软件学报 ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
Journal of Software,2012,23(9):2235−2247 [doi: 10.3724/SP.J.1001.2012.04179]

E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel/Fax: +86-10-62562563

Łukasiewicz 命题逻辑中命题的 Borel 概率真度理论和极限定理*

周红军

(陕西师范大学 数学与信息科学学院,陕西 西安 710062)

Theory of Borel Probability Truth Degrees of Propositions in Łukasiewicz Propositional Logics and a Limit Theorem

ZHOU Hong-Jun

(College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)

+ Corresponding author: E-mail: hjzhou@snnu.edu.cn; sdzhjun@gmail.com

Zhou HJ. Theory of Borel probability truth degrees of propositions in Łukasiewicz propositional logics and a limit theorem. *Journal of Software*, 2012,23(9):2235−2247 (in Chinese). http://www.jos.org.cn/1000-9825/4179.htm

Abstract: By means of Borel probability measures on the valuation set endowed with the usual product topology, the notion of probability truth degrees of propositions in n-valued and [0,1]-valued Łukasiewicz propositional logics is introduced. Its basic properties are investigated, and the integral representation theorem and the limit theorem of probability truth degree functions in n-valued case, in particular, are obtained. Theses results show that the notion of truth degree existing in quantitative logic is just a particular case of Borel probability truth degrees, and a more general quantitative model based on the notion of Borel probability truth degree for uncertainty reasoning can be then established.
Key words: Łukasiewicz propositional logic; Borel probability measure; probability truth degree; limit theorem

摘 要: 通过视赋值集为通常乘积拓扑空间,利用其上的 Borel 概率测度在 n 值及连续值 Łukasiewicz 命题逻辑系统中引入了命题的 Borel 概率真度概念,讨论了它的基本性质,特别是给出了 n 值情形中概率真度函数的积分表示定理,并得到了其与连续情形概率真度函数之间关系的一个极限定理.结果表明,计量逻辑学中命题的真度概念只是所研究工作的一个特例,因而基于概率真度概念可以为不确定性推理建立一种更为宽泛的计量化模型.
关键词: Łukasiewicz 命题逻辑;Borel 概率测度;概率真度;极限定理
中图法分类号: TP301 **文献标识码**: A

尽管二值逻辑在非此即彼式的数学推理中取得了巨大成功,但它却不能有效地模拟人类的思维过程.因为人们在实际生活中遇到的命题往往都是模糊的、不确定的,因而不能再简单地用数字 1(表示真)或 0(表示假)来描述一个命题的真假.请看一个著名的例子:在 1920 年,Łukasiewicz 问"明年 12 月 21 日中午我将在华沙"这一命题是真还是假?再比如,问"人的寿命一般都不超过 90 岁"是真还是假?显然,这种带有不确定性的命题是难以

* 基金项目: 国家自然科学基金(61005046); 教育部高等学校博士学科点专项科研基金(20100202120012); 陕西省自然科学基础研究计划(2010JQ8020)
收稿时间: 2010-08-20; 修改时间: 2011-11-02; 定稿时间: 2011-12-30

判断真假的.在逻辑上,处理不确定性信息的主要方法就是通过接受除经典真值 1 和 0 之外的更多真值建立多值逻辑系统[1−4].当初,Łukasiewicz 就是通过添加中间真值 0.5 建立了第 1 个多值逻辑系统,现称为三值 Łukasiewicz 逻辑系统[2].在多值逻辑系统中,一个命题可能取到多个不同的真值,并且不同的命题取到的真值的大小可能也不完全一样.因此,在多值逻辑中,命题应该有真假程度之分,但对于如何利用这些真值来评价命题的真假程度的问题逻辑学家们并未达成一致意见.1952 年,Rosser 和 Turquette 通过选定包含 1 在内的部分真值作为指派真值(designated truth values),而包含 0 在内的另一部分为反指派真值(antidesignated truth values)的方式来反映逻辑命题的真假程度[1].称在任意赋值下的真值都是指派真值的命题为重言式,而在任意赋值下的真值都是反指派真值的命题为矛盾式.但如今,常用的多值逻辑系统(如 MTL,BL,Łukasiewicz,Gödel,NM,L*及它们的 n 值扩张等)都只取 1 作为指派真值,只取 0 作为反指派真值[2−6].这种只用经典真值衡量多值逻辑中命题的真假程度的做法显然是不尽合理的,况且无论是重言式还是矛盾式,它们只是全体命题中的很少一部分,而绝大多数命题既不是重言式也不是矛盾式.所以,指派真值的做法仍未能评价大多数命题的真假程度.而 Pavelka 则走向了另一个极端,他以真值作为命题的隶属度,把所有命题都抽象为一个模糊集,进而把所有逻辑概念都进行了全盘程度化[7].随后,Novák 和 Turunen 等人系统地发展了 Pavelka 的理论[8,9],但 Pavelka 的这种全盘程度化的方法仍未能回答到底用哪些真值来反映命题的真假.

