

对数-指数形态学联想记忆*

冯乃勤^{1,4}, 田勇², 王鲜芳¹, 宋黎明¹, 范海菊¹, 王双喜³

¹(河南师范大学 计算机与信息工程学院, 河南 新乡 453007)

²(河南机电职业学院 信息工程系, 河南 郑州 451191)

³(商丘学院 计算机科学与技术学院, 河南 商丘 476000)

⁴(郑州工业应用技术学院 信息工程学院, 河南 郑州 451100)

通讯作者: 冯乃勤, E-mail: fengnaiqin@163.com, http://www.zzhxxy.com

摘要: 利用对数和指数算子构建了一种新的形态学联想记忆方法, 简称 LEMAM。理论分析表明: 自联想 LEMAM(简称 ALEMAM)具有无限存储能力、一步回忆记忆、一定的抵抗腐蚀噪声或膨胀噪声的能力, 在输入完全或在一定的噪声范围内, 能够保证完全回忆记忆; 异联想 LEMAM(简称 HLEMAM)在输入完全情况下, 不能保证完全回忆记忆, 但当满足一定条件时, 也能够达到完美联想记忆。对比实验结果表明: 在一些情况下, LEMAM 能够取得较好的联想记忆效果。总体来说, LEMAM 丰富了形态学联想记忆的理论 and 实践, 可以作为一种神经计算模型加以研究和利用。

关键词: 对数; 指数; 形态学联想记忆; 自联想记忆; 异联想记忆; 完全回忆记忆

中图法分类号: TP18

中文引用格式: 冯乃勤, 田勇, 王鲜芳, 宋黎明, 范海菊, 王双喜. 对数-指数形态学联想记忆. 软件学报, 2015, 26(7): 1662-1674. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/4620.htm>

英文引用格式: Feng NQ, Tian Y, Wang XF, Song LM, Fan HJ, Wang SX. Logarithmic and exponential morphological associative memories. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2015, 26(7): 1662-1674 (in Chinese). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/4620.htm>

Logarithmic and Exponential Morphological Associative Memories

FENG Nai-Qin^{1,4}, TIAN Yong², WANG Xian-Fang¹, SONG Li-Ming¹, FAN Hai-Ju¹, WANG Shuang-Xi³

¹(College of Computer and Information Engineering, He'nan Normal University, Xinxiang 453007, China)

²(Department of Information Engineering, He'nan Mechanical and Electrical Vocational College, Zhengzhou 451191, China)

³(College of Computer Science and Technology, Shangqiu University, Shangqiu 476000, China)

⁴(School of Information Engineering, Zhengzhou University of Industrial Technology, Zhengzhou 451100, China)

Abstract: A novel morphological associative memory method, abbreviated as LEMAM, is constructed by using logarithmic operator and exponential operator. The theoretical analysis shows that auto LEMAM (abbreviated as ALEMAM), which has unlimited storage capacity, one step recall, and a certain ability of resisting erosive noise or dilative noise, can ensure perfect recall memory for either perfect inputs or a certain range of noise. Hetero LEMAM (abbreviated as HLEMAM) does not guarantee perfect recall, even without any input noise. However, when meeting certain conditions, HLEMAM can also achieve perfect recall. HLEMAM contrast experiments show that, in some cases, LEMAM can produce better result. On balance, LEMAM enriches the theory and practice of morphological associative memories, and can serve as a kind of new neural computational model for research and application.

Key words: logarithm; exponent; morphological associative memories; autoassociative memories; heteroassociative memories; perfect recall

* 基金项目: 国家自然科学基金(61173071); 河南省高校创新人才支持计划(2012HASTIT011)

收稿时间: 2012-08-13; 修改时间: 2013-07-09; 定稿时间: 2014-03-27; jos 在线出版时间: 2015-02-02

CNKI 网络优先出版: 2015-02-02 15:09, <http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2560.TP.20150202.1509.001.html>

专家指出,联想记忆(associative memories,简称 AM)是人脑的功能,是逻辑思维和形象思维、推理和创新的源泉^[1].利用机器实现或部分实现类似人脑的功能,一直是人们追求的目标之一.人工联想记忆有两个平行发展的分支:

- 一个是经典联想记忆,如 Hopfield 联想记忆;
- 另一个是形态学联想记忆(morphological AM,简称 MAM),如实形态联想记忆(real MAM,简称 RMAM)^[2]、复形态联想记忆(complex MAM,简称 CMAM)^[3]、模糊形态联想记忆(fuzzy MAM,简称 FMAM)^[4,5]、增强模糊形态联想记忆(enhanced FMAM,简称 EFMAM)^[6]等.

形态学联想记忆是一大类,包含若干子类.从面向对象的观点出发,冯等人提出了一个复域上统一的形态学联想记忆框架(unified framework of MAM in complex domain,简称 UFMAM_{CD})^[7],将几种基本的 MAM 统一在一起,旨在丰富和发展 MAM 的理论,深刻揭示 MAM 的本质,探索并发现一些新的形态学联想记忆方法.

Hopfield 联想记忆网络要求联想记忆的模式或向量之间正交,其存储能力十分有限.已有相关文献表明,它的存储容量不超过网络神经元总量的 15%^[8],这意味着大量神经元的浪费,且存在收敛问题.而形态学联想记忆是以数学形态学为基础建立起来的,有着严格的理论和方法.自联想形态学记忆具有无限存储能力;一步回忆记忆,不存在收敛问题;具有一定的抵抗腐蚀噪声或膨胀噪声的能力;在输入完全或在一定的噪声条件下,能够保证完全回忆记忆.异联想形态学记忆在输入完全情况下,没有完全回忆记忆的保证,但在一定条件下也可以实现完全回忆记忆.鉴于 MAM 的突出优点和特点,近年来,它得到了人们的重视,在模式识别和图像处理^[9-13]、感知^[14]、学习^[15,16]、分类和预测^[17,18]等领域得到了广泛的应用.

MAM 的主要问题之一是:异联想形态学记忆(heteroassociative morphological memories,简称 HMM)是不完全的,即使输入是完全的,它也不能保证完全回忆记忆,这极大地限制了 HMM 的应用.针对这一问题,Feng 等人提出了一种解决方法^[19],称为四维存储的形态学联想记忆(FDSHMM),在输入完全或在一定的噪声范围内,可以实现 HMM 的完全回忆记忆.FDSHMM 方法可以应用于小规模问题或实时性要求不高的场合.鉴于当前任何一种 MAM 方法都不完美,因此,研究一些新的 MAM 方法,多种方法互补,将是解决 HMM 问题的有效途径.

另一方面,我们认为,UFMAM_{CD} 是一个框架,具有一定的“容量”,该框架容纳了一些已有的 MAM 方法,但它并未“饱和”,还可能容纳一些框架可纳的、尚未显现的新方法,有待于我们去探索和发现.这些新方法在算子、性能等方面与已有方法明显不同,可与其他 MAM 方法互补.显然,努力发现 UFMAM_{CD} 中隐含的新方法,进一步充实框架内容,完善框架体系,是 MAM 研究中的一个重要课题.

