

基于向量空间的多子网复合复杂网络模型动态组网运算的形式描述^{*}

隋毅, 邵峰晶, 孙仁诚, 李淑静, 吴舜尧

(青岛大学 信息工程学院, 山东 青岛 266071)

通讯作者: 邵峰晶, E-mail: sfj@qdu.edu.cn

摘要: 针对典型复杂网络模型仅描述了复杂系统中同一类个体及其间一种相互关系且对问题的讨论仅局限于同一个系统的问题, 基于能够描述复杂系统中异类个体间多种关系的多子网复合复杂网络模型, 导入多维向量空间, 将网络节点间的关系映射为多维向量, 定义了向量复合网. 在此基础上, 将该模型的动态组网运算(加载与退缩)转化为向量空间的基变换, 给出了加载运算与退缩运算的形式描述, 实现了多子网复合复杂网络的可计算. 建立并分析了我国铁路客运复合网, 通过网络动态重组运算, 基于高速铁路子网与低速铁路子网的拓扑性质, 给出了我国铁路发展现状分析.

关键词: 复杂网络; 多子网复合复杂网络模型; 子网加载运算; 子网退缩运算; 向量复合网

中图法分类号: TP393

中文引用格式: 隋毅, 邵峰晶, 孙仁诚, 李淑静, 吴舜尧. 基于向量空间的多子网复合复杂网络模型动态组网运算的形式描述. 软件学报, 2015, 26(8): 2007–2019. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/4697.htm>

英文引用格式: Sui Y, Shao FJ, Sun RC, Li SJ, Wu SY. Formalized descriptions of dynamic reorganizations of multi-subnet composited complex network based on vector space. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2015, 26(8): 2007–2019 (in Chinese). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/4697.htm>

Formalized Descriptions of Dynamic Reorganizations of Multi-Subnet Composited Complex Network Based on Vector Space

SUI Yi, SHAO Feng-Jing, SUN Ren-Cheng, LI Shu-Jing, WU Shun-Yao

(College of Information Engineering, Qingdao University, Qingdao 266071, China)

Abstract: Classical complex networks mainly describe same type of entities and one type of interrelations between the entities. Multi-subnet composited network is a model that describes different types of entities and multiple types of interrelations between the entities. Dynamic reorganization of this model provide two operations: Compounding (combine two subnets into a 'bigger' one) and reducing (obtain a 'small' network from a 'big' one). In this paper, a vector-composited network is defined by importing multi-dimensional space, which converts the interrelations between entities into multi-dimensional vector. Dynamic reorganization of networks is converted into base transformations in multi-dimensional space. Formalized descriptions of compounding and reducing are presented. Further, vector-composited network of passenger transport with high speed and low speed railways in mainland China is established by empirical data. Topological analysis of networks obtained by dynamic reorganizations illustrates the development of railway system in mainland China.

Key words: complex network; multi-subnet composited complex network model; subnet compounding; subnet reducing; vector-composited network

复杂系统通常由大量的个体组成, 个体间存在多种关系. 通过关系, 个体间相互作用, 且随着内外在因素动态演化^[1,2]. 作为面向复杂系统建模的有效工具, 复杂网络将个体抽象为节点, 将个体间的关系抽象为连边, 已被

* 基金项目: 国家自然科学基金(91130035, 41476101); 山东省自然科学基金(ZR2012FZ00, ZR2012FQ017); 青岛市科技发展计划(13-1-4-121-jch)

收稿时间: 2012-06-11; 修改时间: 2013-09-02; 定稿时间: 2014-07-07

广泛应用于各种实际问题的研究^[3].典型复杂网络模型,如规则网、随机网^[4]、小世界网^[5]、无标度网^[6]等,是对复杂系统中同类个体及其之间关系的描述,且对问题的探讨仅局限于同一个系统.

能够描述两类不同节点(“参与者”与“项目”)及其间关系的二分图模型^[7-11]被用于复杂系统建模,将一类节点向另一类节点投影,可得到“参与者”间的合作关系网与具有相同参与者的项目关系网.文献[12-14]基于二分图投影研究了网络链接预测问题.然而,二分图模型只描述了两类不同节点间的关系,存在局限性.

层次网络^[15,16]是对复杂系统中多类个体及其之间关系的描述,层是同类性质的个体及其间单一关系构成的网络,异类性质个体间的关系由不同层节点间的连边表示.多个层可视为多个复杂系统,也可视为复杂系统的多个局部.类似地,同样是描述多类个体及其间多种关系的网络模型,如相互依赖的网络(interdependent networks)^[17]、相互作用的网络(interacting networks)^[18]和相互连接的网络(interconnecting networks)^[19]等被提出来.目前,对这些网络模型的研究主要集中于网络实证及拓扑性质分析^[20-22]、网络动力学(信息传播^[23-25]、合作^[26]等)方面.上述模型的共同点是,多个层(或网络)的节点往往是一一对应的.这是因为一个层(或网络)只表达节点间的一种关系,也就是说,对一种含有 N 个节点、节点间平均关系数为 M 的情况,则需增加冗余的 $M \times N$ 个节点和 $M \times N$ 条边,增长的网络规模会加大网络性质分析的时间与空间复杂性.

另一方面,当处理涉及多类性质个体及其之间多种复杂关系的问题时,通常需要对已建立的网络模型进行动态分析.比如,当给定的对象仅涉及网络局部时,该大网络可被退缩成一个局部小网络(小网络是对给定个体及其之间关系的描述);当若干个小网络的性质需要继承到一个大网络中讨论时,则需要将小网络根据给定的关系进行复合,构成一个大的新网络,并且构成的新网络可以根据需求与其他网络再次进行复合.也就是说,根据给定的对象问题对复杂网络进行动态重组,能够为复杂网络拓扑与其上的动力学行为的分析提供一种新颖的思路.

基于此,我们在前期研究中通过导入节点间的关系,提出了一个泛化的复杂网络模型——多子网复合复杂网络模型(简称复合网)^[27,28].事实上,典型复杂网络是复合网的特例.基于复合网模型,给出了网络加载(两个复杂网络的复合)与网络退缩(从一个复杂网络中获取网络局部)运算,实现了复杂网络的动态重组.

本文基于多子网复合复杂网络模型,导入多维向量空间,将网络节点间的关系映射为多维向量,定义了向量复合网;在此基础上,将该模型的组网运算(加载与退缩)转化为向量空间的基变换,建立了基于向量空间的多子网复合复杂网络模型组网运算的形式描述,实现了复合网的可计算.建立并分析了我国铁路客运复合网,通过网络动态重组运算,基于高速铁路子网与低速铁路子网的拓补性质给出了我国铁路发展现状分析.

1 复合网与子网

定义 1(复合网). 多子网复合复杂网络(简称复合网)是一个四元组 $G=(V,E,R,F)$,其中,

- (1) $V=\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, 表示节点的集合, $m=|V|$ 是集合 V 的阶;
- (2) $E=\{\langle v_h, v_l \rangle | v_h, v_l \in V, 1 \leq h, l \leq m\} \subseteq V \times V$, 表示节点间连边的集合;
- (3) $R=R_1 \times \dots \times R_i \times \dots \times R_n = \{(r_1, \dots, r_i, \dots, r_n) | r_i \in R_i, 1 \leq i \leq n\}$, R_i 是节点间第 i 种关系的集合, n 是节点间关系的总数;
- (4) 映射 $F: E \rightarrow R$.

