软件学报 ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
Journal of Software,2014,25(5):1051−1060 [doi: 10.13328/j.cnki.jos.004492]

E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel/Fax: +86-10-62562563

带有多折扣选项的滑雪租赁问题的在线和离线算法*

肖鸣宇， 沈正翔

(电子科技大学 计算机科学与工程学院,四川 成都 611731)
通讯作者: 肖鸣宇, E-mail: myxiao@uestc.edu.cn

摘 要: 研究了带有多折扣选项的滑雪租赁问题(ski-rental problem with multiple discount options,简称多折扣租赁问题)的离线和在线算法.多折扣租赁问题是经典的滑雪租赁问题的一个自然扩展,在现实生活中有着非常广泛的应用.在多折扣租赁问题中,除了租借一次装备和购买滑雪装备的选项以外,还存在多次租借装备的选项,这种多次租借可以得到折扣.一次租借次数越多,折扣就越大.规则价格子问题则是多折扣租赁问题中要求各选项的价格成倍数关系的一类子问题.证明了多折扣租赁问题的离线问题是 NP 难的,但对于规则价格子问题的离线问题,给出了一种线性时间算法.基于对离线问题的算法分析,给出了规则价格子问题的一个 2 倍竞争比的在线策略,同时证明了该问题的最优竞争比是 2.基于规则价格子问题的在线策略,又给出了多折扣租赁问题的一个新的 4 倍竞争比的在线策略,该竞争比同样达到了最优.最后,通过对现实生活中的数据和随机数据进行实验,说明所给出的在线算法具有实际应用价值.

关键词: 在线算法;竞争比分析;滑雪租赁问题;带有多折扣选项的滑雪租赁问题
中图法分类号: TP301

中文引用格式: 肖鸣宇,沈正翔.带有多折扣选项的滑雪租赁问题的在线和离线算法.软件学报,2014,25(5):1051−1060. http://www.jos.org.cn/1000-9825/4492.htm
英文引用格式: Xiao MY, Shen ZX. Online and offline algorithms for the ski-rental problem with multiple discount options. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2014,25(5):1051−1060 (in Chinese). http://www.jos.org.cn/1000-9825/4492.htm

Online and Offline Algorithms for the Ski-Rental Problem with Multiple Discount Options

XIAO Ming-Yu, SHEN Zheng-Xiang

(School of Computer Science and Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China)
Corresponding author: XIAO Ming-Yu, E-mail: myxiao@uestc.edu.cn

Abstract: This paper studies the online and offline algorithms for the ski-rental problem with multiple discount options (multiple-discount ski-rental problem), which is a natural extension of the famous ski-rental problem and has many applications in the real world. In this problem, besides the rental and buy options, there are some other options to rent equipments for a duration with some discount. The longer the duration, the more the discount. A special case of the ski-rental problem with multiple discount options, where for any two options the cost of one is an integral multiple of that of the other one, is called the regular cost subproblem. This study proves the NP-hardness of the off-line version of the ski-rental problem with multiple discount options, and gives a linear algorithm for the regular cost subproblem. Based on the analysis of the off-line problems, it proposes a 2-competitive online algorithm for the regular cost subproblem and proves the optimality of the competitive ratio. Based on the online algorithm of the regular cost subproblem, It presents a 4-competitive online algorithm for the ski-rental problem with multiple discount options that is also optimal. Some experimental results are also given to show the effectiveness of the algorithms when running on some real data and random data.

Key words: online algorithm; competitive analysis; ski-rental problem; ski-rental problem with multiple discount options

---

* 基金项目: 国家自然科学基金(71150110492, 61370071); 中央高校基本科研业务费专项资金(ZYGX2012J069)
收稿时间: 2013-05-14; 定稿时间: 2013-09-02

滑雪租赁问题(ski-rental problem)是所有在线决策问题中最重要的问题之一[1,2],该问题以及它的各种衍生问题被广泛地研究并且被运用到了计算机科学和经济等各种领域中.在滑雪租赁问题中,为了能够去滑雪,必须要选择租借还是购买滑雪的装备.如果租借装备,则每次租借装备的价格相同;如果购买了装备,则可以无限次免费使用.由于并不能提前知道将要去滑雪多少次,所以很难决定是以低廉的价格不断租借滑雪装备还是以高昂的价格购入滑雪装备.我们希望在线决策中找出一种最好的租赁策略,使得在最坏的情况下花销和实际滑雪次数的比值达到最小.

滑雪租赁问题虽然模型简单,但却是很多在线问题的子问题.多阶段租赁问题(multi-slope ski-rental problem)[3,4]是在原滑雪租赁问题上添加一些基于租借和购买的中间选项而产生的问题.该问题因为在优化能耗等方面有着广泛应用而受到众多学者的关注[3,5,6].Lotker 等人[7]研究了一种更普遍的租借和购买方案的滑雪租赁问题,El-Yaniv 等人[5]为装备更换问题建立了一个扩展的在线滑雪租赁问题,而 Azar 等人[8]则针对一些投资问题建立了基于滑雪租赁问题的计算模型.各种基于滑雪租赁问题的在线问题在国内也被研究得很火热.比如,董玉成等人[9]讨论了可退货的在线租赁问题,张韬[10]研究了无线网络中的在线信道分配问题,王扬等人[11]讨论多阶段的占线租赁问题.