依据上述分析的基本思想,本文利用对数和指数运算构建了一种新的形态学联想记忆方法,简称 LEMAM(logarithmic and exponential MAM).理论分析表明:自联想 LEMAM(auto LEMAM,简称 ALEMAM)具有无限存储能力、一步回忆记忆、一定的抵抗腐蚀噪声或膨胀噪声的能力,在输入完全或在一定的噪声范围内,能够保证完全回忆记忆;异联想 LEMAM(hetero LEMAM,简称 HLEMAM)在输入完全时,没有完全回忆记忆的保证,但在满足完全回忆记忆定理和噪声定理的条件下,也可以达到完全回忆记忆.对比实验结果表明:在一些情况下,LEMAM 能够取得较好的联想记忆效果.在自联想方面,ALEMAM 的抗噪声性能明显好于 RMAM,而不低于 FMAM;在异联想方面,HLEMAM 抗混合噪声的能力明显优于 HRMAM 和 HFMAM.Iris 实验结果表明:在训练精度和预测分类准确性方面,HLEMAM 方法胜过 HRMAM,略高于或不低于 HFMAM.在 Wine 实验中,有更好的结果和结论:在学习精度和预测分类准确性方面,HLEMAM 均胜过 HRMAM 和 HFMAM.另外,LEMAM 的神经计算方法与人耳听觉具有的对数特性相近,在模拟听觉引发的联想记忆和研究听神经的神经计算机制方面,LEMAM 可能具有潜在的作用和意义.因此,LEMAM 可以作为一种新的形态学神经计算模型加以研究和利用,本文为此奠定了基础并积累了资料.

本文第 1 节从 UFMAM_{CD} 的角度简介 MAM 的基本原理.第 2 节叙述 LEMAM 的基本原理.第 3 节讨论 ALEMAM.第 4 节讨论 LEMAM 的噪声性能,包括噪声边界条件、ALEMAM 和 HLEMAM 的噪声性能.第 5 节结合 Iris 实验和 Wine 实验展示 HLEMAM 的分类和预测能力及应用前景.最后,第 6 节总结全文.

1 UFMAM_{CD} 简介

在 UFMAM_{CD} 中,基本计算基于代数格结构 (U, \wedge, \vee, O) ,其中,

- U 代表非空集合或域,例如 $U=R, U=R_+,$ 或 $U=C$;
- \wedge 和 \vee 分别表示取极小和极大操作;
- O 代表在 U 上封闭的运算,例如 $O=+ \text{ 或 } -$, 是 R 上的封闭运算;也可以 $O=\cdot$ 或 $/$, 是 R_+ 上的封闭运算;还可以 $O=\text{Log}$ 或 Exp , 构成 $R_{>0}$ (限定对数底数和真数 >1) 上的封闭运算.我们也使用 Θ 表示 O 的逆运算.

在 UFMAM_{CD} 中,对象满足以下可纳条件:

- (1) 有序性: 设 $a, b \in U$, 则 $a \leq b$ 或 $b \leq a$;
- (2) 封闭性: 设 $a, b \in U, aOb=r$, 则 $r \in U$;
- (3) 正确性: 遵循正确的运算法则.

满足以上条件的 MAM 对象,对 UFMAM_{CD} 来说是可纳的.

给定一对模式向量 $x=(x_1, \dots, x_n)'$ 和 $y=(y_1, \dots, y_m)'$, 在输入 x 作用下,回忆 y 的形态学联想记忆 W 被定义为

$$W = y \overset{\circ}{\wedge} x' = \begin{bmatrix} y_1 O x_1 & \cdots & y_1 O x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_m O x_1 & \cdots & y_m O x_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

因为 W 满足下面的等式:

$$W \overset{\Theta}{\vee} x = \begin{bmatrix} \bigvee_{i=1}^n (y_1 O x_i \Theta x_i) \\ \vdots \\ \bigvee_{i=1}^n (y_m O x_i \Theta x_i) \end{bmatrix} = y \tag{2}$$

另一个形态学联想记忆 M 可定义为

$$M = y \overset{\circ}{\vee} x' = \begin{bmatrix} y_1 O x_1 & \cdots & y_1 O x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_m O x_1 & \cdots & y_m O x_n \end{bmatrix} \tag{3}$$

M 也满足下面的等式:

$$M \overset{\Theta}{\wedge} x = \begin{bmatrix} \bigwedge_{i=1}^n (y_1 O x_i \Theta x_i) \\ \vdots \\ \bigwedge_{i=1}^n (y_m O x_i \Theta x_i) \end{bmatrix} = y \tag{4}$$

类似地, 设 $(x^1, y^1), \dots, (x^k, y^k)$ 是 k 对向量, 其中, 第 ξ 对输入向量和输出向量分别是:

$$x^\xi = (x_1^\xi, \dots, x_n^\xi)', y^\xi = (y_1^\xi, \dots, y_m^\xi)'$$

对于给定的模式联想集合 $\{(x^\xi, y^\xi): \xi=1, \dots, k\}$, 我们定义一对联想模式矩阵 (X, Y) , 其中 $X=(x^1, \dots, x^k), Y=(y^1, \dots, y^k)$. 如此, X 是 $n \times k$ 维矩阵, Y 是 $m \times k$ 维矩阵. 对矩阵对 (X, Y) , 定义两个自然的形态学 $m \times n$ 记忆 W_{XY} 和 M_{XY} 如下:

$$W_{XY} = Y \overset{\circ}{\wedge} X' = \bigwedge_{\xi=1}^k \left[y^\xi \overset{\circ}{\wedge} (x^\xi)' \right] \tag{5}$$

$$M_{XY} = Y \overset{\circ}{\vee} X' = \bigvee_{\xi=1}^k \left[y^\xi \overset{\circ}{\vee} (x^\xi)' \right] \tag{6}$$

显然, $y^\xi \overset{\circ}{\wedge} (x^\xi)' = y^\xi \overset{\circ}{\vee} (x^\xi)'$, 所以下面的不等式成立:

$$W_{XY} \leq y^\xi \overset{\circ}{\wedge} (x^\xi)' = y^\xi \overset{\circ}{\vee} (x^\xi)' \leq M_{XY}, \forall \xi = 1, \dots, k \tag{7}$$

同时, 按照公式(2)和公式(4), 不等式(7)暗含着:

$$W_{XY} \overset{\circ}{\vee} \mathbf{x}^{\xi} \leq \left[\mathbf{y}^{\xi} \overset{\circ}{\wedge} (\mathbf{x}^{\xi})' \right] \overset{\circ}{\vee} \mathbf{x}^{\xi} = \mathbf{y}^{\xi} = \left[\mathbf{y}^{\xi} \overset{\circ}{\vee} (\mathbf{x}^{\xi})' \right] \overset{\circ}{\wedge} \mathbf{x}^{\xi} \leq M_{XY} \overset{\circ}{\wedge} \mathbf{x}^{\xi}, \forall \xi = 1, \dots, k \quad (8)$$

等价地,有:

$$W_{XY} \overset{\circ}{\vee} \mathbf{X} \leq \mathbf{Y} \leq M_{XY} \overset{\circ}{\wedge} \mathbf{X} \quad (9)$$

2 对数-指数形态学联想记忆(LEMAM)

受统一的形态学联想记忆框架的启发^[7],我们用对数和指数运算分别代替 RMAM 中的减和加运算,进而得到一种新的基于对数和指数运算的形态学联想记忆,即 LEMAM.

由统一的形态学联想记忆框架可知,其基本计算基于格代数结构 (U, \wedge, \vee, \circ) ,其中, U 代表非空集合或域, \circ 代表在 U 上封闭的运算.假设 $U=R$, \circ 代表在 U 上的取对数/求指数运算(Log/Exp 运算),那么 $(U, \wedge, \vee, \circ) = (R, \wedge, \vee, \text{Log/Exp})$ 即构成 LEMAM 的计算基础.为方便起见,在以下的讨论中,对于对数函数 $y = \log_a x$,我们假定 $a > 1, x > 1$,以后需要时,再加以扩展并另行讨论.