当 $n=1$ 时,复合网即是典型复杂网络模型,只描述了节点间一种相互关系.当 $n>1$ 时,表明节点间具有多种关系,比如以城市为节点,城市间可具有交通关系、经济合作关系等,对应情形(3)中的 R_i ;而交通关系又包含铁路、公路或航空等关系,它们可分别视为情形(3)中的 r_i .本文将不同种关系的集合 $R_1, \dots, R_i, \dots, R_n$ 做笛卡尔积,记为 R ,节点间的关系由 n 元组表示,称 R 为复合网的关系集合. F 是使复合网中任意一条边与集合 R 中的唯一一个 n 元组相对应的映射.当讨论复合网时,映射 F 是给定的.当 $r_i = \emptyset$ 时,表示节点间无关系 R_i .

复合网节点间的连边 $\langle v_h, v_l \rangle$ 可以是有序偶或无序偶:有序偶表明边有方向,无序偶表示边无方向.限于篇幅,本文仅讨论边是无序偶的情况.

在研究复杂系统时,通常需要提取复杂系统中某些关系进行分析,由此给出复合网的子网定义.

定义 2(子网). 设复合网 $G=(V,E,R,F)$, 将 $G'=(V',E',R',F')$ 称为 G 关于关系集合 $R'(R' \subseteq R)$ 的子网, 当且仅当满足以下条件:

- (1) $V' \subseteq V$;
- (2) $E' = \{ \langle v_h, v_l \rangle | F(\langle v_h, v_l \rangle) \in R', \langle v_h, v_l \rangle \in E, v_h, v_l \in V', 1 \leq h, l \leq m \}$;
- (3) $F': E' \rightarrow R', \forall \langle v'_h, v'_l \rangle \in V', \text{有 } F'(\langle v'_h, v'_l \rangle) = F(\langle v'_h, v'_l \rangle)$.

定义 2(2)指出: 如果 $\langle v_h, v_l \rangle$ 在映射 F 下的象(也即节点 v_h, v_l 间关系的 n 元组表示)属于集合 R' , 则 $\langle v_h, v_l \rangle$ 是子网 G' 的边, 这些边两端所关联的节点是子网 G' 的节点. 定义 2(3)为构造新的映射 F' . 若 $R'=R$, 则子网 G' 是复合网 G 本身; 令 $R'=\emptyset$, 子网 G' 不存在.

图 1(a)是复合网 $G=(V,E,R,F)$ 的示意图, 其中, $R=R_1 \times R_2 \times R_3 \times R_4, R_1=\{r_1\}, R_2=\{r_2\}, R_3=\{r_3\}, R_4=\{r_4\}$, 边上的标注表示该边在映射 F 下的象, 即, 两端所关联的节点间存在的关系. 图 1(b)为 G 关于关系集合 $R'=\{(r_1, \emptyset, \emptyset, \emptyset), (\emptyset, r_2, \emptyset, \emptyset), (\emptyset, \emptyset, r_3, \emptyset), (r_1, r_2, \emptyset, \emptyset)\}$ 一个子网 $G'=(V',E',R',F')$.

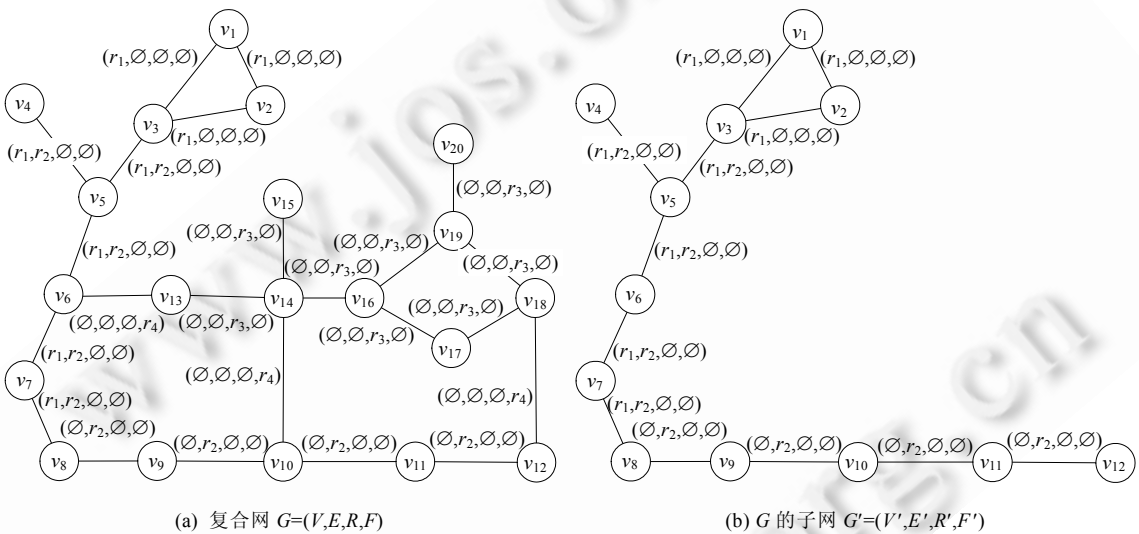


Fig.1 Illustrations of multi-subnet composed complex network and subnet

图 1 复合网与子网的示例

2 向量复合网

定义 3(关系的强度). 设复合网 $G=(V,E,R,F)$, 其中, $R=R_1 \times \dots \times R_i \times \dots \times R_n = \{ (r_1, \dots, r_i, \dots, r_n) | r_i \in R_i, 1 \leq i \leq n \}$, 记 $dom(r_i)$ 为关系 r_i 取值的集合, 称 $dom(r_i)$ 中元素为节点间关系的强度.

关系强度可根据需求设置为数值型、字符型或字符串型等. 令 $dom(r_i)$ 包含两种特殊的取值: 一个称为零强度, 记为 θ , 当节点间相互关系的强度为 θ 时, 表示节点间不存在该关系; 另一个称为无穷大强度, 记为 ∞ , 当节点间关系的强度为 ∞ 时, 表示这两个节点关于该关系的取值为无穷大, 可将二者关于该关系视为同一个节点. 本文中, 令关系强度为数值型.

给出关系强度的定义后, 通过将复杂系统中个体间的关系映射为向量空间的多维向量, 给出关系强度向量空间的定义.

定义 4(关系强度向量空间). 设 $G=(V,E,R,F)$ 为复合网, 关系集合 $R=R_1 \times \dots \times R_i \times \dots \times R_n = \{ (r_1, \dots, r_i, \dots, r_n) | r_i \in R_i, 1 \leq i \leq n \}$, 令 $dom(r_i) \subseteq \mathbb{R}$, 令关系 r_i 的零强度为 $\theta=0$, 则

$$S = dom(r_1) \times \dots \times dom(r_i) \times \dots \times dom(r_n) \tag{1}$$

为 n 元有序实数组的全体所构成的集合.

显然, S 是实数域 \mathbb{R} 上的向量空间.将 S 称为复合网 G 的关系强度向量空间:

$$S = \{s = (s(r_1), \dots, s(r_i), \dots, s(r_n)) \mid s(r_i) \in \text{dom}(r_i), 1 \leq i \leq n\} \quad (2)$$

称 s 为关系强度向量,记 $s(r_i)$ 为关系强度向量 s 的第 i 个分量,表示关系 r_i 的强度.