滑雪租赁问题也常被用来检验在线决策问题的新计算模型或者新评估方法.例如:Al-Binali[12]基于其风险-回报模型来研究滑雪租赁问题;Albers 等人[13]提出了延迟信息决策模型,并以此分析滑雪租赁问题;Fujiwara 等人[14]以及 Xu 等人[15]分别分析了各种概率模型下滑雪租赁问题的期望竞争比.

本文将研究的带有多折扣选项的滑雪租赁问题(ski-rental problem with multiple discount options,简称多折扣租赁问题)与多阶段租赁问题类似,问题中除了租和买这两个选项,还存在多个中间选项.多阶段租赁问题的中间选项可以理解为买下部分装备而租借剩下的部分;而多折扣租赁问题的中间选项的功能相当于同时租借多次,则可以在价格上享受折扣.这两个问题都是滑雪租赁问题的自然扩展.多折扣租赁问题的应用广泛,除了滑雪租赁问题本身以外,在优化能耗方面上也有着巨大的应用[16].比如,假设有一个多种工作模式(对应问题中的选项)的处理器,每种工作模式在付出一定的能耗(对应问题中的花费)后可以工作一段时间(对应问题中的租赁时间).对于这个问题,要在处理器完成任务的前提下(工作一段长度未知的时间)使得能量消耗最少.在生活中还有其他很多与此相关的问题,比如各种手机话费优惠活动、网上收费电影点播等等.因此,对多折扣租赁问题的研究有着重要的意义.

尽管对多阶段租赁问题的研究目前已经比较成熟,但是对多折扣租赁问题的研究结果相对较少.Zhang 等人[17]证明了该问题的竞价比下界为4,并且用经典的doubling技术设计了一个4倍竞争比的在线策略.这个结果也暗示了汽车停放问题[18]在汽车停放请求连续的特殊情况下可以达到 4 倍竞争比,而原汽车停放问题则被证明了不存在 $O(n)$倍竞争比的策略.另外,张桂清等人[19]给出了当多折扣租赁问题在只有 1 个中间选项时的最佳在线策略.本文则进一步研究多折扣租赁问题及其子问题——规则价格子问题的最优在线策略.在规则价格子问题中,所有选项(包括租借、购买以及其他的折扣租赁等)中,任意两项的价格成倍数关系.本文对规则价格子问题设计了一个 2 倍竞争比的策略,并且证明了这是最优的在线策略.再基于该 2 倍竞争比的策略,给出原多折扣租赁问题的一个新的 4 倍竞争比策略.

本文第 1 节给出问题的精确定义和符号约定.第 2 节讨论多折扣租赁问题及其子问题的离线问题.第 3 节考虑这些问题的在线策略:给出规则价格子问题的一个 2 倍竞争比策略,并证明该问题的竞争比下界为 2,同时给出多折扣租赁问题的一个新的4倍竞争比策略.第4节针对一些真实数据和随机数据进行实验来说明本文中算法的实用性.最后,第 5 节对本文进行总结.

1 问题定义和符号

在多折扣租赁问题中,有若干种租借或购买的选项.假设总共有 n 种不同选项,用数字 i 表示第 i 个选项(i=1,2,…,n).选择选项 i,则需支付价格 C_i,接下来可以获得滑雪装备 D_i 次的使用权.每次滑雪前,我们必须拥有一套滑雪装备.问题的目标是:以最少的价格来滑 x 次雪.但对于在线问题来说,我们并不能预先知道 x 是多少,在每

滑一次雪以后,有可能再滑下一次,也有可能因为受伤等其他原因而再也不继续滑雪,但是前面所花费的却不能退回.因此,我们必须在线地选择滑雪装备的租借购买计划.不失一般性地,我们默认 $D_1<D_2<\ldots<D_n(n\geq 2)$,其中,$D_n=\infty$,表示购买滑雪装备.在此条件下,我们可以进一步默认 $C_1<C_2<\ldots<C_n$,否则,那些不满足的选项永远不会用到,而可以直接被删除.我们用 $I=(\{C_i\}_1^n,\{D_i\}_1^n)$ 来表示一个多折扣租赁问题的在线实例.在多折扣租赁问题中,可能出现一种特例——不存在最后一个购买选项 n.这种情况也可以简单归纳到以上多折扣租赁问题的定义中,只需要令 C_n 为一个很大的数,从而保证最优解不会选到该选项.

设 t 是一个非负整数,定义 $C_{opt}(t)$为滑 t 次雪需要的最少花费(即离线问题在 t 次滑雪时的最优解).对于任意一个在线策略 A,用 $C_A(t)$表示在策略 A 下,滑 t 次雪时的所有花销.定义 $\lambda_A(t)=\dfrac{C_A(t)}{C_{opt}(t)}$ 为在线策略 A 在 t 时刻时的竞争比,$\lambda_A=\max_t\lambda_A(t)$称为在线策略 A 的全局竞争比(或直接简称为竞争比),而对于任意$\alpha\geq\lambda_A$,在线策略 A 可以称为α倍竞争比的在线策略.一个策略 A'被称为最优在线策略,则对于任意的策略 A 都有$\lambda_{A'}(t)\leq\lambda_A(t)$.本文将对多折扣租赁问题及其子问题设计最优的在线策略.

定义选项 i 的性价比为 $R_i=\dfrac{D_i}{C_i}$.

定义 1(合理价格性). 在多折扣租赁问题中,如果 $R_i<R_{i+1}$ 对所有 $i=1,2,\ldots,n-1$ 成立,则称该问题具有合理价格性.