给定一对向量 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)' \in R_{>1}^n$ 和 $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)' \in R_{>1}^m$,当对 LEMAM 网络提供输入向量 \mathbf{x} 时,可将回忆向量 \mathbf{y} 的对数-指数形态学联想记忆 V 如下定义:

$$V = \mathbf{y} \overset{\text{log}}{\wedge} \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \log_{x_1} y_1 & \dots & \log_{x_n} y_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \log_{x_1} y_m & \dots & \log_{x_n} y_m \end{pmatrix} \quad (10)$$

因为 V 满足方程 $V \overset{\text{exp}}{\vee} \mathbf{x} = \mathbf{y}$, 即有:

$$V \overset{\text{exp}}{\vee} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \bigvee_{i=1}^n x_i^{\log_{x_i} y_1} \\ \vdots \\ \bigvee_{i=1}^n x_i^{\log_{x_i} y_m} \end{pmatrix} = \mathbf{y} \quad (11)$$

同样,也可以使用极大算子 $\overset{\text{log}}{\vee}$ 定义 \mathbf{y} 和 \mathbf{x} 的另一个形态学联想记忆 T :

$$T = \mathbf{y} \overset{\text{log}}{\vee} \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \log_{x_1} y_1 & \dots & \log_{x_n} y_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \log_{x_1} y_m & \dots & \log_{x_n} y_m \end{pmatrix} \quad (12)$$

T 满足方程 $T \overset{\text{exp}}{\wedge} \mathbf{x} = \mathbf{y}$, 即有:

$$T \overset{\text{exp}}{\wedge} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \bigwedge_{i=1}^n x_i^{\log_{x_i} y_1} \\ \vdots \\ \bigwedge_{i=1}^n x_i^{\log_{x_i} y_m} \end{pmatrix} = \mathbf{y} \quad (13)$$

类似地,设 $(\mathbf{x}^1, \mathbf{y}^1), \dots, (\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k)$ 是 k 个向量对,输入向量 $\mathbf{x}^l = (x_1^l, \dots, x_n^l)' \in R_{>1}^n$, 输出向量 $\mathbf{y}^l = (y_1^l, \dots, y_m^l)' \in R_{>1}^m$, $l=1, \dots, k$.借助某种变换,可将输入向量和输出向量限定在 $R_{>1}$ 上.对于一个给定的模式联想集合 $\{(\mathbf{x}^l, \mathbf{y}^l): l=1, \dots, k\}$, 可以定义一对联想模式矩阵 (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) , 其中 $\mathbf{X} = (\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k)$, $\mathbf{Y} = (\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^k)$. 这样, \mathbf{X} 是 $n \times k$ 维矩阵, 它的第 i, j 项是 x_i^j ; \mathbf{Y} 是 $m \times k$ 维矩阵, 它的第 i, j 项是 y_i^j . 对 (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) 定义如下两个自然的形态学 $m \times n$ 维记忆 V_{XY} 和 T_{XY} :

$$V_{XY} = \bigwedge_{l=1}^k \left[\mathbf{y}^l \overset{\text{log}}{\wedge} (\mathbf{x}^l)' \right] \quad (14)$$

$$T_{XY} = \bigvee_{l=1}^k \left[\mathbf{y}^l \overset{\text{log}}{\vee} (\mathbf{x}^l)' \right] \quad (15)$$

V_{XY} 和 T_{XY} 中对应的第 i, j 项分别由下列式子表示:

$$v_{ij} = \bigwedge_{l=1}^k (\log_{x_j^l} y_i^l) = (\log_{x_j^1} y_i^1) \wedge \dots \wedge (\log_{x_j^k} y_i^k) \tag{16}$$

$$t_{ij} = \bigvee_{l=1}^k (\log_{x_j^l} y_i^l) = (\log_{x_j^1} y_i^1) \vee \dots \vee (\log_{x_j^k} y_i^k) \tag{17}$$

很明显, $y^l \wedge (x^l)' = y^l \vee (x^l)'$. 由此定义, 下式成立:

$$V_{XY} \leq y^l \wedge (x^l)' = y^l \vee (x^l)' \leq T_{XY}, \forall l=1, \dots, k \tag{18}$$

根据公式(11)、公式(13)~公式(15), 不等式(18)隐含着:

$$V_{XY} \vee x^l \leq \left[y^l \wedge (x^l)' \right] \vee x^l = y^l = \left[y^l \vee (x^l)' \right] \wedge x^l \leq T_{XY} \wedge x^l, \forall l=1, \dots, k \tag{19}$$

或者, 等价地, 有:

$$V_{XY} \vee X \leq Y \leq T_{XY} \wedge X \tag{20}$$

如果 $V_{XY} \vee X = Y$, 则 V_{XY} 称为对 (X, Y) 的 \vee 完全回忆记忆; 如果 $T_{XY} \wedge X = Y$, 则 T_{XY} 称为对 (X, Y) 的 \wedge 完全回忆记忆.

定理 1. 如果 A 是对 (X, Y) 的 \vee 完全回忆记忆, B 是对 (X, Y) 的 \wedge 完全回忆记忆, 那么,

$$A \leq V_{XY} \leq T_{XY} \leq B, \text{ 且 } V_{XY} \vee X = Y = T_{XY} \wedge X \tag{21}$$

证明: 如果 A 是对 (X, Y) 的 \vee 完全回忆记忆, 那么, $(A \vee x^l)_i = y_i^l, \forall l=1, \dots, k, \forall i=1, \dots, m$. 等价地, 有:

$$\bigvee_{j=1}^n (x_j^l)^{a_{ij}} = y_i^l, \forall l=1, \dots, k \text{ 和 } \forall i=1, \dots, m.$$

对于任意索引 $j \in \{1, \dots, n\}$, 它满足 $(x_j^l)^{a_{ij}} \leq y_i^l, \forall l=1, \dots, k$. 由此, 对该不等式两边取对数, 我们有:

$$\log_{x_j^l} (x_j^l)^{a_{ij}} \leq \log_{x_j^l} y_i^l, \forall l=1, \dots, k \Leftrightarrow a_{ij} \leq \log_{x_j^l} y_i^l, \forall l=1, \dots, k \Leftrightarrow a_{ij} \leq \bigwedge_{l=1}^k (\log_{x_j^l} y_i^l) = v_{ij}.$$

这表明 $A \leq V_{XY}$, 按照公式(20), 我们有 $Y = A \vee X \leq V_{XY} \vee X \leq Y$. 因此, $V_{XY} \vee X = Y$.

类似地, 可以证明: 如果 B 是对于 (X, Y) 的 \wedge 完全回忆记忆, 那么 $T_{XY} \leq B$, 且 $T_{XY} \wedge X = Y$. 这样, 由公式(18), 我们有: $A \leq V_{XY} \leq T_{XY} \leq B, V_{XY} \vee X = Y = T_{XY} \wedge X$. □

该定理表明: V_{XY} 是所有 \vee 完全回忆记忆的最小上界, T_{XY} 是所有 \wedge 完全回忆记忆的最大下界.

然而值得注意的是, 定理 1 并没有说明 (X, Y) 的完全回忆记忆是否存在. 那么, 在什么条件下, V_{XY} 或 T_{XY} 才能成为 (X, Y) 的 \vee 完全回忆记忆或 \wedge 完全回忆记忆呢? 定理 2 将解答这一问题.

定理 2(完全回忆记忆定理). V_{XY} 是对 (X, Y) 的 \vee 完全回忆记忆, 当且仅当对每个 $l=1, \dots, k$, 矩阵 $\left[y^l \wedge (x^l)' \right] - V_{XY}$ 的每一行包含一个零项; 类似地, T_{XY} 是对 (X, Y) 的 \wedge 完全回忆记忆, 当且仅当对每一个 $l=1, \dots, k$, 矩阵 $T_{XY} - \left[y^l \wedge (x^l)' \right]$ 的每一行都包含一个零项.