定义 5(关系强度向量空间的基). 设 $G=(V,E,R,F)$ 为复合网,其中, $R=R_1 \times \dots \times R_i \times \dots \times R_n = \{(r_1, \dots, r_i, \dots, r_n) \mid r_i \in R_i, 1 \leq i \leq n\}$, S 为 G 的关系强度向量空间,令向量组

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1) \quad (3)$$

为 S 的一个基, e_i 为 n 维关系强度向量,且只有第 i 个分量 $e_i(r_i) = 1$,其他分量为 θ ,表示只具有关系 r_i .

对 $\forall s \in S$,则有:

$$s = s(r_1)e_1 + s(r_2)e_2 + \dots + s(r_n)e_n \quad (4)$$

即,关系强度向量空间 S 中的任意一个向量 s 都可以由基表示, $(s(r_1), \dots, s(r_i), \dots, s(r_n))$ 称为 s 在该基下的坐标.关系强度向量空间 S 的维数为 n .

定义 6(向量复合网). 设 $G=(V,E,R,F)$ 为复合网, S 为 G 的 n 维关系强度向量空间,存在映射 $M:E \rightarrow S$,使得对 $\forall \langle v_h, v_l \rangle \in E, v_h, v_l \in V, 1 \leq h, l \leq m$,有:

$$M(\langle v_h, v_l \rangle) = s^{(v_h, v_l)} = (s^{(v_h, v_l)}(r_1), \dots, s^{(v_h, v_l)}(r_i), \dots, s^{(v_h, v_l)}(r_n)) \in S, 1 \leq i \leq n \quad (5)$$

则称三元组 $\Sigma=(G,S,M)$ 为复合网 G 的向量复合网.其中, $s^{(v_h, v_l)}(r_i)$ 表示边 $\langle v_h, v_l \rangle$ 上关系 r_i 的强度:

- 当 $s^{(v_h, v_l)}(r_i) = \theta$ 时,表示节点 v_h, v_l 间无关系 R_i ;
- 当 $s^{(v_h, v_l)}(r_i) = \infty$ 时,表示可视为节点 v_h, v_l 关于关系 r_i 为同一个节点.

也就是说,给定一个复合网与该复合网的关系强度向量空间以及映射 M ,则可唯一地确定该复合网的向量复合网.

图 2 是如图 1(b)所示的复合网的向量复合网 $\Sigma_1=(G',S,M)$,令 $\text{dom}(r_1)=\text{dom}(r_2)=\{\theta, 1, 2, \infty\}$ 表示关系 r_1, r_2 强度的集合,则关系强度向量空间 $S=\text{dom}(r_1) \times \text{dom}(r_2) = \{s=(s(r_1), s(r_2)) \mid s(r_1) \in \text{dom}(r_1), s(r_2) \in \text{dom}(r_2)\}$.图中边上的标注表示边在映射 M 下所对应的关系向量空间 S 中的二维关系强度向量.

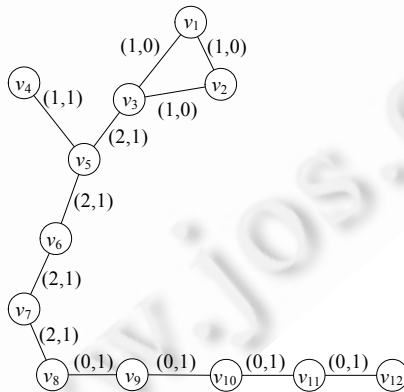


Fig.2 Vector-composited network $\Sigma_1=(G',S,M)$

图 2 向量复合网 $\Sigma_1=(G',S,M)$

下一节将导入向量复合网,将组网运算转换为向量空间上的相关运算,在向量空间上实现组网运算的形式描述.

3 组网运算

3.1 子网加载

子网加载运算的提出,是考虑到在一些情况下需要将若干个复杂网络的性质继承到一个大复杂网络中,或

者说是需要将若干个复杂网络组成新的复杂网络.两个复合网进行加载运算时,需给出不同复合网节点间的关系,以及建立关系的节点.

定义 7(加载映射四元组). 设向量复合网 $\Sigma_1=(G_1,S_1,M_1),\Sigma_2=(G_2,S_2,M_2)$,其中, $G_1=(V_1,E_1,R_1,F_1),G_2=(V_2,E_2,R_2,F_2),R'$ 为关系集合, $r' \in R'$,记 (Ξ, Ψ, Z, R') 为 Σ_1 与 Σ_2 关于 R' 的加载映射四元组,其中,

$$\Xi: V'_1 \rightarrow V'_2, V'_1 \subseteq V_1, V'_2 \subseteq V_2 \tag{6}$$

$$\Psi: \{(v, \Xi(v)) \mid v \in V'_1, \Xi(v) \in V'_2\} \rightarrow \{r'\} \tag{7}$$

$$Z: \{(v, \Xi(v)) \mid v \in V'_1, \Xi(v) \in V'_2\} \rightarrow \text{dom}(r') \tag{8}$$

复合映射表明了两个子网的哪些节点间将建立一种新的关系以及新关系的强度.称 $(v, \Xi(v))$ 为网际边, $v, \Xi(v)$ 为网际节点, r' 称为加载关系.当 $Z((v, \Xi(v))) = \infty$ 时,表示节点 $v, \Xi(v)$ 关于关系 r' 可视为一个节点.

上一节中导入了多维向量空间,将节点间的相互关系转化为向量空间中的多维向量,定义了关系强度向量空间,给出了关系强度向量空间的基,基是一组线性无关的多维向量.在将多个复合网构成一个新复合网时,需要构造新复合网的关系强度向量空间及其基.

定义 8(子网加载运算下关系强度向量空间的基变换). 设向量复合网 $\Sigma_1=(G_1,S_1,M_1),\Sigma_2=(G_2,S_2,M_2),S_1$ 的基为 $e_{11}, \dots, e_{1i}, \dots, e_{1n_1}, \dots, e_{1n_1}$ ($1 \leq i \leq n_1$), S_2 的基为 $e_{21}, \dots, e_{2j}, \dots, e_{2n_2}$ ($1 \leq j \leq n_2$), 给定加载映射四元组 $(\Xi, \Psi, Z, R'), r' \in R'$,对 Σ_1 与 Σ_2 进行加载运算,新复合网的关系强度向量空间 S 的基 $e_1, \dots, e_i, \dots, e_n$ 将通过如下方式得到:

- (1) 若两个复合网的关系强度向量空间的基相同($e_{11} = e_{21}, \dots, e_{1n_1} = e_{2n_2}$),且 $r' \in \bigcup_{i,j} R_i \cup R_j$ (其中, R_i 是 G_1 网

络中节点间的第 i 种关系; R_j 是 G_2 网络中节点间的第 j 种关系,即,网际节点间建立的关系包含于复合网的关系集合中),则

$$e_i = e_{1i} = e_{2i}, n = n_1 = n_2 \tag{9}$$

记该变换为 I 型变换.

- (2) 两个复合网的关系强度向量空间的基相同($e_{11} = e_{21}, \dots, e_{1n_1} = e_{2n_2}$),但 $r' \notin \bigcup_{i,j} R_i \cup R_j$,则

$$e_1 = e_{11} \times [E; \mathbf{0}], \dots, e_{n_1} = e_{1n_1} \times [E; \mathbf{0}], e_{n_1+1} = [\mathbf{0}; E] \tag{10}$$

记该变换为 II 型变换.