该性质可以理解为:一次性租借越多,意味着折扣就越大.原多折扣租赁问题并不需要假设问题具有合理价格性.

定义 2(规则价格性). 在多折扣租赁问题中,如果对 $i=1,2,\ldots,n-1$, $K_i=\dfrac{C_{i+1}}{C_i}$ 是一个正整数,则称该问题具有规则价格性.

该性质要求后一个选项的价格是前一个选项价格的整数倍.这个要求看似约束比较强,但是在现实生活中却也经常出现,比如,某电话公司的优惠活动经常包括:50 元、100 元、200 元等方案.在多折扣租赁问题中,如果假设问题具有规则价格性(不需假设合理价格性),则称该问题为规则价格子问题.本文将通过对规则价格子问题的讨论来研究多折扣租赁问题.

2 离线问题

离线问题能够帮助我们更好地理解在线问题的组合性质.本节将讨论离线问题的一些性质及其计算复杂度.在离线问题中,滑雪次数 x 是一个事先知道的常数.这个离线问题也可以翻译成这样一个区间覆盖问题:有一个长度为 x 的区间,需要用一些长度为 D_i、价格为 C_i 的小区间段($i=1,2,\ldots,n$)去覆盖,使得所有小区间段长度和大于等于 x,且所有使用的小区间的价格和最小,其中,每种小区间段均可使用无限多次.我们用(I,x)来表示问题的一个离线实例.而离散问题(I,x)的一个解为一个多重集合 S,S 中的多重元素对应被选的选项.

引理 3. 多折扣租赁问题的离线问题是 NP 难的,即使问题中每个选项只能被选择 1 次.

证明:这里,将一个已知的 NPC 问题——完全子集和问题(unbounded subset-sum problem)[20]在多项式时间下归约到离线多折扣租赁问题上来证明这个引理.完全子集和问题是完全背包问题在物品的价格和重量相等时的一个特例,属于最早被证明是 NP 完全的问题之一[20].在完全子集和问题中,给定一个正整数的集合 $A=\{a_1, a_2,\ldots,a_n\}$和一个正整数 B,问是否存在一组非负整数 $x_i(i=1,2,\ldots,n)$,使得 $\sum_{i=1}^n x_i a_i=B$.对于一个完全子集和问题的实例,构造如下一个多重折扣滑雪租赁问题的离线实例:滑雪的时间 x 等于完全子集和问题中的正整数 B,问题中有 n 个租借选项分别对应集合 A 中一个整数:第 i 个选项的价格 C_i和使用次数 D_i均等于 a_i,另外构造最后一个购买选项,使得其价格 C_{n+1} 非常高(这样这个选项永远不会被选到).容易看出:当完全子集合问题的回答为“是”时,当且仅当离散多折扣租赁问题的最优解的价格是x.这样就证明了多折扣租赁问题在离线的情况下都是难解的,在 P≠NP 的前提下,不存在多项式时间算法. □

我们可以用与背包问题相似的伪多项式时间的动态规划算法去解决该离线问题.基于这种伪多项式时间算法,可以得到任意逼近最优解的多项式算法,即 PTAS.

尽管多折扣租赁问题的离线问题是 NP 难的,但是规则价格子问题的离线问题却存在线性时间算法.首先证明规则价格子问题存在如下一个性质:

引理 4. 任给一个规则价格子问题(在线或离线)的实例 I,可以在线性时间内删除 I 中若干选项,得到另一个规则价格子问题 I',使得 I'的最优解也是 I 的最优解,同时,I'具备合理价格性.

证明:假设 I 不具有合理价格性,我们证明至少可以删除其中 1 个选项而不会影响到最优解.假设$\exists i<j$,使得 $R_i>R_j$.如果最优解中使用了选项 j 来覆盖一个长度为 D_j 的区间,那么可以购买 $\frac{D_j}{D_i}$ 次选项 i 来覆盖这个长度为 D_j 的区间,并且价格会更优.这样得出矛盾:原解不是最优解.这就说明了最优解不会用到选项 j,于是可以删除掉选项 j.我们可以在一次搜索内将所有可以删除的选项找出来,因此可以在线性时间内将原实例转化成一个具备合理价格性的实例. □

为方便起见,下文中将默认规则价格子问题都具备合理价格性.在具备合理价格性的规则价格子问题的离线问题中,我们可以通过一种线性时间的贪心算法来求得最优解.在介绍这种算法以前,我们给出该问题的更多性质.

引理 5. 在具备合理价格性的规则价格子问题的离线问题中,每一个最优解中选择选项 i 的重数小于 $\frac{C_{i+1}}{C_i}=K_i$ 次.

证明:假设某个最优解中选项 i 至少被选择了 K_i 次,则通过选择 K_i 次选项 i,可以滑雪 $\frac{C_{i+1}}{C_i}D_i$ 次.由于该问题具备合理价格性,因此 $\frac{C_{i+1}}{C_i}D_i<D_{i+1}$.那么,我们可以在这个解中用一个选项 i+1 替换 K_i 个选项 i 来得到一个更优的解.这样,与最优解的最优性相矛盾,说明原假设不成立. □

引理 6. 在具备合理价格性的规则价格子问题的离线问题中,有如下两个性质:

(1) 如果 $x\geqslant D_n$,则最优解至少选择了 $\left\lfloor\frac{x}{D_n}\right\rfloor$ 次选项 n;

(2) 如果 $D_{i+1}\geqslant x>D_i(i=1,2,\ldots,n-1)$,则最优解要么选择了选项 i+1,要么选择了至少 $\left\lfloor\frac{x}{D_i}\right\rfloor$ 次选项 i.