王国俊教授等人在如何评价命题的真假程度方面也取得了研究成果,1998 年,他通过利用命题所取全体真值的下确界来反映该命题真假的思想,提出了广义重言式理论[10],进而对逻辑命题进行了分类.由于这种方法是利用下确界来反映命题的真假程度,所以即使是同类广义重言式,它们之间也可能差别很大,因而这种程度化方法是比较粗糙的.为了更为细致、精确地表示命题的真假程度,王国俊教授又通过考虑命题取各个真值的赋值在全体赋值中的比重,并采用加权求和的方式在多值命题逻辑中建立了命题的真度理论[11−13],成功地将数值计算引入到命题逻辑中,展开了程度化推理理论[14−23],从而在多值命题逻辑中找到了用均匀概率测度来聚合全体真值,以刻画命题真假程度的有效方法,因而开辟了一个新的研究方向——计量逻辑学[4,24],并由此取得了一系列研究成果[25−30].

计量逻辑学中的真度概念是基于均匀概率测度空间的无穷可数乘积而引入的,因而每个原子命题(在逻辑中,通常把表示简单命题的符号称为原子命题或命题变元)都具有相同的真度值 0.5,并且它们是相互独立的.按此方法,前面例子中的两个毫不相干的简单命题的真度都是 0.5.这一状况显然是不符合实际的,事实上,现实生活中各简单命题是否为真以及在多大程度上为真,是不确定的、随机的、不独立的.基于这样的考虑,文献[26]利用单位开区间(0,1)中的随机数列在二值命题逻辑中引入了随机真度概念.但令人遗憾的是,随机真度仍要求各原子命题彼此独立.原子命题独立的根源在于,每个随机数列都可唯一地生成赋值集上的一个乘积概率测度,所以随机真度概念的引入仍未完全弥补真度理论缺乏随机性的不足.此外,文献[26]中的方法由于计算太复杂,也不易于向多值逻辑系统中进行推广.随后,本文作者在文献[31,32]中通过视全体赋值之集为通常乘积拓扑空间,利用该空间上的 Borel 概率测度也是在二值命题逻辑中引入了命题的概率真度概念,克服了计量逻辑学中的真度理论与文献[26]中的随机真度理论分别要求赋值集上的概率测度必须均匀和独立的局限.结果表明,真度、随机真度均可作为概率真度的特例纳入到统一框架中,从而建立了更为宽泛的概率计量逻辑理论框架.

有趣的是,文献[26,31,32]中刻画命题概率真度的方法都是在二值命题逻辑而不是在多值逻辑中提出的.本文的目的是将文献[31,32]中的方法推广到多值(包括有限值及连续值)命题逻辑系统中,进一步在多值框架下弥补计量逻辑缺乏随机性的不足,建立起多值命题逻辑框架下的概率计量逻辑理论.目前存在各式各样的多值命题逻辑系统(如前面提到的 MTL,BL,Łukasiewicz,Gödel,NM,L*及它们的 n 值扩张系统等),由于本文分别在有限值和连续值情形引入概率真度概念,并通过建立极限定理将这两种情形中的概率真度函数和谐地统一起来,所以使用的多值命题逻辑系统中的逻辑连接词在[0,1]上的对应算子都应该是连续的,以便建立此极限定理.显然,满足这一条件的只有 Łukasiewicz 命题逻辑系统及其 n 值扩张**.