- (3) 两个复合网的关系强度向量空间的基不同,且 $r' \in \bigcup_{i,j} R_i \cup R_j$,则

$$e_1 = e_{11} \times [E; \mathbf{0}], \dots, e_{n_1} = e_{1n_1} \times [E; \mathbf{0}], \dots, e_{n_1+j'} = e_{2j} \times [\mathbf{0}; E], \dots \tag{11}$$

其中, $e_{2j} \notin \{e_{1i} \mid i=1, \dots, n_1\}, 1 \leq j' \leq n-n_1, 1 \leq j \leq n_2$.记该变换为 III 型变换.

- (4) 两个复合网的关系强度向量空间的基不同,但 $r' \notin \bigcup_{i,j} R_i \cup R_j$,则

$$e_1 = e_{11} \times [E; \mathbf{0}], \dots, e_{n_1} = e_{1n_1} \times [E; \mathbf{0}], e_{n_1+1} = [\mathbf{0}; E; \mathbf{0}], e_{n_1+j'} = e_{2j} \times [\mathbf{0}; E], \dots \tag{12}$$

其中, $e_{2j} \notin \{e_{1i} \mid i=1, \dots, n_1\}, 1 \leq j' \leq n-n_1-1, 1 \leq j \leq n_2$.记该变换为 IV 型变换.

定义 9(子网加载运算). 设向量复合网 $\Sigma_1=(G_1,S_1,M_1),\Sigma_2=(G_2,S_2,M_2)$,将 Σ_1 与 Σ_2 进行加载运算是指存在一个复合映射四元组 (Ξ, Ψ, Z, R') ,可以产生一个新的向量复合网 $\Sigma=(G,S,M)$.子网加载运算以伪码形式给出.

算法 1. 向量复合网的加载运算.

输入:

- 向量复合网 $\Sigma_1=(G_1,S_1,M_1),\Sigma_2=(G_2,S_2,M_2)$,其中,
 - $G_1=(V_1,E_1,R_1,F_1),G_2=(V_2,E_2,R_2,F_2)$;
 - $R_1 = R_{11} \times \dots \times R_{1i} \times \dots \times R_{1n_1} = \{(r_{11}, \dots, r_{1i}, \dots, r_{1n_1}) \mid r_{1i} \in R_{1i}, 1 \leq i \leq n_1\}$;
 - $R_2 = R_{21} \times \dots \times R_{2j} \times \dots \times R_{2n_2} = \{(r_{21}, \dots, r_{2j}, \dots, r_{2n_2}) \mid r_{2j} \in R_{2j}, 1 \leq j \leq n_2\}$.
- 加载关系集合 $R', r' \in R'$.
- 加载映射四元组 (Ξ, Ψ, Z, R') .

输出: $G=(V,E,R,F),\Sigma=(G,S,M)$.

步骤:

1. $V=V_1 \cup V_2, E=E_1 \cup E_2 \cup D_{\psi}, D_{\psi}$ 是映射 Ψ 的定义域.
2. $R=\{(r_1, \dots, r_k, \dots, r_n) | r_k \in \{R_{1i} \cup R_{2j} | 1 \leq i \leq n_1, 1 \leq j \leq n_2\} \cup \{r'\}\}$.
3. 使用定义 8 对 S_1 与 S_2 做基变换, 得到 S 的基 $e_1, \dots, e_k, \dots, e_n$.
4. 构造映射 F :
 - 若 S 由 I 型变换得到, 则 $F(\langle v_h, v_l \rangle) = F_1(\langle v_h, v_l \rangle)$.
 - 若 S 由 II 型变换得到, 则
 - ① 当 $\langle v_h, v_l \rangle \in E_1$ 时, $F(\langle v_h, v_l \rangle) = (F_1(\langle v_h, v_l \rangle), \emptyset)$;
 - ② 当 $\langle v_h, v_l \rangle \in E_2$ 时, $F(\langle v_h, v_l \rangle) = (F_2(\langle v_h, v_l \rangle), \emptyset)$;
 - ③ 当 $\langle v_h, v_l \rangle \in D_{\psi}$ 时, $F(\langle v_h, v_l \rangle) = (\emptyset, \dots, \emptyset, r')$.
 - 若 S 由 III 型变换得到, 则
 - ① 当 $\langle v_h, v_l \rangle \in E_1$ 时, $F(\langle v_h, v_l \rangle) = (F_1(\langle v_h, v_l \rangle), \emptyset, \dots, \emptyset)$;
 - ② 当 $\langle v_h, v_l \rangle \in E_2$ 时, 对 $F_2(\langle v_h, v_l \rangle)$ 中的每个元素, 搜索其在 $(r_1, \dots, r_k, \dots, r_n)$ 中的位置, 在搜索到的位置上填入该元素, 在其他位置填 \emptyset ;
 - ③ 当 $\langle v_h, v_l \rangle \in D_{\psi}$ 时, 搜索 r' 在 $(r_1, \dots, r_k, \dots, r_n)$ 中的位置, 将 r' 填入该位置, 其他位置填入 \emptyset .
 - 若 S 由 IV 型变换得到, 则
 - ① 当 $\langle v_h, v_l \rangle \in E_1$ 时, $F(\langle v_h, v_l \rangle) = (F_1(\langle v_h, v_l \rangle), \emptyset, \dots, \emptyset)$;
 - ② 当 $\langle v_h, v_l \rangle \in E_2$ 时, 对 $F_2(\langle v_h, v_l \rangle)$ 中的每个元素, 搜索其在 $(r_1, \dots, r_k, \dots, r_n)$ 中的位置, 在搜索到的位置上填入该元素, 在其他位置填 \emptyset ;
 - ③ 当 $\langle v_h, v_l \rangle \in D_{\psi}$ 时, $F(\langle v_h, v_l \rangle) = (\emptyset, \dots, r', \dots, \emptyset)$.

其中, $v_h, v_l \in V, 1 \leq h, l \leq |V|$.

5. 构造映射 $M: M(\langle v_h, v_l \rangle) = \mathbf{s}^{(v_h, v_l)} = (\mathbf{s}^{(v_h, v_l)}(r_1), \dots, \mathbf{s}^{(v_h, v_l)}(r_k), \dots, \mathbf{s}^{(v_h, v_l)}(r_n))$:
 - ① 当 $r_k \in R_{1i}$ 时, $\mathbf{s}^{(v_h, v_l)}(r_k) = \mathbf{s}_1^{(v_h, v_l)}(r_k), \mathbf{s}^{(v_h, v_l)}(r_{k'}) = 0, \mathbf{s}_1^{(v_h, v_l)} \in S_1$;
 - ② 当 $r_k \in R_{2j}$ 时, $\mathbf{s}^{(v_h, v_l)}(r_k) = \mathbf{s}_2^{(v_h, v_l)}(r_k), \mathbf{s}^{(v_h, v_l)}(r_{k'}) = 0, \mathbf{s}_2^{(v_h, v_l)} \in S_2$;
 - ③ 当 $r_k = r'$ 时, $\mathbf{s}^{(v_h, v_l)}(r_k) = Z(\langle v_h, v_l \rangle), \mathbf{s}^{(v_h, v_l)}(r_{k'}) = 0$.