证明:为了方便阐述,假设这里有第 n+1 个选项,其中,D_{n+1} 和 C_{n+1} 均为无穷大.这样,可以将引理中的性质(1)合并到性质(2)中来一起证明.

我们先证明任意一个最优解必定选择了选项 i+1 或者选项 i.由引理 5,最优解购买选项 $j(j=1,2,\ldots,n-1)$小于 K_j 次.假设一个最优解没有选择选项 i 或 i+1(同样也不会选择选项 $k>i+1$,因为 $x\leqslant D_{i+1}$,这样,选项 i+1 优于选项 $k>i+1$),则这个解最多只能覆盖长度 $\sum_{j=1}^{i-1}(K_j-1)D_j<D_i$ (由合理价格性可证).而 $x>D_i$,产生矛盾,说明原假设不成立.

接着我们证明:如果购买了选项 i,那么就至少会购买 $\left\lfloor\frac{x}{D_i}\right\rfloor$ 次.首先,因为已经购买了选项 i,说明最优解不可能购买选项 i+1 了,因为这样不如直接购买选项 i+1 更优.而由刚才的证明,最优解必须要购买选项 i 或者选项 i+1,所以最优解必须重复购买选项 i,直到 $x<D_i$ 为止.由此可以计算出最少购买了 $\left\lfloor\frac{x}{D_i}\right\rfloor$ 次选项 i. □

为了给规则价格子问题的离线问题设计一个递归算法,我们还需要如下一个引理:

引理 7. 若多折扣租赁问题的离线问题(I,x)的一个最优解 S 选择了选项 i,则$(I,x-D_i)$的任意一个最优解 S_0 再加上选项 i 组成(I,x)的一个最优解.

证明:令 S' 为 S 中去掉一个选项 i 后的集合,显然,S' 中所有选项可以覆盖长度至少为 $x-D_i$ 的区间,则 S' 也是 $(I,x-D_i)$ 的一个解.而由 S_0 的最优性可知,S_0 中所有选项价格和不会比 S' 中所有选项价格和大.这样,S_0 再加上选项 i 则可构成 (I,x) 的一个最优解.

令 $C_{opt}(x)$ 为具备合理价格性的规则价格子问题的离线问题中滑 x 次雪的最优价格,并且令 $D_{n+1}=\infty, C_{n+1}=\infty$,则根据以上引理 6 和引理 7,可以得到如下公式:

$$C_{opt}(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \min\left(C_{i+1}, C_{opt}\left(x-\left\lfloor\dfrac{x}{D_i}\right\rfloor D_i\right)+\left\lfloor\dfrac{x}{D_i}\right\rfloor C_i\right), & D_{i+1}\geqslant x>D_i\end{cases}.$$

利用该公式递归求解,就可以在线性运行时间内计算出离线问题的最优花销.因为该公式最多递归 n 次,而每次的计算可以视为常数时间. □

由以上引理 4~引理 7,可以得到离线规则价格子问题的一种线性时间算法.为了方便叙述,在以下算法中,我们假设输入的例子具有合理价格性.若原始输入不具备合理价格性,则可根据引理 4 来进行一个线性时间的预处理.算法具体描述如下:

离线算法. $A_0(x,I,j)$.

输入:滑雪次数 x, $I=(\{C_i\}_1^n,\{D_i\}_1^n)$ 和一个整数 j,其中,I 具备合理价格性,并且 j 的初始值为 n.

输出:滑 x 次雪的最优花费.

1. If $x=0$, then return 0.
2. Elseif $x<D_j$, then return $A_0(x,I,j-1)$.
3. Else $\{D_j<x\leqslant D_{j+1}\}$, return $\min\left(C_{j+1}, A_0\left(x-\left\lfloor\dfrac{x}{D_j}\right\rfloor D_j, I, j-1\right)+\left\lfloor\dfrac{x}{D_j}\right\rfloor C_{\rightleftarrows j}\right)$,其中,$C_{n+1}=\infty, D_{n+1}=\infty$.

算法的正确性由引理 6 和引理 7 可以得到.不难看出:在步骤 2 和步骤 3 中,都递归调用算法本身,在每次调用中,参数 j 均减小 1,因此,该算法最多执行 n 步.这样,算法总体运行时间为线性时间.

定理 8. 规则价格子问题的离线问题可以在线性时间内求得最优解.

3 在线策略

3.1 若干基本性质

本节将针对文中的在线问题进行在线策略设计,而在线策略将均以第 1 节中定义的全局竞争比为优化目标.根据定义,全局竞争比是在 t 的定义域上取得的最大值.而 t 的取值范围是所有的非负整数,是一个无限集.为了求得全局竞争比,我们往往需要一些辅助性质将全局竞争比的取值范围缩小到若干可能的值.对于多折扣租赁问题,有如下引理:

引理 9. 设 A 为任意一个多折扣租赁问题的在线策略,令 s_i 为策略 A 中第 i 次购买选项的时刻($i\geqslant 1$),则策略 A 的竞争比 $\lambda_A=\max_i \lambda_A(s_i)$.

证明:假设策略 A 的全局竞争比在 t' 时间达到,而 t' 并不是策略 A 中购买选项的时间,那么在比 t' 小的整数中选择一个最大的整数 t^*,使得 t^* 是策略 A 中购买选项的时间.