证明: $\forall l=1, \dots, k$ 和 $\forall i=1, \dots, m$, V_{XY} 是对 (X, Y) 的 \vee 完全回忆记忆

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \left(V_{XY} \vee x^l \right)_i &= y_i^l \Leftrightarrow \frac{y_i^l}{\left(V_{XY} \vee x^l \right)_i} = 1 \Leftrightarrow \frac{y_i^l}{\bigvee_{j=1}^n (x_j^l)^{v_{ij}}} = 1 \Leftrightarrow \bigwedge_{j=1}^n \frac{y_i^l}{(x_j^l)^{v_{ij}}} = 1 \\ &\Leftrightarrow \bigwedge_{j=1}^n (\log_{x_j^l} y_i^l - v_{ij}) = \log_{x_j^l} 1 = 0 \Leftrightarrow \bigwedge_{j=1}^n \left(\left[y^l \wedge (x^l)' \right]_{ij} - V_{XY} \right) = 0. \end{aligned}$$

这最后的等式为真,当且仅当对每一个 $l=1, \dots, k$ 和每一个 $i=1, \dots, m$, 矩阵 $\left[\mathbf{y}^l \wedge (\mathbf{x}^l)' \right] - V_{XY}$ 的每一行至少包含一个零项. 在此, 我们只针对记忆 V_{XY} 进行证明, 另一半证明可用类似的方法得到. \square

推论 1. $V_{XY}^{\exp} \vee \mathbf{X} = \mathbf{Y}$, 当且仅当对每一个行索引 $i=1, \dots, m$ 和每一个 $\gamma \in \{1, \dots, k\}$, 存在一个依赖于 i 和 γ 的列索引 $j \in \{1, \dots, n\}$, 使得:

$$x_j^\gamma = \bigvee_{l=1}^k y_i^\gamma \log_{y_i} x_j^l \quad (22)$$

类似地, $T_{XY}^{\exp} \wedge \mathbf{X} = \mathbf{Y}$, 当且仅当对每一个行索引 $i=1, \dots, m$ 和每一个 $\gamma \in \{1, \dots, k\}$, 存在一个依赖于 i 和 γ 的列索引 $j \in \{1, \dots, n\}$, 使得:

$$x_j^\gamma = \bigwedge_{l=1}^k y_i^\gamma \log_{y_i} x_j^l \quad (23)$$

证明: 按照定理 2, $V_{XY}^{\exp} \vee \mathbf{x}^l = \mathbf{y}^l, \forall l=1, \dots, k$, 当且仅当对每一个行索引 $i=1, \dots, m$ 和每一个 $\gamma \in \{1, \dots, k\}$, 存在一个依赖于 i 和 γ 的列索引 $j \in \{1, \dots, n\}$, 使得:

$$\log_{x_j^\gamma} y_i^\gamma = v_{ij} = \bigwedge_{l=1}^k \log_{x_j^l} y_i^l \quad (24)$$

该方程成立, 当且仅当:

$$\log_{y_i^\gamma} x_j^\gamma = \bigvee_{l=1}^k \log_{y_i^l} x_j^l \quad (25)$$

等价地, 当且仅当:

$$x_j^\gamma = \bigvee_{l=1}^k y_i^\gamma \log_{y_i^l} x_j^l \quad (26)$$

例 1: 设 $\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{y}^1 = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}; \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \mathbf{y}^2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}; \mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 25 \\ 125 \end{pmatrix}, \mathbf{y}^3 = \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \\ 5 \end{pmatrix}.$

- 在记忆阶段:

$$\begin{aligned} V_{XY} &= \bigwedge_{l=1}^3 \left(\mathbf{y}^l \wedge (\mathbf{x}^l)' \right) \\ &= \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}' \wedge \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}' \wedge \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \\ 5 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 5 \\ 25 \\ 125 \end{pmatrix}' \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- 在回忆阶段, 应用 V_{XY} 可得:

$$\begin{aligned}
 V_{XY}^{\text{exp}} \vee x^1 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^2 \vee 2^1 \vee 4^{\frac{2}{3}} \\ 4^{\frac{1}{2}} \vee 2^1 \vee 4^{\frac{1}{2}} \\ 4^1 \vee 2^{\frac{1}{2}} \vee 4^{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = y^1, \\
 V_{XY}^{\text{exp}} \vee x^2 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^2 \vee 3^1 \vee 9^{\frac{2}{3}} \\ 3^{\frac{1}{2}} \vee 3^1 \vee 9^{\frac{1}{2}} \\ 3^1 \vee 3^{\frac{1}{2}} \vee 9^{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = y^2, \\
 V_{XY}^{\text{exp}} \vee x^3 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 5 \\ 25 \\ 125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^2 \vee 25^1 \vee 125^{\frac{2}{3}} \\ 5^{\frac{1}{2}} \vee 25^1 \vee 125^{\frac{1}{2}} \\ 5^1 \vee 25^{\frac{1}{2}} \vee 125^{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \\ 5 \end{pmatrix} = y^3.
 \end{aligned}$$

应用 T_{XY} 回忆,也可得到对原始模式对的完全回忆记忆,读者可自行验证.

3 自联想对数-指数形态学联想记忆 ALEMAM

在对数-指数形态学联想记忆中,如果 $X=Y$,即 $x^l=y^l, \forall l=1, \dots, k$,那么 $V_{XY}=V_{XX}, T_{XY}=T_{XX}$.此时的 LEMAM 就成为自联想 LEMAM,即 ALEMAM.

定理 3. $V_{XX}^{\text{exp}} \vee X = X, T_{XX}^{\text{exp}} \wedge X = X$.

证明:记忆时, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ 和 $\forall l=1, \dots, k$,我们有:

$$\left[x^l \wedge (x^l)' \right]_{ii}^{\log} = \log_{x_i^l} x_i^l = 1, v_{ii} = \bigwedge_{l=1}^k \left[x^l \wedge (x^l)' \right]_{ii}^{\log} = 1 \tag{27}$$

因此,对于每个 $l=1, \dots, k, \left[x^l \wedge (x^l)' \right]_{XY}$ 的每一行都包含了一个零项.按照定理 2, V_{XX} 是对 (X, X) 的 \vee 完全

回忆记忆,即 $V_{XX}^{\text{exp}} \vee X = X$ 成立.同理可证 $T_{XX}^{\text{exp}} \wedge X = X$. □

在定理 3 中,对 X 的类型和规模大小是没有限制的,这表明记忆 V_{XX} 和 T_{XX} 具有无限存储能力,在输入完全情况下,能够保证完全回忆记忆.

例 2: 设 $x^1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 81 \end{pmatrix}, y^1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 81 \end{pmatrix}; x^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, y^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}; x^3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, y^3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$

采用 LEMAM 方法的 V_{XX} 或 T_{XX} 均能实现对上述模式对的完全回忆记忆.限于篇幅,计算从略.

定理 4. 如果 $V_{XX}^{\text{exp}} \vee z = w, T_{XX}^{\text{exp}} \wedge z = u$, 那么 $V_{XX}^{\text{exp}} \vee w = w, T_{XX}^{\text{exp}} \wedge u = u$.

