box\psi\in\Gamma_k$且$\Gamma_k$协调的.

假定$\Gamma_k\cup\{\neg\psi\}$不协调,这意味着存在某一有限子集$\{\neg\Box\beta_1,\ldots,\neg\Box\beta_n,\neg\Box\psi\}\subseteq\Gamma_k$,使得:

$$\vdash\neg(\neg\Box\beta_1\wedge\ldots\wedge\neg\Box\beta_n\wedge\neg\Box\psi\wedge\neg\psi),$$

其中,$n\geqslant 1$.

情形 2.1. $n\geqslant 2$.

$$\begin{aligned}
\vdash\neg(\neg\Box\beta_1\wedge\ldots\wedge\neg\Box\beta_n\wedge\neg\Box\psi\wedge\neg\psi)\quad &\text{iff}\quad \vdash\Box\beta_1\vee\ldots\vee\Box\beta_n\vee\Box\psi\vee\psi\\
&\text{iff}\quad \vdash\Box(\Box\beta_1\vee\ldots\vee\Box\beta_n\vee\Box\psi\vee\psi) && \text{(根据 N)}\\
&\text{iff}\quad \vdash\Box\beta_1\vee\ldots\vee\Box\beta_n\vee\Box\psi\vee\Box\psi && \text{(根据 L7)}\\
&\text{iff}\quad \vdash\neg(\neg\Box\beta_1\wedge\ldots\wedge\neg\Box\beta_n\wedge\neg\Box\psi)
\end{aligned}$$

于是,$\{\neg\Box\beta_1,\ldots,\neg\Box\beta_n,\neg\Box\psi\}$不协调.既然$\{\neg\Box\beta_1,\ldots,\neg\Box\beta_n,\neg\Box\psi\}\subseteq\Gamma_k$,那么$\Gamma_k$也不协调,这与前提假设矛盾.

情形 2.2. $n=1$.

除了$\neg\Box\psi$,$\Gamma_k$不再包含任意其他$\neg\Box\beta$形式的公式,于是:

$$\vdash\neg(\neg\Box\psi\wedge\neg\psi).$$

于是,

$$\begin{aligned}
\vdash\neg(\neg\Box\psi\wedge\neg\psi)\quad &\text{iff}\quad \vdash\Box\psi\vee\psi\\
&\text{iff}\quad \vdash\Box(\Box\psi\vee\psi) && \text{(根据 N)}\\
&\text{iff}\quad \vdash\Box\psi\vee\Box\psi && \text{(根据 L7)}\\
&\text{iff}\quad \vdash\Box\psi\\
&\text{iff}\quad \vdash\neg(\neg\Box\psi)
\end{aligned}$$

于是,$\{\neg\Box\psi\}$不协调,而$\{\neg\Box\psi\}\subseteq\Gamma_k$.因此$\Gamma_k$也不协调,这与前提假设矛盾. □

${}^{S51}\vee{}^{S52}$ 的典型模型 $M$ 与其他模型类似也是四元组$\langle W,R_1,R_2,I\rangle$,其中,$W$ 是由所有极大协调集构成的集合,也就是:$w\in W$ 当且仅当 $w$ 是一个极大协调集;如果 $w$ 与 $w'$都是 $W$ 的元素,那么 $wR_1w'$当且仅当 $S^{-}(w)\subseteq w'$;并且如果 $w$ 与 $w'$都是 $W$ 的元素,那么 $wR_2w'$当且仅当 $S(w)\subseteq w'$;对于任意命题变量 $p$,$I(p)\subseteq W$ 且对于任意 $w\in I(p)$,$p$ 在 $w$ 为真当且仅当 $p\in w$.对于其他公式,则有以下定理成立:

**定理 2.5**. 令 $M=\langle W,R_1,R_2,I\rangle$是 ${}^{S51}\vee{}^{S52}$ 的典型模型,则对于任意的公式$\varphi$,$M,w\vDash\varphi$当且仅当$\varphi\in w$.

证明:对公式的结构进行归纳证明,其证明过程如下所示:

- 情形 1. $\varphi:=p$:

由典型模型的构造可知,成立.

- 情形 2. $\varphi:=\neg\alpha$:

$$\begin{aligned}
M,w\vDash\neg\alpha\quad &\text{iff}\quad M,w\nvDash\alpha\\
&\text{iff}\quad \alpha\notin w\\
&\text{iff}\quad \neg\alpha\in w
\end{aligned}$$

- 情形 3. $\varphi:=\alpha\to\beta$:

$$\begin{aligned}
\alpha\to\beta\notin w\quad &\text{iff}\quad \neg(\alpha\to\beta)\in w\\
&\text{iff}\quad \alpha\in w \text{ 且}\neg\beta\in w\\
&\text{iff}\quad M,w\vDash\alpha\text{且 } M,w\vDash\neg\beta\\
&\text{iff}\quad M,w\nvDash(\alpha\to\beta)
\end{aligned}$$

- 情形 4. $\varphi:=\Box\psi$.