根据 t^* 的最大性,我们知道 $C_A(t^*)=C_A(t')$.同时,由于 $t^*<t'$,可以得到 $C_{opt}(t^*)\leqslant C_{opt}(t')$.这样就有:

$$\lambda_A(t^*)=\frac{C_A(t^*)}{C_{opt}(t^*)}\geqslant\frac{C_A(t')}{C_{opt}(t')}=\lambda_A(t').$$

这就说明,策略 A 全局竞争比的值只会在购买选项的时刻点的竞争比的值中达到. □

以上引理说明:在考虑多折扣租赁问题及其子问题的在线策略的竞争比时,可以只考虑策略中购买选项的时间点,而不是所有可能的时间点.

另外,在所有的在线策略中,假设每次购买选项的时刻都是必要时间点,即在当时不能不购买任何选项而继

续滑雪下去.不难发现:当这个性质不满足的时候,我们可以延后购买一些选项(而保持购买选项的次序)来得到不比当前策略差的在线策略.

3.2 规则价格子问题的在线策略

本节主要考虑规则价格子问题的在线策略.每一个在线策略给出一个时间序列以及序列上每个时间点应该购买的选项.

对于规则价格子问题,我们给出如下的一个简单的在线策略,当然,其竞争比的证明却不是那么直观.

在线策略 A_1. 对于一个规则价格子问题,在线策略 A_1 是:对选项 i 从 1 到 $n-1$ 依次购买 K_{i-1} 次,然后购买选项 n,每次购买时间点都是必要时间点.

为了证明这个在线策略可以达到竞争比 2,我们证明如下引理:

引理 10. 在线策略 A_1 中,设 t_{i_j} 为第 $j(j\geqslant 1)$次购买选项 i 的时刻,则 $C_{opt}(t_{i_j})=jC_i$.

证明:首先证明当 j=1 时该引理成立.

我们用归纳法来证明(对 i 进行归纳).第 1 次购买选项 1 的时刻 $t_{1_1}=1$,显然有 $C_{opt}(t_{1_1})=C_1$. 假设对所有 $i'<i$, $C_{opt}(t_{i'_1})=C_{i'}$ 都成立,其中,$i>1$.我们证明 $C_{opt}(t_{i_1})=C_i$ 也成立.根据规则价格性有:

$$\sum_{j=1}^{i-1}(K_j-1)C_j=C_i-C_1\leqslant C_i-1.$$

同时,由合理价格性不难得到:

$$t_{i_1}=1+\sum_{j=1}^{i-1}(K_j-1)D_j<D_i.$$

又由离线最优解计算公式可以得到:

$$C_{opt}(t_{i_1})=\min\left(C_i,C_{opt}\left(t_{i_1}-\left\lfloor\frac{t_{i_1}}{D_{i-1}}\right\rfloor D_{i-1}\right)+\left\lfloor\frac{t_{i_1}}{D_{i-1}}\right\rfloor C_{i-1}\right),$$

由合理价格性可知:

$$\sum_{j=1}^{i-2}(K_j-1)D_j<D_{i-1}-1,$$

因此可以得到:

$$\left\lfloor\frac{t_{i_1}}{D_{i-1}}\right\rfloor=K_{i-1}-1.$$

又根据定义可知:

$$t_{i_1}-\left\lfloor\frac{t_{i_1}}{D_{i-1}}\right\rfloor D_{i-1}=t_{(i-1)_1},$$

所以有:

$$C_{opt}(t_{i_1})=\min(C_i,C_{opt}(t_{(i-1)_1})+(K_{i-1}-1)C_{i-1}).$$

而由归纳假设可知 $C_{opt}(t_{(i-1)_1})=C_{i-1}$,所以可以得到:

$$\min(C_i,C_{opt}(t_{(i-1)_1})+(K_{i-1}-1)C_{i-1})=\min(C_i,C_i)=C_i.$$

由此得证.

下面证明:对于 $j>1$ 时,该引理仍然成立.

引理 6 的一个较弱的结果是:如果 $x\geqslant D_n$,则最优解选择了选项 n;如果 $D_{i+1}\geqslant x>D_i(i=1,2,\ldots,n-1)$,则最优解要么选择了选项 $i+1$,要么选择了选项 i.根据这个结果,可以得到如下的递归公式:

$$C_{opt}(t_{i_j})=\min(C_{i+1},C_{opt}(t_{i_j}-D_i)+C_i),$$

其中,$C_{n+1}=\infty$.注意到,当 $j>1$ 时,$t_{i_j}-D_i=t_{i_{j-1}}$.

我们已经证明了 $C_{opt}(t_{i_1})=C_i$, 由以上递归式子,不难得到 $C_{opt}(t_{i_j})=\min(C_{i+1},jC_i)=jC_i$. □

定理 11. 在线策略 A_1 的竞争比为 $2-\frac{C_1}{C_n}$.

证明:由引理 9 可知:分析策略 A_1 的竞争比,只需要考虑策略中每次购买选项的时刻 t_{i_j} (t_{i_j} 表示在策略 A_1 中第 j 次购买选项 i 的时刻).