证明:假定 $V_{XX}^{\text{exp}} \vee z = w$, 注意到:对于 $i=1, \dots, n, v_{ii}=1$, 那么,

$$\left(V_{XX}^{\text{exp}} \vee w \right)_i = \bigvee_{j=1}^n w_j^{v_{ij}} \geq w_i^{v_{ii}} = w_i \Leftrightarrow w \leq V_{XX}^{\text{exp}} \vee w \tag{28}$$

令 $i, j, \theta \in \{1, \dots, n\}$, 注意到:

$$v_{i\theta} = \bigwedge_{l=1}^k \log_{x_{\theta}^l} x_i^l \leq \log_{x_{\theta}^l} x_i^l, \forall \gamma = 1, \dots, k \tag{29}$$

$$v_{\theta j} = \bigwedge_{l=1}^k \log_{x_j^l} x_{\theta}^l \leq \log_{x_j^{\gamma}} x_{\theta}^{\gamma}, \forall \gamma = 1, \dots, k \quad (30)$$

因而:

$$v_{i\theta} \cdot v_{\theta j} \leq \log_{x_i^{\gamma}} x_i^{\gamma} \cdot \log_{x_j^{\gamma}} x_{\theta}^{\gamma} = \log_{x_j^{\gamma}} x_i^{\gamma}, \forall \gamma = 1, \dots, k \quad (31)$$

所以 $v_{i\theta} v_{\theta j} \leq \bigwedge_{l=1}^k \log_{x_j^l} x_i^l = v_{ij}$. 从而, 对 $i=1, \dots, n$, 我们有:

$$\begin{aligned} w_i &= \bigvee_{j=1}^n (z_j^{v_{ij}}) \geq \bigvee_{j=1}^n (z_j^{v_{i\theta} \cdot v_{\theta j}}), \forall \theta = 1, \dots, n \\ &\geq \bigvee_{l=1}^n \bigvee_{j=1}^n (z_j^{v_{il} \cdot v_{lj}}) = \bigvee_{l=1}^n \left(\bigvee_{j=1}^n z_j^{v_{lj}} \right)^{v_{il}} = \bigvee_{l=1}^n w_l^{v_{il}} = \left(V_{XX} \overset{\text{exp}}{\vee} w \right)_i \end{aligned} \quad (32)$$

这表明:

$$w \geq V_{XX} \overset{\text{exp}}{\vee} w \quad (33)$$

由不等式(28)和不等式(33)可知, $V_{XX} \overset{\text{exp}}{\vee} w = w$. \square

定理 4 表明, V_{XX} 和 T_{XX} 可在一步内对完全输入进行完全回忆. 相比之下, Hopfield 联想记忆网络的存储能力十分有限, 要求记忆模式正交, 回忆分多步完成. 这一事实表明, ALEMAM 与经典联想记忆相比具有明显优势.

4 LEMAM 的噪声性能

4.1 噪声定理

定理 5(噪声定理). 令 $X=(x^1, \dots, x^k)$, $Y=(y^1, \dots, y^k)$, 设 \tilde{x}^l 表示输入模式 x^l 的一个含噪声样本, 那么, $V_{XY} \overset{\text{exp}}{\vee} \tilde{x}^l = y^l$ 当且仅当:

$$\tilde{x}_j^l \leq x_j^l \vee \bigwedge_{i=1}^m \left(\bigvee_{\xi \neq l} (x_j^{\xi})^{\log_{y_i^{\xi}} y_i^l} \right), \forall j = 1, \dots, n \quad (34)$$

同时, 对每一个行索引 $i \in \{1, \dots, m\}$, 存在一个列索引 $j_i \in \{1, \dots, n\}$, 使得:

$$\tilde{x}_{j_i}^l = x_{j_i}^l \vee \left(\bigvee_{\xi \neq l} (x_{j_i}^{\xi})^{\log_{y_i^{\xi}} y_i^l} \right) \quad (35)$$

类似地, $T_{XY} \overset{\text{exp}}{\wedge} \tilde{x}^l = y^l$ 当且仅当:

$$\tilde{x}_j^l \geq x_j^l \wedge \bigvee_{i=1}^m \left(\bigwedge_{\xi \neq l} (x_j^{\xi})^{\log_{y_i^{\xi}} y_i^l} \right), \forall j = 1, \dots, n \quad (36)$$

同时, 对每一个行索引 $i \in \{1, \dots, m\}$, 存在一个列索引 $j_i \in \{1, \dots, n\}$, 使得:

$$\tilde{x}_{j_i}^l = x_{j_i}^l \wedge \left(\bigwedge_{\xi \neq l} (x_{j_i}^{\xi})^{\log_{y_i^{\xi}} y_i^l} \right) \quad (37)$$

证明: 在证明定理 5 之前, 首先介绍一个指数对数的常用公式:

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a} \quad (38)$$

令 $a^{\log_b c} = A \Leftrightarrow \log_b c = \log_a A = \frac{\log_c A}{\log_c a} \Leftrightarrow \log_c A = \log_c a \cdot \log_b c = \log_b a$, 即 $A = c^{\log_b a}$,

(1) 设 \tilde{x}^l 表示模式 x^l 的一个含噪声样本, 对于 $l=1, \dots, k$, $T_{XY} \overset{\text{exp}}{\wedge} \tilde{x}^l = y^l$. 那么,

$$y_i^l = \left(T_{XY} \overset{\text{exp}}{\wedge} \tilde{x}^l \right)_i = \bigwedge_{r=1}^n (\tilde{x}_r^l)^{t_{ir}} \leq (\tilde{x}_j^l)^{t_{ij}}, \forall i = 1, \dots, m \text{ 和 } \forall j = 1, \dots, n \quad (39)$$

即:

$$\begin{aligned} \log_{\tilde{x}_j^l} y_i^l &\leq \log_{x_j^l} (\tilde{x}_j^l)^{t_{ij}} = t_{ij}, \forall i=1, \dots, m, \forall j=1, \dots, n \Leftrightarrow \\ \frac{t_{ij}}{\log_{\tilde{x}_j^l} y_i^l} &\geq 1, \forall i=1, \dots, m, \forall j=1, \dots, n \Leftrightarrow \\ t_{ij} \times \log_{y_i^l} \tilde{x}_j^l &\geq 1 \Leftrightarrow (\tilde{x}_j^l)^{t_{ij}} \geq (y_i^l) \Leftrightarrow \tilde{x}_j^l \geq (y_i^l)^{1/t_{ij}}, \forall i=1, \dots, m, \forall j=1, \dots, n \Leftrightarrow \\ \tilde{x}_j^l &\geq \bigvee_{i=1}^m (y_i^l)^{1/t_{ij}} = \bigvee_{i=1}^m (y_i^l)^{\bigwedge_{\xi \neq i} \log_{y_i^\xi} x_j^\xi} = \bigvee_{i=1}^m (y_i^l)^{\bigwedge_{\xi \neq i} \log_{y_i^\xi} x_j^\xi}, \forall j=1, \dots, n \Leftrightarrow \\ \tilde{x}_j^l &\geq \bigvee_{i=1}^m (y_i^l)^{\left(\bigwedge_{\xi \neq i} \log_{y_i^\xi} x_j^\xi \right) \wedge \log_{y_i^l} x_j^l}, \forall j=1, \dots, n \Leftrightarrow \\ \tilde{x}_j^l &\geq \bigvee_{i=1}^m \left[(y_i^l)^{\bigwedge_{\xi \neq i} \log_{y_i^\xi} x_j^\xi} \wedge x_j^l \right] = x_j^l \wedge \bigvee_{i=1}^m \left[\bigwedge_{\xi \neq i} (y_i^l)^{\log_{y_i^\xi} x_j^\xi} \right], \forall j=1, \dots, n. \end{aligned}$$

根据公式(38)得到:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_j^l &\geq x_j^l \wedge \bigvee_{i=1}^m \left[\bigwedge_{\xi \neq i} (x_j^\xi)^{\log_{y_i^\xi} y_i^l} \right], \forall j=1, \dots, n \Leftrightarrow \\ \tilde{x}_j^l &\geq x_j^l \wedge \left[\bigwedge_{\xi \neq l} (x_j^\xi)^{\log_{y_i^\xi} y_i^l} \right], \forall j=1, \dots, n, \forall i=1, \dots, m \end{aligned} \tag{40}$$

这表明,不等式(36)被满足.