** 通过给 Łukasiewicz 命题逻辑系统添加常值命题而得到的 Pavelka 型扩张也满足上述条件,但本文暂不考虑这样的多值逻辑.

1 *n*-值 Łukasiewicz 命题逻辑中命题的 Borel 概率真度理论

分别用 $Ł_n$ 和 $Ł$ 表示赋值集为 $W=W_n=\left\{0,\frac{1}{n-1},\ldots,\frac{n-2}{n-1},1\right\}$ 和 $W=\overline{W}=[0,1]$ 的 n 值和连续值 Łukasiewicz 命题逻辑系统,$Ł_n$ 和 $Ł$ 的逻辑语言是一样的.设 $S=\{p_1,p_2,\ldots\}$,$F(S)$是由 S 生成的$(\neg,\to)$型自由代数,其中,$\neg$是一元逻辑连接词,$\to$是二元逻辑连接词,则称 $F(S)$中的元为(抽象)逻辑命题,简称命题,称 S 中的元为原子命题.在 $Ł_n$ 和 $Ł$ 中,由初始连接词$\neg$和$\to$还可引入新的连接词,如:设$\varphi,\psi\in F(S)$,

- $\varphi\vee\psi=(\varphi\to\psi)\to\psi$;
- $\varphi\wedge\psi=\neg(\neg\varphi\vee\neg\psi)$;
- $\varphi\oplus\psi=\neg\varphi\to\psi$;
- $\varphi\&\psi=\neg(\varphi\to\neg\psi)$.

由于本文的计量化方法是从语义角度入手的,所以我们不关心 $Ł_n$ 和 $Ł$ 的语构理论,只简单介绍它们的语义理论.

对应于 $F(S)$中的连接词$\neg$和$\to$,在 W_n 和 $\overline{W}$ 中定义运算$\neg$和$\to$,如

$$\neg x=1-x,\ x\to y=(1-x+y)\wedge 1,\ x,y\in W.$$

在 W 中还可进一步引入新运算:

- $x\vee y=(x\to y)\to y=\max\{x,y\}$;
- $x\wedge y=\neg(\neg x\vee\neg y)=\min\{x,y\}$;
- $x\oplus y=\neg x\to y=(x+y)\wedge 1$;
- $x\otimes y=\neg(x\to\neg y)=(x+y-1)\vee 0$.

称$(\neg,\to)$型同态 $v:F(S)\to W$ 为 $F(S)$的赋值,$F(S)$的全体赋值之集记为Ω.在 $Ł_n$ 和 $Ł$ 中分别记Ω为Ω_n和 $\overline{\Omega}$.

由于 $F(S)$是由 S 生成的自由代数,所以一个赋值 $v\in\Omega$完全由它在 S 上的限制 $v|S$ 决定.设 $v(p_m)=v_m(m\in N)$,则得 W^ω中的向量(仍记为 v)$v=(v_1,v_2,\ldots)$;反过来,任取 W^ω中的向量 $v=(v_1,v_2,\ldots)$,则存在唯一的 $v\in\Omega$,使得 $v(p_m)=v_m$,$m\in N$.由此一一对应,可以把 $v\in\Omega$与 $v=(v_1,v_2,\ldots)$不加区分,从而$\Omega=W^\omega$,即 $\Omega_n=W_n^\omega,\overline{\Omega}=\overline{W}^\omega=[0,1]^\omega$.

设$\varphi,\psi\in F(S)$,若对任意 $v\in\Omega$都有 $v(\varphi)=1(v(\varphi)=0)$,则称$\varphi$为重言式(矛盾式),并把重言式$\varphi$记为$\vDash\varphi$.若$\vDash\varphi\to\psi$且$\vDash\psi\to\varphi$,则称$\varphi$与$\psi$逻辑等价.