由策略 A_1 的定义可知:在时刻 t_{i_j} 购买了选项 i'共 $K_{i'-1}$ 次(i'=1,2,…,i−1),且购买了选项 i 共 j 次.这样,

$$C_{A_1}(t_{i_j})=\sum_{i'=1}^{i=1}(K_{i'-1}-1)C_{i'}+jC_i=(j+1)C_i-C_1.$$

又由引理 10 可知, $C_{opt}(t_{i_j})=jC_i$, 则策略 A_1 在时刻 t_{i_j} 的竞争比为 $\frac{(j+1)C_i-C_1}{jC_i}\leqslant 2-\frac{C_1}{C_i}$. 由此可得该定理成立. □

3.3 规则价格子问题的竞争比下界

下面证明在线策略 A_1 是规则价格子问题的最优在线策略,即任何在线策略的竞争比都不小于 $2-\frac{C_1}{C_n}$.

首先考虑如下引理:

引理 12. 在规则价格子问题中,对任意的非负整数时间点 t 都有 $C_{opt}(t+1)=C_{opt}(t)$或者 $C_{opt}(t+1)=C_{opt}(t)+C_1$.

证明:假设 $C_{opt}(t+1)\neq C_{opt}(t)$,则由规则价格性可知 $C_{opt}(t+1)=C_{opt}(t)+aC_1$,其中,$a$ 为自然数.

考虑到可以在 $C_{opt}(t)$基础上再花销 C_1 来滑第 t+1 次雪,因此 a 必须取值为 1. □

基于引理 12 我们可以证明如下的定理 13:

定理 13. 对规则价格子问题的任意在线策略 A,其竞争比不小于 $2-\frac{C_1}{C_n}$.

证明:若策略 A 不购买选项 n,则当 t 趋向无穷大时的竞争比也将趋向无穷大.现在假设策略 A 在 t^*时刻购买了选项 n.若 t^*=1,则 $\lambda_A(1)=\frac{C_A(1)}{C_{opt}(1)}=\frac{C_n}{C_1}\geqslant 2$, 否则 t^*>1.设 $C_{opt}(t^*)=x$,由引理 12 可知,$C_{opt}(t^*-1)\geqslant x-C_1$.这样就有:

$$C_A(t^*)=C_A(t^*-1)+C_n\geqslant C_{opt}(t^*-1)+C_n\geqslant x+C_n-C_1.$$

策略 A 在 t^*时刻的竞争比为

$$\frac{C_A(t^*)}{C_{opt}(t^*)}\geqslant\frac{x+C_n-C_1}{x},$$

其中,x 始终不超过 C_n.而 $\frac{x+C_n-C_1}{x}$ 在 $x=C_n$ 时达到最小值 $2-\frac{C_1}{C_n}$, 所以策略 A 的竞争比不小于 $2-\frac{C_1}{C_n}$. □

该定理说明,本文第 3.2 节给出的策略 A_1 是最优在线策略.

3.4 多折扣租赁问题的在线策略

在规则价格子问题中,我们得到一个竞争比为 2 的在线策略.本节将基于这个 2 倍竞争比策略,为多折扣租赁问题设计一个竞争比为 4 的在线策略.

我们采用的是一种放缩的方法.对任意一个多折扣租赁问题实例 I,在保持各选项 D_i 不变的情况下,适当扩大 C_i 来构造一个规则价格子问题实例 I,然后证明 I'的一个 2 倍竞争比的在线策略对应于 I 的一个 4 倍竞争比的在线策略.

对于多折扣租赁问题实例 $I=(\{C_i\}_1^n,\{D_i\}_1^n)$,构造 $I'=(\{C'_i\}_1^n,\{D'_i\}_1^n)$ 如下: $D'_i=D_i$;而 C'_i 由如下公式递归给出:

$$C'_i=\begin{cases}C_i, & i=1\\ K'_iC'_{i-1}, & i\geqslant 2\end{cases},$$

其中, K'_i 是最小的正整数,使得 $K'_iC'_{i-1}\geqslant C_i$. 注意到 K'_i 可以为 1,所以通过这样的放缩,可能会有一些选项的价格变为相同(即 $C'_i=C'_{i+1}$ 对于某些 i 成立).在这些价格相同的选项中, D'_i 相对较小的就不会被最优在线策略选用而

可以被删除掉.通过这样一个删除以后,得到的实例 I' 则是一个符合合理价格性的规则价格子问题实例.用 A_2 表示 I 的一个策略:该策略是依照策略 A_1 在 I' 问题中依次选择对应选项而得到的策略.因为 $D_i'=D_i$,所以 A_2 也是 I 的一个可行策略(即保证在每次滑雪时都租借或购买了装备).下面证明 A_2 是一个竞争比为 4 的策略.

用 $C'_{opt}(t)$ 和 $C'_{A_1}(t)$ 分别表示 I' 问题滑 t 次雪的离线最优花销和策略 A_1 的在线花销,用 $C_{opt}(t)$ 和 $C_{A_2}(t)$ 分别表示 I 问题对应的离线最优花销和策略 A_2 的在线花销.因为 $D_i'=D_i$, I' 的离线最优策略同样是 I 的一个可行策略.因为在 C_i' 的定义中 K_i' 是取的最小整数,因此有 $C_i'<2C_i$,则

$$C_{opt}(t)>0.5\,C'_{opt}(t).$$

另一方面,由于 $C_i'\geqslant C_i$,则

$$C_{A_2}(t)\leqslant C'_{A_1}(t).$$

又因为 A_1 是一个 2 倍竞争比策略,则

$$\frac{C'_{A_1}(t)}{C'_{opt}(t)}\leqslant 2.$$

综上可得:

$$\frac{C_{A_2}(t)}{C_{opt}(t)}\leqslant\frac{C'_{A_1}(t)}{0.5C'_{opt}(t)}\leqslant 4.$$

Zhang 等人[17]证明了多折扣租赁问题的竞争比下界为 4,这也说明了这里给出的 4 倍竞争比策略也是最优的在线策略.