其中, $k \neq k', 1 \leq k, k' \leq n$.

考虑到关系向量空间维数对基变换的影响, 在实际操作中, 可令:

- 维数大的关系向量空间的基为 $e_{11}, \dots, e_{1i}, \dots, e_{1n_1} (1 \leq i \leq n_1)$;
- 维数小的关系向量空间的基为 $e_{21}, \dots, e_{2j}, \dots, e_{2n_2} (1 \leq j \leq n_2)$.

如图 3 所示为一个向量复合网 $\Sigma_2 = (G_2, S_2, M_2)$, 其中, $G_2 = (V_2, E_2, R_2, F_2), R_2 = \{r_3\}, \text{dom}(r_3) = \{\theta, 1, \infty\}$, 边上的标识表示该边所对应的关系强度向量. 给出关系 $r_4 (\text{dom}(r_4) = \{\theta, 1, \infty\})$, 加载映射四元组 $(\Xi, \Psi, Z, \{r_4\})$, 其中,

- $\Xi = \{\langle v_6, v_{13} \rangle, \langle v_{10}, v_{14} \rangle, \langle v_{12}, v_{19} \rangle\}$;
- $\Psi = \{(\langle v_6, v_{13} \rangle, r_4), (\langle v_{10}, v_{14} \rangle, r_4), (\langle v_{12}, v_{19} \rangle, r_4)\}$;
- $Z = \{(\langle v_6, v_{13} \rangle, \infty), (\langle v_{10}, v_{14} \rangle, 1), (\langle v_{12}, v_{19} \rangle, 1)\}$.

将 $\Sigma_2 = (G_2, S_2, M_2)$ 与 Σ_1 复合, 得到新的向量复合网 Σ , 如图 4 所示, 新向量复合网的关系强度向量空间维数为 4.

图 4 中, 虚线的边表示节点 v_6, v_{13} 关于关系 r_4 可为同一个节点.

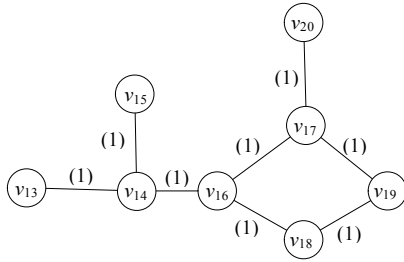


Fig.3 Vector-Composited network

$$\Sigma_2=(G_2,S_2,M_2)$$

图3 向量复合网 $\Sigma_2=(G_2,S_2,M_2)$

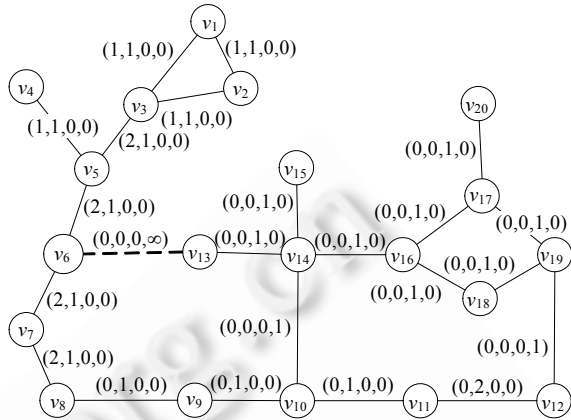


Fig.4 A new vector-composited network

$$\Sigma \text{ compounded by } \Sigma_1 \text{ and } \Sigma_2$$

图4 复合 Σ_1 与 Σ_2 得到的新向量复合网 Σ

3.2 子网退缩

复合网退缩运算的提出,是考虑到在一些情况下,人们关心的问题往往只涉及复杂系统的局部,或者说需要将一个或几个复杂网络从一个较大的复杂网络中分离出来.基于向量复合网,子网退缩运算同样可转化为关系向量空间上的基变换.

定义 10(子网退缩运算下关系强度向量空间的基变换). 设向量复合网 $\Sigma=(G,S,M)$, S 的基为 $e_1, \dots, e_i, \dots, e_n$ ($1 \leq i \leq n$), $\exists \{e'_1, \dots, e'_i, \dots, e'_{n'}\} \subset \{e_1, \dots, e_i, \dots, e_n\}$, 称由 $e'_1, \dots, e'_i, \dots, e'_{n'}$ ($1 \leq i \leq n', n' < n$) 作为基构成的关系强度向量空间 S' 为 S 的子空间.

可见, S' 的维数 $dim(S') < dim(S)$.也就是说,关系强度向量空间 S' 是 S 的子空间, S' 的维数小于 S 的维数.

定义 11(退缩运算). 设向量复合网 $\Sigma=(G,S,M)$,其中, $G=(V,E,R,F)$,关系集合 $R' \subset R$,对 Σ 退缩子网,是指获取 G 关于 R' 的子网 $\Sigma'=(G',S',M')$,其中, $G'=(V',E',R',F')$.称 R' 为退缩关系.子网退缩运算以伪码形式给出.

算法 2. 向量复合网的退缩运算.

输入:向量复合网 $\Sigma=(G,S,M)$,其中, $G=(V,E,R,F)$,关系集合 $R' \subset R$.

输出: G 关于 R' 的子网 $\Sigma'=(G',S',M')$,其中, $G'=(V',E',R',F')$.

步骤:

1. $E' = \{\langle v_h, v_l \rangle | F(\langle v_h, v_l \rangle) \in R', \langle v_h, v_l \rangle \in E\}, 1 \leq h, l \leq |V|$.
2. 将 E' 中的节点添加至 V' 中.
3. 构造映射 $F': E' \rightarrow R'$,使得 $F'(\langle v_h, v_l \rangle) = F(\langle v_h, v_l \rangle)$.
4. 构造映射 $M': E' \rightarrow S', M'(\langle v_h, v_l \rangle) = M(\langle v_h, v_l \rangle)$.
5. S' 的基是一组向量的集合,初始为空.构造关系向量空间 S' 的基:

对 E' 中的每条边 $\langle v_h, v_l \rangle$:

$$M(\langle v_h, v_l \rangle) = \mathbf{s}^{\langle v_h, v_l \rangle} = (\mathbf{s}^{\langle v_h, v_l \rangle}(r_1), \dots, \mathbf{s}^{\langle v_h, v_l \rangle}(r_i), \dots, \mathbf{s}^{\langle v_h, v_l \rangle}(r_n)),$$

若 $\mathbf{s}^{\langle v_h, v_l \rangle}(r_i) \neq 0$, 则构造 n 维向量 e'_i , 使得其第 i 个元素为 1, 其他元素为 0.

将 e'_i 作为 S' 基中的一个向量,重复,直至无新向量加入.

例如图 4 所示的向量复合网 Σ , Σ 关于退缩关系 $R' = \{(\emptyset, \emptyset, r_3, r_4), (\emptyset, \emptyset, \emptyset, r_4), (\emptyset, \emptyset, r_3, \emptyset)\}$,得到如图 5 所示的子网 Σ' , Σ' 的关系强度向量空间的基维数为 2.