设$\varphi\in F(S)$,不妨设$\varphi=\varphi(p_1,\ldots,p_m)$,则$\varphi$可诱导出一个 m 元函数 $\overline{\varphi}:W^m\to W$ 如下:

$$\overline{\varphi}(x_1,\ldots,x_m)=v(\varphi),$$

其中,$x_k=v(p_k),k=1,\ldots,m,v\in\Omega$.称 $\overline{\varphi}$ 为φ诱导的真函数,亦称为φ的 McNaughton 函数.命题φ还可以自然地诱导出Ω上的一个函数(仍记为φ)$\varphi:\Omega\to W$ 如下:

$$\varphi(v)=v(\varphi),v\in\Omega.$$

易见,逻辑等价的命题诱导的Ω上的函数相同.

先在 $Ł_n$ 中建立命题的 Borel 概率真度理论.

给 $X_k=W_n$ 赋予离散拓扑$(k=1,2,\ldots)$,给 $\Omega_n=W_n^\omega=\prod_{k=1}^{\infty}X_k$ 赋予通常乘积拓扑,称Ω_n为赋值空间.

设$\mathcal{B}(X_k)$和$\mathcal{B}(\Omega_n)$分别是空间 X_k 和Ω_n 中的 Borel 子集之集,则易见$\mathcal{B}(X_k)=\mathcal{P}(X_k)$;又由文献[33]中的命题 8.1.5 可知,$\mathcal{B}(\Omega_n)$是由$\Omega_n$ 的拓扑基

$$\mathcal{U}=\{A_1\times\ldots\times A_m\times X_{m+1}\times X_{m+2}\times\ldots|A_k\in\mathcal{B}(X_k),k=1,\ldots,m;m\in N\}$$

生成的σ-代数.再设μ是定义在$\mathcal{B}(\Omega_n)$上的 Borel 概率测度,则$(\Omega_n,\mathcal{B}(\Omega_n),\mu)$是一 Borel 概率测度空间.

定义 1. 在 $Ł_n$ 中,设$\varphi\in F(S)$,μ是Ω_n 上的 Borel 概率测度,定义

$$\tau_{n,\mu}(\varphi)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n-1}\mu\left(\varphi^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right) \tag{1}$$

称$\tau_{n,\mu}(\varphi)$为φ关于μ的 Borel 概率真度,简称μ-真度.上式右侧把命题φ看成了函数$\varphi:\Omega_n\to W_n$.今后,在不致混淆时把

$\tau_{n,\mu}(\varphi)$简记为$\tau_\mu(\varphi)$.

注 1:

(i) 设 n=2,则$\tau_\mu(\varphi)=\mu(\varphi^{-1}(1))$,这恰是文献[31,32]在二值命题逻辑中给出的表达式.

(ii) 由定义 1 可知,逻辑等价的命题具有相同的μ-真度.为方便计算,以后总假设命题φ由前 m 个原子命题 $p_1,\dots,p_m$ 构成,即$\varphi=\varphi(p_1,\dots,p_m)$.

(iii) 设 $\varphi=\varphi(p_1,\dots,p_m)$,则对任意 $i=0,1,\dots,n-1$, $\varphi^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)=\bar{\varphi}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\times\prod_{k=m+1}^{\infty}X_k$.由于对任意 $E\subseteq W_n^m$, $E\times\prod_{k=m+1}^{\infty}X_k\in\mathcal{B}(\Omega_n)$,所以φ是从乘积空间Ω_n到离散空间 W_n 的连续函数,从而是 Borel 可测的,所以φ可视为概率测度空间$(\Omega_n,\mathcal{B}(\Omega_n),\mu)$上的随机变量,因而,

$$\begin{aligned}\tau_\mu(\varphi)&=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n-1}\mu\left(\varphi^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right)\\&=\int_{\Omega_n}\varphi(v)\mathrm{d}\mu\end{aligned}\tag{2}$$

是随机变量φ的数学期望.