4 实验结果

本节将用本文的在线策略对生活中一些具体的例子和随机例子进行实验分析,同时还将本文策略和文献[17]中给出的 doubling 策略进行了对比.本文收集了如下 3 个生活中的例子:

例 1:联通公司某种电话卡发短信 0.1 元每条,存在两种包月优惠套餐:10 元套餐可以发 130 条,而 20 元套餐可以发 300 条.

例 2:成都某小区上网包月为 60 元每月,如果一次性包半年则享受优惠价格 350 元同时赠送一个月,如果一次性包一年则享受优惠价格 700 元同时赠送 3 个月.

例 3:某款大巴车售价为 120 万元,租一天的价格为 0.2 万元,租 5 天的价格为 0.9 万元,租一个月(按 30 天算)的价格为 4.8 万元.

在前两个例子中没有购买选项,因此假设这两个例子中的购买选项价格非常高而永远不会购买.以上 3 个例子的实验结果由表 1 给出(表中 x 为租借的时间,在例 1 中为所发短信的条数,在例 2 中为上网包月的月份数,在例 3 中为租借大巴的天数):

Table 1 Experimental results on real data

表 1 真实数据的实验结果

实例	本文策略	竞争比	doubling 策略	竞争比
例 1	$x<99$ 时不购买任何套餐 $99\leqslant x<229$ 时选择 10 元套餐 $229\leqslant x$ 时选择 20 元套餐	1.995	$x<100$ 时不够买任何套餐 $100\leqslant x<230$ 时选择 10 元套餐 $230\leqslant x$ 时选择 20 元套餐	2
例 2	$x<5$ 时选择单月购买 $5\leqslant x<12$ 时选择一次性购买半年 $12\leqslant x$ 时选择一次性购买 1 年	1.971	$x<6$ 时选择单月购买 $6\leqslant x<13$ 时选择一次性购买半年 $13\leqslant x$ 时选择一次性购买 1 年	2.029
例 3	$x<4$ 时选择租借 1 天 $4\leqslant x<24$ 时选择租借 5 天 $24\leqslant x<714$ 时选择租借 30 天 $714\leqslant x$ 时选择永久购买	2.044	$x<5$ 时选择租借 1 天 $5\leqslant x<30$ 时选择租借 5 天 $30\leqslant x<750$ 时选择租借 30 天 $750\leqslant x$ 时选择永久购买	2.060

表 1 中的数据说明:在以上 3 个实际数据中,本文的在线策略可以得到更好的竞争比.可以看出,这 3 组数据

都比较接近规则价格性.事实上,生活中很多实际数据都接近这个性质:如果一次性租借的次数翻 1 倍(或几倍)则给予一定优惠,这个优惠往往不会很大,所以价格也是接近翻了 1 倍(或几倍),这样就有近似规则价格性.表 2 中给出了本文策略在一些随机数据下的运行结果以及与 doubling 策略的比较情况,其中特别考虑了数据在接近规则价格性下的各种情况.文中用规则价格偏移量来衡量数据接近规则价格性的程度.

定义规则价格偏移量为$\rho=\lceil K_i\rceil-K_i$(其中,$K_i=\dfrac{C_{i+1}}{C_i}$),显而易见:当规则价格偏移量$\rho=0$时,这个例子具备规则价格性.

在以下实验中,本文总共有 8 组测试用例,每组在规定价格偏移量下随机生成 3 000 组数据,其中,租赁选项个数为 3,4 和 5(不包括购买选项)的情况下各 1 000 组.实验的结果由下表 2 给出,表中的优胜比指的是:在本组测试数据中,本文策略的竞争比不比 doubling 策略竞争比大的百分比.

Table 2 Experimental results on random data

表 2 随机数据的实验结果

测试用例	规则价格偏移量	优胜比(%)		
		3 个租赁选项	4 个租赁选项	5 个租赁选项
1	0.01	100	100	100
2	0.02	100	100	95.8
3	0.05	100	98.8	88.8
4	0.10	98.6	90.5	84.9
5	0.15	98.8	93.2	82.0
6	0.20	97.7	90.0	79.2
7	0.50	98.6	90.2	76.5
8	1(完全随机)	97.6	89.1	75.6

从表 2 中可以看出:在绝大多数情况下,本文的在线策略比 doubling 策略具有更小的竞争比;特别是当价格偏移量小且租赁选项个数小时,本文策略可以达到100%的优越性.而规则价格偏移量小和租赁选项个数小这两个性质符合自然规律,生活中绝大多数数据都满足这样的性质.

5 总 结

本文通过对多折扣租赁问题的深入分析,给出了该问题及其规则价格子问题的一些性质;基于这些性质,对这些问题设计了高效的离线和在线算法.具体包括:对离线的规则价格子问题设计了一种线性时间的算法,对在线的规则价格子问题设计了一个竞争比为 2 的在线策略,同时证明了该问题竞争比的下界为 2,还对多折扣租赁问题设计了一个竞争比为 4 的在线策略.