设对于 $i=1, \dots, m$, 不等式集合(36)不包含等号, 即, 假定存在一个行索引 $i \in \{1, \dots, m\}$, 使得:

$$\tilde{x}_j^l > x_j^l \wedge \left[\bigwedge_{\xi \neq l} (x_j^\xi)^{\log_{y_i^\xi} y_i^l} \right] = x_j^l \wedge \left[\bigwedge_{\xi \neq l} (y_i^l)^{\log_{y_i^\xi} x_j^\xi} \right], \forall j=1, \dots, n \tag{41}$$

那么,

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{T}_{XY}^{\text{exp}} \wedge \tilde{\mathbf{x}}^l \right)_i &= \bigwedge_{j=1}^n (\tilde{x}_j^l)^{t_{ij}} > \bigwedge_{j=1}^n \left[x_j^l \wedge \left(\bigwedge_{\xi \neq l} (y_i^l)^{\log_{y_i^\xi} x_j^\xi} \right) \right]^{t_{ij}} = \bigwedge_{j=1}^n \left[\bigwedge_{\xi \neq l} (y_i^l)^{\log_{y_i^\xi} x_j^\xi} \right]^{t_{ij}} \\ &= \bigwedge_{j=1}^n \left[(y_i^l)^{\bigwedge_{\xi \neq l} \log_{y_i^\xi} x_j^\xi} \right]^{t_{ij}} = \bigwedge_{j=1}^n \left[(y_i^l)^{\frac{1}{\bigwedge_{\xi \neq l} \log_{y_i^\xi} x_j^\xi}} \right]^{t_{ij}} = \bigwedge_{j=1}^n [(y_i^l)^{1/t_{ij}}]^{t_{ij}} = y_i^l \end{aligned} \tag{42}$$

因此, $\mathbf{T}_{XY}^{\text{exp}} \wedge \tilde{\mathbf{x}}^l > \mathbf{y}^l$, 这与 $\mathbf{T}_{XY}^{\text{exp}} \wedge \tilde{\mathbf{x}}^l = \mathbf{y}^l$ 相矛盾. 从而, 对每一行索引 i 必然存在一个列索引 j_i , 满足公式(37).

(2) 设 $\tilde{x}_j^l \geq x_j^l \wedge \bigvee_{i=1}^m \left[\bigwedge_{\xi \neq l} (x_j^\xi)^{\log_{y_i^\xi} y_i^l} \right], \forall j=1, \dots, n$, 由第(1)部分的证明可知, 该不等式为真当且仅当:

$$\tilde{x}_j^l \geq (y_i^l)^{1/t_{ij}}, \forall i=1, \dots, m, \forall j=1, \dots, n.$$

或者, 等价地, 当且仅当:

$$\begin{aligned} (\tilde{x}_j^l)^{t_{ij}} &\geq y_i^l, \forall i=1, \dots, m, \forall j=1, \dots, n \Leftrightarrow \\ \bigwedge_{j=1}^n (\tilde{x}_j^l)^{t_{ij}} &\geq y_i^l, \forall i=1, \dots, m \Leftrightarrow \\ \left(\mathbf{T}_{XY}^{\text{exp}} \wedge \tilde{\mathbf{x}}^l \right)_i &\geq y_i^l, \forall i=1, \dots, m \end{aligned} \tag{43}$$

这意味着 $\mathbf{T}_{XY}^{\text{exp}} \wedge \tilde{\mathbf{x}}^l \geq \mathbf{y}^l, \forall l=1, \dots, k$.

如果我们能够证明 $\mathbf{T}_{XY}^{\text{exp}} \wedge \tilde{\mathbf{x}}^l \leq \mathbf{y}^l, \forall l=1, \dots, k$, 那么就能够证明 $\mathbf{T}_{XY}^{\text{exp}} \wedge \tilde{\mathbf{x}}^l = \mathbf{y}^l, \forall l=1, \dots, k$.

任意选择 $l \in \{1, \dots, k\}, i \in \{1, \dots, m\}$, 则有,

$$\begin{aligned}
 \left(T_{XY}^{\text{exp}} \wedge \tilde{x}^l \right)_i &= \bigwedge_{j=1}^n (\tilde{x}_j^l)^{t_{ij}} \leq (\tilde{x}_i^l)^{t_{ii}} = \left[x_{j_i}^l \wedge \left(\bigwedge_{\xi \neq l} (x_{j_i}^{\xi})^{\log_{y_i^{\xi}} y_i^l} \right) \right]^{t_{ii}} = \left(x_{j_i}^l \wedge \left[\bigwedge_{\xi \neq l} (y_i^l)^{\log_{y_i^{\xi}} x_{j_i}^{\xi}} \right] \right)^{t_{ii}} \\
 &= \left[\bigwedge_{\xi=1}^k (y_i^l)^{\log_{y_i^{\xi}} x_{j_i}^{\xi}} \right]^{t_{ii}} = \left[(y_i^l)^{\bigwedge_{\xi=1}^k \log_{y_i^{\xi}} x_{j_i}^{\xi}} \right]^{t_{ii}} = \left[(y_i^l)^{\frac{1}{\sum_{\xi=1}^k \log_{y_i^{\xi}} x_{j_i}^{\xi}}} \right]^{t_{ii}} = \left((y_i^l)^{\frac{1}{t_{ii}}} \right)^{t_{ii}} = y_i^l
 \end{aligned}
 \tag{44}$$

这表明, $T_{XY}^{\text{exp}} \wedge \tilde{x}^l \leq y^l, \forall l=1, \dots, k$. □

定理 5 表明: V_{XY} 和 T_{XY} 具有一定抵抗腐蚀噪声和膨胀噪声的能力,且对于那些受到一定干扰和破坏但仍然能够做到完全回忆记忆的输入模式,在数量上给出了一个边界条件.

4.2 ALEMAM 的噪声性能

在一些例子的实验中,ALEMAM 的噪声鲁棒性明显好于 Auto RMAM(ARMAM),而不低于 Auto FMAM (AFMAM).

例 3:对于如下输入模式矩阵 X 及其两个噪声模式矩阵 X' 和 X'' ,即:

$$X = \begin{pmatrix} 45 & 55 & 51 & 63 \\ 23 & 23 & 37 & 33 \\ 13 & 40 & 15 & 60 \\ 3 & 13 & 4 & 25 \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} 45 & 55 & 5 & 6 \\ 23 & 2 & 37 & 3 \\ 1 & 40 & 15 & 6 \\ 3 & 13 & 4 & 25 \end{pmatrix}, X'' = \begin{pmatrix} 1000 & 55 & 51 & 63 \\ 23 & 23 & 370 & 33 \\ 130 & 40 & 15 & 60 \\ 3 & 13 & 4 & 250 \end{pmatrix}$$

实验结果表明:ALEMAM 的 V_{XX} 对 X 和 X' 完全回忆记忆, T_{XX} 对 X 和 X'' 完全回忆记忆.AFMAM 的实验结果与 ALEMAM 相同,即:AFMAM 的 A_{XX} 对 X 和 X' 完全回忆记忆, B_{XX} 对 X 和 X'' 完全回忆记忆.但 ARMAM 的 W_{XX} 和 M_{XX} 仅能对 X 完全回忆记忆,这表明 ALEMAM 的抗噪声性能较好.

4.3 HLEMAM 的噪声性能

异联想记忆是更加普遍的联想记忆,应该说,它比自联想记忆用途更加广泛,自联想记忆仅是异联想记忆的特例.然而,已有的 Hetero RMAM(HRMAM)和 Hetero FMAM(HFMAM)的异联想记忆性能是极不理想的.HLEMAM 的异联想记忆性能及其鲁棒性是否会好一些呢?我们做了很多实验,下面是其中之一.