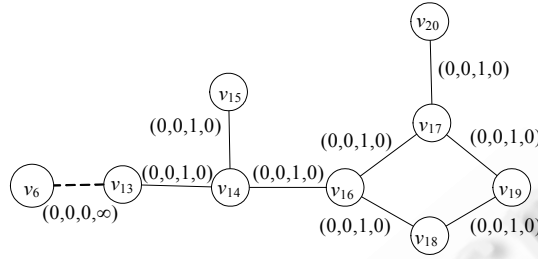


Fig.5 Subnet generated from vector-composited network Σ by given reduction relationship

$$R' = \{(\emptyset, \emptyset, r_3, r_4), (\emptyset, \emptyset, \emptyset, r_4), (\emptyset, \emptyset, r_3, \emptyset)\}$$

图5 向量复合网 Σ 关于退缩关系 $R' = \{(\emptyset, \emptyset, r_3, r_4), (\emptyset, \emptyset, \emptyset, r_4), (\emptyset, \emptyset, r_3, \emptyset)\}$ 的子网

4 我国铁路客运网络实证

在前期工作中,基于多子网复合复杂网络模型组网运算的子网加载,研究了城市公共交通网络演化问题^[29].本节基于复合网模型建立我国铁路客运向量复合网,应用于子网退缩运算对我国铁路客运情况进行实证分析.

4.1 铁路客运复合网的构建

随着经济与社会的发展,人们的交通需求越来越多.铁路是城市间客运交通的重要交通工具,为了满足人们方便、快捷的出行需求,列车类型日渐丰富,高铁、动车、城际高速等快速列车对传统列车起到了良好的补充.列车类型可视为列车站点间的相互关系.

使用网络爬虫工具从火车网 www.huochec.com(截至 2011 年 10 月 1 日)下载了我国火车线路时刻表,该表包含了 39 774 条记录,每条记录由车次、始发站、终点站、发车时间、到站时间、车型(高速动车、动车组、城际高铁、空调普快、空调快速与直达特快)、总里程、车站、到达时间、开车时间、硬座价格、硬卧价格、软卧价格、下一站共计 14 个属性组成.我们令车站为节点,两个车站间有一趟列车直达则连边,关系集合 $R=R_1 \times R_2$, $R_1 = \{r_1\}, R_2 = \{r_2\}$,其中, r_1 表示站点间有时速在 200km/h 以上的高速列车(高速动车、动车组与城际高速)经过; r_2 表示站点间时速小于 200km/h 的低速列车(空调普快、空调快速与直达特快)经过.构造映射 F ,有:

$$F(\langle v_h, v_l \rangle) = \begin{cases} (r_1, r_2), & \text{当 } v_h, v_l \text{ 具有 } r_1, r_2 \text{ 关系} \\ (r_1, \emptyset), & \text{当 } v_h, v_l \text{ 只具有 } r_1 \text{ 关系,} \\ (\emptyset, r_2), & \text{当 } v_h, v_l \text{ 只具有 } r_2 \text{ 关系} \end{cases}$$

其中, $1 \leq h, l \leq |V|$.由此得到了一个包含 2 812 个节点、5 448 条边的铁路客运复合网 $G=(V, E, R, F)$.令相邻车站间经过的车次数为去程与返程车次数之和,使用车次数描述车站间相互关系的强度,令 $dom(r_i) \subset \mathbb{N}^+$ 为相邻车站间经过高速车次数(当 $i=1$ 时)、低速车次数(当 $i=2$ 时)的集合,两个车站间经过的车次数越多,表明这两个车站间交通越便利,交通关系越紧密.构造二维关系强度向量空间 $S=dom(r_1) \times dom(r_2)$,映射:

$$M(\langle v_h, v_l \rangle) = \mathbf{s}^{\langle v_h, v_l \rangle} = (\mathbf{s}^{\langle v_h, v_l \rangle}(r_1), \mathbf{s}^{\langle v_h, v_l \rangle}(r_2)),$$

其中, $\mathbf{s}^{\langle v_h, v_l \rangle}(r_i)$ 为节点 v_h, v_l 所代表的车站间经过的高速车次数(当 $i=1$ 时)和低速车次数(当 $i=2$ 时).由此构建了 G 的向量复合网 $\Sigma=(G, S, M)$.

为了便于直观显示,按照如下方式绘图:对结点间具有关系 r_1 的边,用灰色表示;对结点间具有关系 r_2 的边,用黑色表示;对结点间具有关系 r_1 与 r_2 的边,用浅灰色表示.下文均按这种表示方法绘图.

如图 6 所示为复合网 G ,黑色边(只有低速列车经过)、灰色边(只有高速列车经过)与浅灰边(既有低速也有高速列车经过)数目占总边数的比分别是 90.57%,8.03%与 1.4%,可见,我国绝大部分火车站间只有低速列车经过.

分析省份内部及省份之间高速与低速车次经过的线路数,取线路数最多的前 10 位,见表 1 和表 2.结果发现,无论是高速列车还是低速列车,线路数最多的前 10 位省份是一致的.这说明低速列车发展得快的省份,发展高

速列车也具有优势.

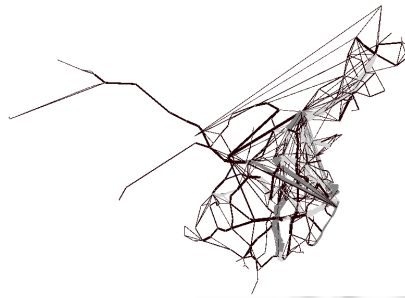


Fig.6 A vector-composited network of railway transport of passenger in mainland China

图 6 我国铁路客运复合网

Table 1 Pairs of provinces (or autonomous prefectures, municipalities) with most numbers of high speed railways in top ten

表 1 高速车次经过的线路数最多的前 10 位

线路(省、自治州或直辖市—省、自治州或直辖市)	高速车次数
河南—河南	1 789
湖南—湖南	1 295
江苏—江苏	1 220
江西—江西	1 070
广东—广东	932
山东—山东	915
河北—河北	885
辽宁—辽宁	854
浙江—浙江	822
安徽—安徽	694

Table 2 Pairs of provinces (or autonomous prefectures, municipalities) with most numbers of low speed railways in top ten

表 2 低速车次经过的线路数最多的前 10 位

线路(省、自治州或直辖市—省、自治州或直辖市)	低速车次数
河南—河南	2 010
江苏—江苏	1 578
湖南—湖南	1 526
广东—广东	1 316
江西—江西	1 272
辽宁—辽宁	1 264
浙江—浙江	1 211
安徽—安徽	1 076
河北—河北	826
山东—山东	730

4.2 高速子网分析

采用子网退缩运算,获得铁路客运向量复合网 Σ 关于关系 r_1 的子网 $\Sigma_1=(G_1, S_1, M_1)$, G_H 由 205 个节点、579 条边构成,如图 7 所示.使用边的粗细表征该边两端节点间关系强度的取值(即车次数)的大小:边越粗,经过的车次数越多;反之,经过的车次数越少.

G_1 由 3 个不连通的部分组成,如图 7 所示.图 7(a)中的 5 个车站均位于四川省内,图 7(b)中的 7 个车站均位于广东省,图 7(c)中的车站分布于我国其他省市.由此可得:四川省内虽有高速铁路,但不出省,在省内形成一个封闭的高速铁路网络.观察图 7(b),广州市有多个火车站点,而广州南与广州北在图 7(c)中,所以事实上,图 7(b)与

图 7(c)可构成连通的整体.