(iv) 设μ是Ω_n上的 Borel 概率测度.对任意 $m\in N$,定义 $\mu(m):\mathcal{B}(W_n^m)\to[0,1]$ 如下:

$$\mu(m)(E)=\mu\left(E\times\prod_{k=m+1}^{\infty}X_k\right),E\in\mathcal{B}(W_n^m)\tag{3}$$

则$\mu(m)$是 W_n^m 上的 Borel 概率测度.设$\varphi=\varphi(p_1,\dots,p_m)$,则公式(1)可简化为

$$\begin{aligned}\tau_\mu(\varphi)&=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n-1}\mu\left(\varphi^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right)\\&=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n-1}\mu\left(\bar{\varphi}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\times\prod_{k=m+1}^{\infty}X_k\right)\\&=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n-1}\mu(m)\left(\bar{\varphi}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right)\end{aligned}\tag{4}$$

(v) 公式(4)还可进一步化为

$$\begin{aligned}\tau_\mu(\varphi)&=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n-1}\mu(m)\left(\bar{\varphi}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right)\\&=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n-1}\left(\sum\left\{\mu(m)(\{(x_1,\dots,x_m)\})\,\middle|\,(x_1,\dots,x_m)\in\bar{\varphi}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right\}\right)\\&=\sum_{i=0}^{n-1}\sum\left\{\frac{i}{n-1}\mu(m)(\{(x_1,\dots,x_m)\})\,\middle|\,(x_1,\dots,x_m)\in\bar{\varphi}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right\}\\&=\sum_{i=0}^{n-1}\sum\left\{\bar{\varphi}(x_1,\dots,x_m)\mu(m)(\{(x_1,\dots,x_m)\})\,\middle|\,(x_1,\dots,x_m)\in\bar{\varphi}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right\}\\&=\sum\{\bar{\varphi}(x_1,\dots,x_m)\mu(m)(\{(x_1,\dots,x_m)\})\mid(x_1,\dots,x_m)\in W_n^m\}\end{aligned}\tag{5}$$

(vi) 设$\mu=\mu_1\times\mu_2\times\dots$是由各子空间 X_k 上的(Borel)概率测度$\mu_k(k=1,2,\dots)$生成的乘积概率测度,则$\mu(m)=\mu_1\times\dots\times\mu_m$,且若 $E=A_1\times\dots\times A_m\subseteq W_n^m$,则$\mu(m)(E)=\mu_1(A_1)\cdot\ldots\cdot\mu_m(A_m)$ (见文献[33]).此时有,

$$\begin{aligned}\tau_\mu(\varphi)&=\sum\{\bar{\varphi}(x_1,\dots,x_m)\mu(m)(\{(x_1,\dots,x_m)\})\mid(x_1,\dots,x_m)\in W_n^m\}\\&=\sum\{\bar{\varphi}(x_1,\dots,x_m)\mu_1(\{x_1\})\cdot\ldots\cdot\mu_m(\{x_m\})\mid(x_1,\dots,x_m)\in W_n^m\}\\&=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n-1}\sum\left\{\mu_1(\{x_1\})\cdot\ldots\cdot\mu_m(\{x_m\})\,\middle|\,(x_1,\dots,x_m)\in\bar{\varphi}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right\}\end{aligned}\tag{6}$$

特别是当 n=2 时, $\tau_\mu(\varphi)=\sum\{\mu_1(\{x_1\})\cdot\ldots\cdot\mu_m(\{x_m\})\mid(x_1,\ldots,x_m)\in\overline{\varphi}^{-1}(1)\}$.若令 $D=(P_1,P_2,\ldots)$, $Q_k^1=P_k, Q_k^0=1-P_k$, 其中,$P_k=\mu_k(\{1\})$,k=1,2,…,则 $\tau_\mu(\varphi)=\sum\{Q_1^{x_1}\cdot\ldots\cdot Q_m^{x_m}\mid(x_1,\ldots,x_m)\in\overline{\varphi}^{-1}(1)\}$ 就是文献[26]定义的随机真度 $\tau_D(\varphi)$.