例 4:设 $X = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 16 \\ 4 & 8 & 16 & 32 \\ 16 & 32 & 64 & 128 \\ 32 & 64 & 128 & 256 \end{pmatrix}, Y = (2 \ 4 \ 8 \ 16)$.

在 MATLAB-6.5 平台上,采用 HLEMAM 方法, V_{XY} 和 T_{XY} 均能实现对上述模式矩阵对 (X, Y) 的完全回忆记忆;采用 HRMAM, HFMAM 方法也能够对 (X, Y) 完全回忆记忆.但是,对于 X 的噪声模式,它们的联想记忆效果是不同的,具体实验结果见表 1.

Table 1 Noise performance of HLEMAM, HRMAM and HFMAM

表 1 HLEMAM, HRMAM 和 HFMAM 的噪声性能

x_{11}	x_{22}	x_{34}	x_{43}	x_{44}	HLEMAM		HRMAM		HFMAM	
					V_{XY}	T_{XY}	W_{XY}	M_{XY}	A_{XY}	B_{XY}
2	8	128	128	256	Y	Y	Y	Y	Y	Y
1.2	6	128	248.000 05	2	Y	N	N	N	N	N
1.999 96	6	65 544.192 3	248.0000 5	255.99	Y	Y	N	Y	N	N
1.2	2	65 544.192 3	32 769.019 999	2	Y	N	N	N	N	N
1.2	2	65 544.192 3	32 769.019 999	256	Y	N	N	N	N	N
1.2	2	65 544.192 3	32 769.019 999	1 048 739.850 239	Y	N	N	N	N	N

表 1 中:Y 表示完全回忆记忆;N 表示不完全回忆记忆; $x_{11}, x_{22}, x_{34}, x_{43}, x_{44}$ 是 X 的 5 个元素,以此作为选择变量,考察 HLEMAM 的噪声性能.从实验结果可以看出,HLEMAM 抗混合噪声的能力明显优于 HRMAM 和 HFMAM.

5 LEMAM 的应用水平

为了了解 HLEMAM 的应用可能性,我们分别利用国际通用的 UCI 机器学习数据库中的 Iris 集和 Wine 集进行了实验,并与 HRMAM,HFMAM 进行了对比.实验在 MATLAB 平台上进行.

例 5:Iris 实验.

1936 年,由 Fisher 出版的 Iris 数据集被广泛地用于分类判别和聚类分析.考虑到 HLEMAM 的运算特点和对数的性质,我们对个别数据的个别元素作了调整,主要是避开属性值取 1,以利于对数计算.但这种调整并不影响结论的正确性.该数据集包含 3 个植物种属(Iris setosa,Iris versicolor 和 Iris virginica),每种 50 个样本,总共 150 个样本的数据.每个样本含 5 种属性数据,即萼片长(sepal length)、萼片宽(sepal width)、花瓣长(petal length)、花瓣宽(petal width)以及所属类别(species classification).我们得到的“Fisher’s Iris Data”按照 38 行、4 列排列,其中,前 37 行满行,而最后一行只有两列.实验中,我们按照“纵向取”原则,即:先取第 1 列,再取第 2 列、第 3 列,最后取第 4 列,选择 Iris Data 中前 3 列的前 100 个样本(第 1 类 29 个,第 2 类 37 个,第 3 类 34 个)作为训练集,后 50 个数据(第 1 类 21 个,第 2 类 13 个,第 3 类 16 个)作为预测分类的测试集.这样,训练时输入样本 $x^l(l=1,\dots,100)$ 为四维向量,输出样本 $y^l(l=1,\dots,100)$ 为一维向量;输入模式矩阵 X 为 4×100 矩阵,输出模式矩阵 Y 为 1×100 矩阵.预测分类时,输入模式矩阵 X_1 为 4×50 矩阵,输出模式矩阵 Y_1 为 1×50 矩阵.实验结果见表 2.

Table 2 Experimental result using Iris data set

表 2 使用 Iris 数据集的实验结果

方法	HLEMAM		HRMAM		HFMAM	
记忆矩阵	V_{XY}	T_{XY}	W_{XY}	M_{XY}	A_{XY}	B_{XY}
训练精度	4/100 (3,32,45,68)	21/100 (1,7,10,17,18,19, 23,25,26,29,41,45, 52,64,75,76,84,88, 90,91,99)	4/100 (3,32,61,86)	4/100 (7,15,41,99)	4/100 (3,32,45,68)	20/100 (1,7,10,17,18,19, 23,25,26,29,41,45, 52,64,75,76,84,88, 90,91)
预测分类 准确率	2/50 (109,136)	15/50 (103,110,122,123, 124,126,127,128, 129,133,135,137, 142,147,149)	2/50 (109,136)	0/50 ()	2/50 (109,136)	15/50 (103,110,122,123, 124,126,127,128, 129,133,135,137, 142,147,149)

表 2 中,括号包含的数据为正确回忆记忆的样本序号.实验结果表明:对于 Iris 问题,在训练精度和预测分类准确性方面,HLEMAM 方法明显优于 HRMAM,略高于或不低于 HFMAM.

例 6:Wine 实验.

Wine 数据集总共有 178 个样本,每个样本有 14 个属性(其中有一个是类别属性).实验设计中,选取 128 个样本作为 HLEMAM 的学习样本,其余 50 个作为预测样本,对比方法是 HRMAM 和 HFMAM.由于数据中含有纯小数,为了方便对数计算,实验之前进行了数据预处理.将全部属性值扩大 100 倍,转换为带有整数部分的实数.另外,一般来说实数运算的结果会带有小数,而类别一般为整数.为此,在最后的回忆输出结果中使用了 MATLAB 函数库中的 fix 函数(向 0 圆整)或 round 函数(向最近整数圆整),根据实验效果,在二者中取最优.实验结果列于表 3.

Table 3 Experimental result using Wine data set

表 3 使用 Wine 数据集的实验结果

方法	HLEMAM		HRMAM		HFMAM	
记忆矩阵	V_{XY}	T_{XY}	W_{XY}	M_{XY}	A_{XY}	B_{XY}
训练精度	43/128 (0.34)	83/128 (0.65)	11/128 (0.09)	10/128 (0.08)	43/128 (0.34)	76/128 (0.59)
预测准确率	16/50 (0.32)	33/50 (0.66)	0/50 (0.0)	0/50 (0.0)	16/50 (0.32)	31/50 (0.62)

结果显示:HRMAM,HFMAM,HLEMAM 这 3 种方法的最好学习精度分别是 0.09(11/128),0.59(76/128),0.65

(83/128),最好预测准确率分别是 0(0/50),0.62(31/50)和 0.66(33/50).

显然,在分类和预测方面,HLEMAM 具有优势.尽管仍不够理想,但终究比 HRMAM 和 HFMAM 提供了更好的参考,这给异联想形态学记忆的应用带来了新的希望.

6 结束语

LEMAM 是一种新颖的形态学联想记忆方法,理论分析证明:ALEMAM 具有无限存储能力、一步回忆记忆,不存在收敛问题,具有一定的抵抗腐蚀噪声或膨胀噪声的能力,在输入完全或在一定的噪声范围内能够保证完全回忆记忆.在所做的实验中,ALEMAM 方法的抗噪性好于 ARMAM,不低于 AFMAM.HLEMAM 与 HRMAM、HFMAM 一样,即使输入模式无噪声,也不能保证完全回忆记忆.但在一定条件下(满足本文提出的定理 2 或定理 5),HLEMAM 可以实现完全回忆记忆.Iris 和 Wine 分类实验结果表明,HLEMAM 的学习误差和分类预测准确性要优于 HRMAM 和 HFMAM 方法.因此,LEMAM 是有研究价值的一种形态学联想记忆方法.本文的贡献在于提出了 LEMAM 方法,丰富了 MAM 的理论和实践,特别是进一步充实了 MAM 框架理论体系,也为深入研究和应用 LEMAM 方法奠定了基础并积累了资料.