虽然文献[17]也给出了多折扣租赁问题的基于 doubling 技术的一个 4 倍竞争比在线策略,但是实验数据说明,本文的策略在绝大多数的情况下可以得到更好的竞争比.

致谢 感谢日本丰桥科技大学(Toyohashi University of Technology)的 Hiroshi Fujiwara 副教授参与本文研究内容的讨论,感谢电子科技大学计算机科学与工程学院拔尖人才计划组的支持.

References:

[1] Karp R. On-Line algorithms versus off-line algorithms: How much is it worth to know the future? In: Proc. of the IFIP 12th World Computer Congress, Vol.1. 1992. 416−429.

[2] Karlin AR, Manasse MS, Rudolph L, Sleator DD. Competitive snoopy caching. Algorithmica, 1988,3(1-4):79−119. [doi: 10.1007/BF01762111]

[3] Lotker Z, Patt-Shamir B, Rawitz D. Rent, lease or buy: Randomized algorithms for multislope ski rental. In: Proc. of the STACS 2008. New York: Springer-Verlag, 2008. 503−514. [doi: 10.4230/LIPIcs.STACS.2008.1331]

[4] Fujiwara H, Kitano T, Fujito T. On the best possible competitive ratio for multislope ski rental. In: Proc. of the ISAAC 2011. LNCS 7074, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. 544−553. [doi: 10.1007/978-3-642-25591-5_56]

[5] El-Yaniv R, Karp R. Nearly optimal competitive online replacement policies. Mathematics of Operations Research, 1997,22(4): 814−839. [doi: 10.1287/moor.22.4.814]

[6] Augustine J, Irani S, Swamy C. Optimal power-down strategies. In: Proc. of the 45th IEEE Symp. on Foundations of Computer Science. Washington: IEEE Computer Society, 2004. 530−539. [doi: 10.1109/FOCS.2004.50]

[7] Lotker Z, Patt-Shamir B, Rawitz D. Ski rental with two general options. Information Processing Letters, 2008,108(6):365−368. [doi: 10.1016/j.ipl.2008.07.009]

[8] Azar Y, Bartal Y, Feuerstein E, Fiat A, Leonardi S, Rosen A. On capital investment. Algorithmica, 1999,25(1):22−36. [doi: 10.1007/PL00009281]

[9] Dong YC, Xu YF, Xu WJ. Competitive analysis and risk-reward model for online rental problem with canceling buying-permission. Chinese Journal of Management Science, 2007,18(4):28−33 (in Chinese with English abstract).

[10] Zhang T. Online channel scheduling in wireless networks. Journal of Computer Research and Development, 2008,45(S1):31−34 (in Chinese with English abstract).

[11] Wang Y, Dong YC, Xu YF. Competitive analysis for the online multistage leasing problem. Chinese Journal of Management Science, 2009,17(3):101−106 (in Chinese with English abstract).

[12] Al-Binali S. A risk-reward framework for the competitive analysis of financial games. Algorithmica, 1999,25(1):99−115. [doi: 10.1007/PL00009285]

[13] Albers S, Charikar M, Mitzenmacher M. On delayed information and action in on-line algorithms. Information and Computation, 2001,170(2):135−152. [doi: 10.1006/inco.2001.3057]

[14] Fujiwara H, Iwama K. Average-Case competitive analyses for ski-rental problems. Algorithmica, 2005,42(1):95−107. [doi: 10.1007/s00453-004-1142-x]

[15] Xu Y, Xu W, Li H. On the on-line rent-or-buy problem in probabilistic environments. Journal of Global Optimization, 2007,38(1): 1−20.

[16] Irani S, Pruhs K. Algorithmic problems in power management. ACM SIGACT News, 2005,36(2):63−76. [doi: 10.1145/1067309.1067324]

[17] Zhang G, Poon CK, Xu Y. The ski-rental problem with multiple discount options. Information Processing Letters, 2011,111(20): 903−906. [doi: 10.1016/j.ipl.2011.06.012]

[18] Meyerson A. The parking permit problem. In: Proc. of the 46th IEEE Symp. on Foundations of Computer Science. Washington: IEEE Computer Society, 2005. 274−284. [doi: 10.1109/SFCS.2005.72]

[19] Zhang GQ, Xu YF, Wang Y. Competitive analysis for the online rental problem with multiple options. Operations Research and Management Science, 2012,21(1):11−18 (in Chinese with English abstract).

[20] Garey MR, Johnson DS. Computers and Intractability: A Guide to NP-Completeness. San Francisco: Freeman Co., 1979.

附中文参考文献:

[9] 董玉成,徐寅峰,徐维军.可退货在线租赁问题竞争分析及其风险回报模型.中国管理科学,2007,18(4):28−33.

[10] 张韬.无线网络中的在线信道分配问题.计算机研究与发展,2008,45(增刊 1):31−34.

[11] 王扬,董玉成,徐寅峰.多阶段占线赁购问题竞争分析.中国管理科学,2009,17(3):101−106.

[19] 张桂清,徐寅峰,王扬.在线多租赁选择问题的最优竞争策略.运筹与管理,2012 21(1):11−18.

肖鸣宇(1979－),男,湖南衡山人,博士,副教授,博士生导师,CCF 会员,主要研究领域为算法分析与设计,图算法,图论,最优化,精确算法,参数算法.
E-mail: myxiao@uestc.edu.cn

沈正翔(1991－),男,本科生,主要研究领域为在线算法,参数算法.
E-mail: zxshen17@gmail.com