(vii) 设 $\mu=\mu_1\times\mu_2\times\ldots$,其中,$\mu_k$ 是子空间 X_k 上的均匀概率测度(k=1,2,…),则 $\mu(m)$ 是 W_n^m 上的均匀概率测度. 此时,

$$\begin{aligned}\tau_\mu(\varphi)&=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n-1}\mu(m)\left(\overline{\varphi}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right)\\&=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n-1}\cdot\frac{\left|\overline{\varphi}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right|}{n^m}\\&=\frac{1}{n^m}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n-1}\left|\overline{\varphi}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right|.\end{aligned}$$

这就是文献[4,24]定义的真度函数.

(viii) 设 $v=(v_1,v_2,\ldots)\in\Omega_n$,取 $X_k=W_n$ 上的(Borel)概率测度 μ_k,其中,μ_k 满足

$$\mu_k(\{x_k\})=\begin{cases}1, & x_k=v_k\\ 0, & x_k\neq v_k\end{cases},$$

其中,$x_k\in X_k$,k=1,2,….设 $\mu=\mu_1\times\mu_2\times\ldots$,则由公式(6)知,对任意 $\varphi=\varphi(p_1,\ldots,p_m)\in F(S)$, $\tau_\mu(\varphi)=\overline{\varphi}(v_1,\ldots,v_m)=v(\varphi)$,所以 $\tau_\mu=v$.这说明每个赋值 $v\in\Omega_n$ 也是定义 1 意义下的概率真度函数.

由注 1 知,文献[11−13,24−26]中已有的真度函数均是本文所定义的 Borel 概率真度函数的特例,因而我们将为不确定性推理建立更为宽泛的计量化模型.

例 1:(i) 设 $\varphi_1=p_1$, $\varphi_2=p_2\to p_3$, $\varphi_3=p_1\vee p_2\vee p_3$, $\varphi_4=p_1\wedge p_2\wedge p_3$,在 $Ł_3$ 中求 $\tau_\mu(\varphi_i)$,i=1,…,4.

解:

因命题 φ_i 只涉及前 3 个原子命题 p_1,p_2 和 p_3,所以由公式(4),我们可只考虑 $W_3^3=\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}^3$ 上的(Borel)概率测度 $\mu(3)$.

设 $\mu(3)(\{(1,1,1)\})=0.3, \mu(3)\left(\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}\right)=0.2, \mu(3)(\{(x_1,x_2,x_3)\})=0.02 \text{ iff } (x_1,x_2,x_3)\notin\left\{(1,1,1),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}$,则

$$\overline{p_1}^{-1}(1)=\{(1,x_2,x_3)\mid x_2,x_3\in W_3\},\ \overline{p_1}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\left\{\left(\frac{1}{2},x_2,x_3\right)\middle| x_2,x_3\in W_3\right\}.$$

所以,

$$\begin{aligned}\tau_\mu(\varphi_1)&=\mu(3)(\overline{p_1}^{-1}(1))+\frac{1}{2}\mu(3)\left(\overline{p_1}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\\&=0.3+0.02\times8+\frac{1}{2}\times(0.2+0.02\times8)\\&=0.64.\end{aligned}$$

又 $\overline{\varphi_2}^{-1}(1)=\{(x_1,x_2,x_3)\in W_3^3\mid x_2\leqslant x_3\}$, $\overline{\varphi_2}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in W_3^3\middle| x_2=x_3+\frac{1}{2}\right\}$,所以,

$$\begin{aligned}\tau_\mu(\varphi_2)&=\mu(3)(\overline{\varphi_2}^{-1}(1))+\frac{1}{2}\mu(3)\left(\overline{\varphi_2}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\\&=(0.3+0.2+0.02\times16)+\frac{1}{2}\times(0.02\times6)\\&=0.88.\end{aligned}$$

又 $\overline{\varphi_3}^{-1}(1)=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1,x_2,x_3\text{有其一为}1\}$, $\overline{\varphi_3}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\left\{0,\frac{1}{2}\right\}^3-\{(0,0,0)\}$,所以,

$$\begin{aligned}\tau_\mu(\varphi_3)&=\mu(3)(\overline{\varphi_3}^{-1}(1))+\frac{1}{2}\mu(3)\left(\overline{\varphi_3}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\\&=(0.3+0.02\times 18)+\frac{1}{2}\times(0.2+0.02\times 6)\\&=0.82.\end{aligned}$$