($\Rightarrow$)

情形 4.1. $M,w\vDash\Box\psi$.

$M,w\vDash\Box\psi$ iff 对于任意的可能世界 $w'\in W$,如果 $wR_1w'$,则 $M,w'\vDash\psi$,或

对于任意的可能世界 $w'\in W$,如果 $wR_2w'$,则 $M,w'\vDash\psi$

由归纳假设可知:对于任意的可能世界 $w'\in W$,如果 $wR_1w'$,则$\psi\in w'$;或对于任意的可能世界 $w'\in W$,如果

$wR_2w'$,则$\psi\in w'$.

假设$\square\psi\notin w$,则由定理2.4可知:$S^{-}(w)\cup\{\neg\psi\}$是协调的,且$\neg\psi\in w$.那么,我们可以把$S^{-}(w)\cup\{\neg\psi\}$扩充为极大协调集$w_1$.既然$S^{-}(w)\subseteq w_1$与$S(w)\subseteq w$,那么$wR_1w_1$且$wR_2w$且$\neg\psi\in w_1$且$\neg\psi\in w$.这与对于任意的可能世界$w'\in W$,如果$wR_1w'$则$\psi\in w'$矛盾;或与对于任意的可能世界$w'\in W$,如果$wR_2w'$则$\psi\in w'$矛盾.因此,$\square\psi\in w$.

情形4.2. $M,w\nvDash\square\psi$.

$M,w\nvDash\square\psi$ iff 存在可能世界$w_1\in W$,使得$wR_1w_1$且$M,w_1\nvDash\psi$,并且
存在可能世界$w_2\in W$,使得$wR_2w_1$且$M,w_2\nvDash\psi$.

由归纳假设可知:存在可能世界$w_1\in W$,使得$wR_1w_1$且$\psi\notin w_1$,并且存在可能世界$w_2\in W$,使得$wR_2w_2$且$\psi\notin w_2$.

假设$\square\psi\in w$,由$R_1$与$R_2$的定义可知:对于任意的可能世界$w'\in W$,如果$wR_1w'$,则$\psi\in w'$;或对于任意的可能世界$w'\in W$,如果$wR_2w'$,则$\psi\in w'$.这与存在可能世界$w_1\in W$,使得$wR_1w_1$且$\psi\notin w_1$,并且存在可能世界$w_2\in W$,使得$wR_2w_2$且$\psi\notin w_2$矛盾.因此,$\square\psi\notin w$.

($\Leftarrow$)

情形4.3. $\square\psi\in w$.

由$R_1$与$R_2$的定义可知:对于任意的可能世界$w'\in W$,如果$wR_1w'$,则$\psi\in w'$;或对于任意的可能世界$w'\in W$,如果$wR_2w'$,则$\psi\in w'$.由归纳假设可知:对于任意的可能世界$w'\in W$,如果$wR_1w'$,则$M,w'\vDash\psi$,或对于任意的可能世界$w'\in W$,如果$wR_2w'$,则$M,w'\vDash\psi$.于是,$M,w\vDash\square\psi$.

情形4.4. $\square\psi\notin w$.

既然$\square\psi\notin w$,则$S^{-}(w)\cup\{\neg\psi\}$是协调的,且$\neg\psi\in w$.于是,我们可以把$S^{-}(w)\cup\{\neg\psi\}$扩充为极大协调集$w_1$.既然$\neg\psi\in w_1$且$\neg\psi\in w$,由归纳假设可知,$M,w_1\nvDash\psi$且$M,w\nvDash\psi$.既然存在可能世界$w_1,w\in W$,使得$wR_1w_1$且$wR_2w$且$M,w_1\nvDash\psi$且$M,w_1\nvDash\psi$,于是,$M,w\nvDash\square\psi$. □

**定理2.6(完备性定理)**. 对于任意的公式集合$\Gamma$与公式$\varphi$,如果$\Gamma\vDash\varphi$,则$\Gamma\vdash\varphi$.

证明:假设$\Gamma\vdash\varphi$不成立,于是$\Gamma\cup\{\neg\varphi\}$协调.由定理2.2可知,我们可以把$\Gamma\cup\{\neg\varphi\}$扩展为极大协调集合$w'$.

令$M=\langle W,R_1,R_2,I\rangle$是其典型模型,其中,可能世界集合$W$是由所有的极大协调集构成.对于任意的可能世界$w_i,w_j\in W$($w_i$与$w_j$均是极大协调集),$w_iR_1w_j$当且仅当$S^{-}(w_i)\subseteq w_j$,或$w_iR_2w_j$当且仅当$S(w_i)\subseteq w_j$;对于任意命题变量$p$,$I(p)\subseteq W$且对于任意$w\in I(p)$,$p$在$w$为真当且仅当$p\in w$.