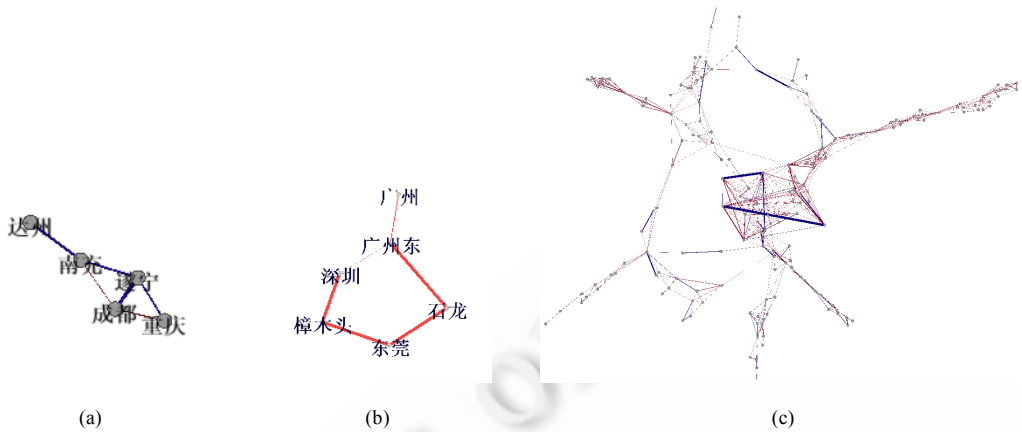


Fig.7 Subnet $\Sigma_1=(G_1,S_1,M_1)$ generated from vector-composited network of railway transport of passenger in mainland China Σ by given relationship r_1

图 7 我国铁路客运向量复合网 Σ 关于关系 r_1 的子网 $\Sigma_1=(G_1,S_1,M_1)$

对子网 Σ_1 中节点间的关系的强度进行统计,累积分布如图 8 所示.结果表明:绝大部分节点间关系的强度取值都较小,只有一小部分取值较大.也就是说,我国绝大部分火车站间高速列车经过的车次数都较少,而只有少部分火车站间经过的次数较多.列出高速车次经过车次数较多的前 10 位的火车站点线路,见表 3.可以看出,运行高速车次最多的线路位于珠江三角洲地区,其次位于长江三角洲地区.

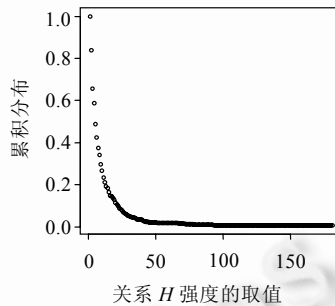


Fig.8 Cumulative distribution of strength of interrelation H between pairs of nodes in Σ_1

图 8 Σ_1 中节点间的关系 H 强度的取值的累积分布图

Table 3 Pairs of stations with most numbers of high speed railways in top ten

表 3 高速车次经过最多的前 10 位火车站点线路

线路(站点—站点)	高速列车车次数
东莞—石龙	181
樟木头—深圳	181
东莞—樟木头	181
石龙—广州东	181
无锡—苏州	115
天津—北京南	92
镇江—南京	77
无锡—常州	73
昆山南—苏州	71
上海虹桥—昆山南	66

4.3 低速子网分析

采用子网退缩运算,获得铁路客运向量复合网 Σ 关于关系 r_2 的子网 $\Sigma_2=(G_2,S_2,M_2)$, G_2 由 2 732 个节点、5 058 条边组成,该向量复合网中节点间有低速列车经过.

对子网 G_2 中节点间的关系的强度进行统计,累积分布如图 9 所示.结果表明:我国绝大部分火车站间低速列车经过的车次数都较少,而只有少部分火车站间经过的次数较多.列出低速车次经过车次数较多的前 10 位的火车站点线路,见表 4.可见,运行低速车次较多的线路大多位于我国苏、浙、湘、鲁西、冀、豫等中东部地区.

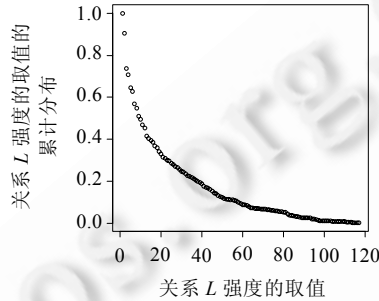


Fig.9 Cumulative distribution of strength of interrelation L between pairs of nodes in Σ_2

图 9 Σ_2 中节点间的关系 L 强度的取值的累积分布图

Table 4 Pairs of stations with most numbers of high speed railways in top ten

表 4 低速车次经过最多的前 10 位火车站点线路

线路(站点—站点)	车次数
镇江—南京	121
金华西—义乌	108
常州—无锡	94
衡阳—株洲	93
无锡—苏州	93
泰山—济南	92
秦皇岛—山海关	88
开封—郑州	86
韶关东—郴州	85
泰山—兖州	82

对我国铁路客运向量复合网进行分析可以发现:① 我国高速铁路线路数明显少于低速线路数,且高速铁路线路集中在我国中珠江三角洲与长江三角洲地区,西北内陆无高速铁路,而四川仅有省内高速铁路,驶往我国其他地区的仍是低速列车;② 存在少数线路十分繁忙,繁忙的高速线路与低速线路集中分布在华南与东部沿海省份;③ 无论是高速列车还是低速列车,线路数最多的前 10 位省份是一致的,这说明低速列车发展得快的省份在发展高速列车方面也具有优势.

5 总结与展望

现实世界中的复杂系统通常由异类个体及其间多种关系构成,典型复杂网络模型仅描述了复杂系统中同类个体及其间一种关系,且对问题的讨论局限于同一系统;二分图能够描述复杂系统中两类异质个体间的关系,但同类个体间的关系未给出描述;层次网络模型虽能描述多类个体及其间多种关系,但由于层仅是对同类个体及其之间一种关系的描述,具有多种关系的个体需要置于不同的层,增加了大量冗余的节点与连边,这对关系复杂、个体数量庞大的系统来讲,极大地增加了网络分析的时间与空间复杂性,存在一定的局限性.另一方面,针对给定分析需求进行网络动态重组十分必要,一些情况下,给定的对象只涉及网络局部,此时需要将一个大网络退缩成一个小网络;反之,若干个小网络需要继承到一个大网络中进行讨论,此时需要将小网络根据给定的关系进

行加载,构成一个大网络.基于此,在前期研究中提出了能够描述复杂系统中多类个体及其之间多种关系的复合网模型,基于该模型的网络动态重组(加载与退缩)能够实现多个复杂网络的复合与复杂网络的分解.为实现复合网动态重组的可计算,通过将复杂系统中个体间的相互关系映射为向量空间的多维向量,定义了向量复合网,在此基础上建立了多子网复合复杂网络模型组网运算(子网加载、退缩)的形式描述方法.以我国铁路客运网络为实例,构建了具有高速与低速车次关系的我国铁路客运向量复合网,基于多子网复合复杂网络模型的组网运算,对我国铁路客运向量复合网进行了实证分析,得出了相关结论.

未来将丰富组网运算,提出能够从不同概念层观察与分析目标网络的多尺度运算,以及构建适用于复杂、海量复杂网络数据的快速组网运算方法.

致谢 在此,我们向对本文的工作给予支持和建议的同行,尤其是青岛大学复杂性科学研究所张嗣瀛院士等人表示感谢.