致谢 国内外同行对 MAM 的研究成果是本文工作的基础,在此我们向这些同行表示感谢.

References:

- [1] Chen SC. Advance in research on neural networks of discrete associative memories. In: Zhou ZH, Cao CG, eds. Proc. of the Neural Networks and Their Applications. Beijing: Tsinghua University Press, 2004. 295–320 (in Chinese with English abstract).
- [2] Ritter GX, Sussner P, Diaz-de-Leon JL. Morphological associative memories. IEEE Trans. on Neural Networks, 1998,9(2): 281–293. [doi: 10.1109/72.661123]
- [3] Chen SC, Liu WL. Complex morphological associative memories and their performance analysis. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2002,13(3):453–459 (in Chinese with English abstract). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/13/453.htm>
- [4] Wang M, Wang ST, Wu XJ. Initial results on fuzzy morphological associative memories. Acta Electronica Sinica, 2003,31(5): 690–693 (in Chinese with English abstract).
- [5] Wu XS, Wang ST. Bidirectional fuzzy morphological associative memory and its robust analysis for random noise. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2005,18(3):257–262 (in Chinese with English abstract).
- [6] Wang M, Chen SC. Enhanced FMAM based on empirical kernel map. IEEE Trans. on Neural Networks, 2005,16(3):557–564. [doi: 10.1109/TNN.2005.847839]
- [7] Feng NQ, Liu CH, Zhang CP, Xu JC, Wang SX. Research on the framework of morphological associative memories. Chinese Journal of Computers, 2010,33(1):157–166 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.3724/SP.J.1016.2010.00157]
- [8] Hagan MT, Demuth HB, Beale MH, Wrote; Dai K, Trans. Neural Network Design. Beijing: China Machine Press, 2002. 399–425 (in Chinese).
- [9] Wu XS, Wang ST. Fuzzy morphological associative memory and their application in storing and recalling cell images. Journal of Image and Graphics, 2006,11(10):1450–1455 (in Chinese with English abstract).
- [10] Vázquez RA, Sossa H. Morphological hetero-associative memories applied to restore true-color patterns. Lecture Notes in Computer Sciences, 2009,5553:520–529. [doi: 10.1007/978-3-642-01513-7_57]
- [11] Vázquez RA, Sossa H. Behavior of morphological associative memories with true-color image patterns. Neurocomputing, 2009, 73(1-3):225–244. [doi: 10.1016/j.neucom.2009.09.004]
- [12] Feng NQ, Ao LH, Wang SX, Wang SX, Tian Y. Application of morphological associative memories to the associative recognition for images. Journal of He'nan Normal University (Natural Science), 2010,38(3):44–47 (in Chinese with English abstract).
- [13] Feng NQ, Tian Y, Wang XF, Qin LJ, Qiao K. Grouping of morphological hetero-associative memories. Journal of He'nan Normal University (Natural Science), 2012,40(2):155–158 (in Chinese with English abstract).
- [14] Sussner P, Esmi EL. Morphological perceptrons with competitive learning: Lattice-theoretical framework and constructive learning algorithm. Information Sciences, 2011,181(10):1929–1950. [doi: 10.1016/j.ins.2010.03.016]

- [15] Valle ME, Sussner P. Storage and recall capabilities of fuzzy morphological associative memories with adjunction-based learning. *Neural Networks*, 2011,24(1):75–90. [doi: 10.1016/j.neunet.2010.08.013]
- [16] Feng NQ, Qin LJ, Wang XF, Tian Y, Zhu XJ. Morphological associative memories applied to the implicit learning. *Journal of He'nan Normal University (Natural Science)*, 2013,41(3):156–159 (in Chinese with English abstract).
- [17] Sussner P, Valle ME. Morphological and certain fuzzy morphological associative memories for classification and prediction. In: Kaburlasos VG, Ritter GX, eds. *Computational Intelligence Based on Lattice Theory, Series: Studies in Computational Intelligence, Vol.67*. Springer-Verlag, 2007. 149–171. [doi: 10.1007/978-3-540-72687-6_8]
- [18] Araújo RA, Sussner P. An increasing hybrid morphological-linear perceptron with pseudo-gradient-based learning and phase adjustment for financial time series prediction. In: *Proc. of the 2010 IEEE World Congress on Computational Intelligence (IJCNN)*. Barcelona, 2010. 807–814. [doi: 10.1109/IJCNN.2010.5596980]
- [19] Feng NQ, Wang XF, Mao WT, Ao LH. Heteroassociative morphological memories based on four-dimensional storage. *Neurocomputing*, 2013,116:76–86. [doi: 10.1016/j.neucom.2012.01.043]

附中文参考文献:

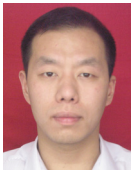
- [1] 陈松灿. 离散联想记忆神经网络研究进展. 见: 周志华, 曹存根, 编. *神经网络及其应用*. 北京: 清华大学出版社, 2004. 295–320.
- [3] 陈松灿, 刘伟龙. 复形态联想记忆及其性能分析. *软件学报*, 2002, 13(3): 453–459. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/13/453.htm>
- [4] 王敏, 王士同, 吴小俊. 新模糊形态学联想记忆网络的初步研究. *电子学报*, 2003, 31(5): 690–693.
- [5] 吴锡生, 王士同. 双向模糊形态学联想记忆网络及其抗随机噪声的研究. *模式识别与人工智能*, 2005, 18(3): 257–262.
- [7] 冯乃勤, 刘春红, 张聪品, 徐久成, 王双喜. 形态学联想记忆框架研究. *计算机学报*, 2010, 33(1): 157–166. [doi: 10.3724/SP.J.1016.2010.00157]
- [8] Hagan MT, Demuth HB, Beale MH, 著; 戴奎, 译. *神经网络设计*. 北京: 机械工业出版社, 2002. 399–425.
- [9] 吴锡生, 王士同. 模糊形态学联想记忆网络及其在细胞图像联想识别中的应用. *中国图像图形学报*, 2006, 11(10): 1450–1455.
- [12] 冯乃勤, 敖连辉, 王善侠, 王双喜, 田勇. 形态学联想记忆在图像联想识别上的应用. *河南师范大学学报(自然科学版)*, 2010, 38(3): 44–47.
- [13] 冯乃勤, 田勇, 王鲜芳, 秦利娟, 乔锟. 基于分组划分的形态学异联想记忆研究. *河南师范大学学报(自然科学版)*, 2012, 40(2): 155–158.
- [16] 冯乃勤, 秦利娟, 王鲜芳, 田勇, 祝小静. 形态学联想记忆在内隐学习中的应用. *河南师范大学学报(自然科学版)*, 2013, 41(3): 156–159.



冯乃勤(1953—),男,河南新乡人,博士,教授,CCF高级会员,主要研究领域为人工智能,神经计算,模糊理论.



宋黎明(1977—),男,博士,讲师,主要研究领域为神经网络,机器学习.



田勇(1987—),男,讲师,主要研究领域为神经网络,联想记忆.



范海菊(1979—),女,副教授,主要研究领域为神经网络,图像处理.



王鲜芳(1969—),女,博士,教授,CCF会员,主要研究领域为机器学习,生化过程建模,优化与控制.



王双喜(1984—),男,助教,主要研究领域为神经网络,联想记忆.