于是,由定理2.5可知:对于任意公式$\psi\in\Gamma\cup\{\neg\varphi\}$,$M,w'\vDash\psi$当且仅当$\psi\in w'$.因此,$M,w'\vDash\Gamma$且$M,w'\vDash\neg\varphi$.这与$\Gamma\vDash\varphi$矛盾,因此,$\Gamma\vdash\varphi$. □

在完备性定理证明过程中,我们需要构造出$^{S51}\vee^{S52}$的典型模型,并在$W$上构建出两个等价关系.这与S5的典型模型不同.至此,我们已经证明了$^{S51}\vee^{S52}$的完备性定理.

## 3 结 论

本文提出了具有模态词$\square\varphi=\square_1\varphi\vee\square_2\varphi$的模态逻辑,我们给出其语言、语法与语义,其公理化系统记为$^{S51}\vee^{S52}$,该公理化系统是可靠且完备的.$^{S51}\vee^{S52}$有与S5类似的语言,但具有不同的语法与语义.如果$\square_1$的可达关系等于$\square_2$的可达关系,那么$^{S51}\vee^{S52}$变为S5.$^{S51}\vee^{S52}$可以看做是一种由两个模态词通过析取方式共同作用而形成的一种模态逻辑.

我们下一步的工作是:在模态谓词逻辑中扩展$^{S51}\vee^{\neg S52}$,并证明其可靠性与完备性;利用本文的公理化系统形式化粗糙集理论并讨论相关性质.

**致谢** 在此,我们向对本文的工作给予支持和建议的同行表示感谢.

**References**:

[1] Hughes GE, Cresswell MJ. A New Introduction to Modal Logic. Burns & Oates, 1996.

[2] Proietti C. Intuitionistic epistemic logic, kripke models and fitch's paradox. Journal of Philosophical Logic, 2012,41(5):877−900. [doi: 10.1007/s10992-011-9207-1]

[3] Carnielli WA, Pizzi C, Bueno-Soler J. Modalities and Multimodalities. Vol.12., Springer-Verlag, 2008. [doi: 10.1007/978-1-4020-8590-1]

[4] Corsi G, Orlandelli E. Free quantified epistemic logics. Studia Logica, 2013,101(6):1159−1183. [doi: 10.1007/s11225-013-9528-x]

[5] Blanco R, de Miguel Casado G, Requeno JI, Colom JM. Temporal logics for phylogenetic analysis via model checking. In: Proc. of the 2010 IEEE Int'l Conf. on Bioinformatics and Biomedicine Workshops (BIBMW). IEEE, 2010. 152−157. [doi: 10.1109/TCBB.2013.87]

[6] Van Benthem J, Minică S. Toward a dynamic logic of questions. Journal of Philosophical Logic, 2012,41:633−669. [doi: 10.1007/s10992-012-9233-7]

[7] Sietsma F, van Eijck J. Action emulation between canonical models. Journal of Philosophical Logic, 2013,42:905−925. [doi: 10.1007/s10992-013-9298-y]

[8] Lu ZW. Logic in Computer Science. 2nd ed., Beijing: Science Press, 2002 (in Chinese).

[9] Ebbinghaus HD, Flum J, Thomas W. Mathematical Logic. Springer-Verlag, 1994. [doi: 10.1007/978-1-4757-2355-7]

[10] Sun MY, Deng SB, Chen B, Cao CG, Sui YF. Formula-Layered predicate modal logic. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2014,25(5):1014−1024 (in Chinese with English abstract). http://www.jos.org.cn/1000-9825/4500.htm [doi: 10.13328/j.cnki.jos.004500]

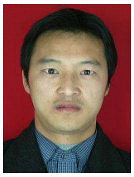
[11] Shen YM, Ma Y, Cao CG, Sui YF, Wang J. Faithful and full translations between logics. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2013,24(7):1626−1637 (in Chinese with English abstract). http://www.jos.org.cn/1000-9825/4285.htm [doi: 10.3724/SP.J.1001.2013.04285]

**附中文参考文献**:

[8] 陆钟万,面向计算机科学的数理逻辑.第 2 版,北京:科学出版社,2002.

[10] 孙梅莹,邓少波,陈博,曹存根,眭跃飞.公式分层的谓词模态逻辑.软件学报,2014,25(5):1014−1024. http://www.jos.org.cn/1000-9825/4500.htm [doi: 10.13328/j.cnki.jos.004500]

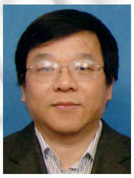
[11] 申宇铭,马越,曹存根,眭跃飞,王驹.逻辑之间的语义忠实语义满翻译.软件学报,2013,24(7):1626−1637. http://www.jos.org.cn/1000-9825/4285.htm [doi: 10.3724/SP.J.1001.2013.04285]



**邓少波**(1980－),男,江西临川人,博士,副教授,主要研究领域为模态逻辑.

**曹存根**(1964－),男,博士,研究员,博士生导师,CCF 高级会员,主要研究领域为大规模知识处理与表示.

**黎敏**(1975－),男,博士,副教授,主要研究领域为 Rough 集及其推理.



**眭跃飞**(1963－),男,博士,研究员,博士生导师, CCF 高级会员,主要研究领域为数理逻辑,模态逻辑.