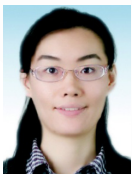
References:

- [1] Zhang SY. A brief introduction to complex systems and complexity science. *Journal of Qingdao University*, 2001,16(4):25–28 (in Chinese with English abstract).
- [2] Dai RW. Research on system science and system complexity. *Journal of System Simulation*, 2002,14(11):1411–1416 (in Chinese with English abstract).
- [3] Fang JQ. Birth of new science of networks and its development prospects. *Journal of Guangxi Normal University: Natural Science Edition*, 2007,25(3):2–6 (in Chinese with English abstract).
- [4] Erdos P, Renyi A. On the evolution of random graphs. *Bulletin of the International Statistical Institute*, 1960,38(4):343–347.
- [5] Watts DJ, Strogatz SH. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature*, 1998,393:440–442. [doi: 10.1038/30918]
- [6] Barabasi AL, Albert R. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 1999,286:509–512. [doi: 10.1126/science.286.5439.509]
- [7] Lambiotte R, Ausloos M. Uncovering collective listening habits and music genres in bipartite networks. *Physical Review E*, 2005, 72(6):Article 066107. [doi: 10.1103/PhysRevE.72.066107]
- [8] Goh KI, Cusick ME, Valle D, Childs B, Vidal M, Barabási AL. The human disease network. *Proc. of the National Academy of Sciences*, 2007,104(21):8685–8690. [doi: 10.1073/pnas.0701361104]
- [9] Fun CH, Zhang ZP, Chang H, Tao JR, Chen ZH, Dai YL, Zhang W, He DR. A kind of collaboration competition networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2008,387(5-6):1411–1420. [doi: 10.1016/j.physa.2007.10.043]
- [10] Wu YJ, Zhang P, Di ZR, Fan Y. Study on bipartite networks. *Complex Systems and Complexity Science*, 2010,7(1):1–12 (in Chinese with English abstract).
- [11] Shang MS, Lü LY, Zhang YC, Zhou T. Empirical analysis of Web-based user-object bipartite networks. *Europhysics Letters*, 2010, 90(4):Article 48006. [doi: 10.1209/0295-5075/90/48006]
- [12] Zhou T, Ren J, Medo M, Zhang YC. Bipartite network projection and personal recommendation. *Physical Review E*, 2007,76: Article 046115. [doi: 10.1103/PhysRevE.76.046115]
- [13] Zhou T, Jiang LL, Su RQ, Zhang YC. Effect of initial configuration on network-based recommendation. *Europhysics Letters*, 2008, 81(5):Article 58004. [doi: 10.1209/0295-5075/81/58004]
- [14] Lü LY, Zhou T. Link prediction in complex networks: A survey. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2011, 390(6):1150–1170. [doi: 10.1016/j.physa.2010.11.027]
- [15] Kurant M, Thiran P. Extraction and analysis of traffic and topologies of transportation networks. *Physical Review E*, 2006,74(3): Article 036114. [doi: 10.1103/PhysRevE.74.036114]
- [16] Kurant M. Layered complex networks. *Physical Review Letters*, 2006,96(13):Article 138701. [doi: 10.1103/PhysRevLett.96.138701]
- [17] Buldyrev SV, Parshani R, Paul G, Stanley HE, Havlin S. Catastrophic cascade of failures in interdependent networks. *Nature*, 2010, 464:1025–1028. [doi: 10.1038/nature08932]
- [18] Donges JF, Schultz HCH, Marwan N, Zou Y, Kurths J. Investigating the topology of interacting networks. *The European Physical Journal B*, 2011,84:635–651. [doi: 10.1140/epjb/e2011-10795-8]

- [19] Xu XL, Qu YQ, Guan S, Jiang YM, He DR. Interconnecting bilayer networks. *European Physics Letter*, 2011,93(6):Article 68002. [doi: 10.1209/0295-5075/93/68002]
- [20] Parshani R, Rozenblat C, Ietri D, Ducruet C, Havlin S. Inter-Similarity between coupled networks. *Europhysics Letters*, 2010,92(6): Article 68002. [doi: 10.1209/0295-5075/92/68002]
- [21] Yang JM, Wang WJ, Chen GR. A two-level complex network model and its application. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2009,388(12):2435–2449. [doi: 10.1016/j.physa.2009.02.046]
- [22] Battiston F, Nicosia V, Latora V. Structural measures for multiplex networks. *Physical Review E*, 2014,89(3):Article 032804. [doi: 10.1103/PhysRevE.89.032804]
- [23] Cozzo E, Banos RA, Meloni S, Moreno Y. Contact-Based social contagion in multiplex networks. *Physical Review E*, 2013,88(5): Article 050801. [doi: 10.1103/PhysRevE.88.050801]
- [24] Sergio G, Diaz-Guilera A, Gomez-Gardeñes J, Perez-Vicente CJ, Moreno Y, Arenas A. Diffusion dynamics on multiplex networks. *Physical Review Letters*, 2013,110(2):Article 028701. [doi: 10.1103/PhysRevLett.110.028701]
- [25] Saumell-Mendiola A, Serrano MÁ, Boguñá M. Epidemic spreading on interconnected networks. *Physical Review E*, 2012,86(2): Article 026106. [doi: 10.1103/PhysRevE.86.026106]
- [26] Gómez-Gardeñes J, Reinares I, Arenas A, Floría LM. Evolution of cooperation in multiplex networks. *Scientific Reports*, 2012,2: No.620.
- [27] Shao FJ, Sun RC, Li SJ. Multi-Subnetwork composited complex network and its operations. *Complex Systems and Complexity Science*, 2012,9(4):20–25 (in Chinese with English abstract).
- [28] Shao FJ, Sui Y. Reorganizations of complex networks: Compounding and reducing. *Int'l Journal of Modern Physics C*, 2014,25(5): Article 1440001. [doi: 10.1142/S0129183114400014]
- [29] Sui Y, Shao FJ, Sun RC, Li JS. Space evolution model and empirical analysis of urban public transport network. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2012,391(14):3708–3717. [doi: 10.1016/j.physa.2012.01.011]

附中中文参考文献:

- [1] 张嗣瀛.复杂系统与复杂性科学简介.青岛大学学报,2001,16(4):25–28.
- [2] 戴汝为.系统科学与系统复杂性研究.系统仿真学报,2002,14(11):1411–1416.
- [3] 方锦清.网络科学的诞生与发展前景.广西师范大学学报:自然科学版,2007,25(3):2–6.
- [10] 吴亚晶,张鹏,狄增如,樊瑛.二分网络研究.复杂系统与复杂性科学,2010,7(1):1–12.
- [27] 邵峰晶,孙仁诚,李淑静.多子网复合复杂网络及其运算研究.复杂系统与复杂性科学,2012,9(4):20–25.



隋毅(1984—),女,山东青岛人,博士,讲师,主要研究领域为复杂网络建模与分析,数据挖掘.



李淑静(1979—),女,博士,讲师,主要研究领域为复杂网络,数据挖掘.



邵峰晶(1955—),女,博士,教授,博士生导师,主要研究领域为复杂网络理论与应用,数据挖掘.



吴舜尧(1986—),男,博士,讲师,主要研究领域为数据挖掘,复杂网络.



孙仁诚(1977—),男,博士,副教授,CCF 会员,主要研究领域为大数据分析与管理,复杂网络.