又 $\overline{\varphi_4}^{-1}(1)=\{(1,1,1)\},\overline{\varphi_4}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\left\{\frac{1}{2},1\right\}^3-\{(1,1,1)\}$,所以,

$$\begin{aligned}\tau_\mu(\varphi_4)&=\mu(3)(\overline{\varphi_4}^{-1}(1))+\frac{1}{2}\mu(3)\left(\overline{\varphi_4}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\\&=0.3+\frac{1}{2}\times(0.2+0.02\times 6)\\&=0.46.\end{aligned}$$

(ii) 设$\mu(3)$是$\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}^3$上的均匀概率测度,则$\tau_\mu(\varphi_1)=\frac{1}{2},\tau_\mu(\varphi_2)=\frac{7}{9},\tau_\mu(\varphi_3)=\frac{5}{6},\tau_\mu(\varphi_4)=\frac{1}{6}$.

例 2:设μ是由Ω_n的各子空间上的均匀概率测度生成的乘积概率测度,求 $p_1,p_2\to p_3,p_1\vee p_2$ 以及 $p_1\wedge\ldots\wedge p_m$ 的μ-真度.

解:

$$\begin{aligned}\tau_\mu(p_1)&=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n-1}\left|\overline{p_1}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right|\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n-1}\\&=\frac{1}{n(n-1)}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\\&=\frac{1}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_\mu(p_2\to p_3)&=\frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n-1}\left|\overline{p_2\to p_3}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right|\\&=\frac{1}{n^3(n-1)}\cdot\left(\frac{n^2(n+1)(n-1)}{2}+n\sum_{i=1}^{n-2}i(i+1)\right)\\&=\frac{1}{6n^2(n-1)}(5n^2-n)(n-1)\\&=\frac{5n-1}{6n},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_\mu(p_1\vee p_2)&=\frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n-1}(2i+1)\\&=\frac{4n+1}{6n},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_\mu(p_1\wedge\ldots\wedge p_m)&=\frac{1}{n^m}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n-1}\left|\overline{p_1\wedge\ldots\wedge p_m}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right|\\&=\frac{1}{n^m}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n-1}[(n-i)^m-(n-i-1)^m]\\&=\frac{1}{n^m(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}k^m.\end{aligned}$$

作为实际应用,我们再考虑引言部分给出的第 1 个例子的概率真度.

例 3:用 p_1 表示简单命题“明年 12 月 21 日中午我将在华沙”.为简单起见,仍在三值 Łukasiewicz 命题逻辑系

统$Ł_3$中考虑其概率真度,即p_1可取真值$0,\frac{1}{2}$和1.由注1知,$\tau_\mu(p_1)=\mu(1)(\overline{p_1}^{-1}(1))+\frac{1}{2}\mu(1)\left(\overline{p_1}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$,其中,$\overline{p_1}^{-1}(1)=\{1\}$表示$p_1$为真,$\overline{p_1}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\left\{\frac{1}{2}\right\}$表示不确定,$\mu(1)$为$\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$上的一个概率测度.考虑以下情形:

(i) 假设“已经预定了明年12月21日中午前到华沙的机票,并假定不会再出现其他意外情况”,则在此情形下,$\mu(1)$应满足$\mu(1)(\{1\})=1$,从而$\tau_\mu(p_1)=\mu(1)(\overline{p_1}^{-1}(1))=1$,表示$p_1$为真;

(ii) 假设“又接到明年 12 月 21 日中午去纽约的通知,并且所要办的事情同样重要”,此时应有$\mu(1)(\{1\})=\mu(1)(\{0\})=\frac{1}{2}$,这时$\tau_\mu(p_1)=\frac{1}{2}$,表示$p_1$为真的程度只有一半;

(iii) 假设“现阶段完全不能确定去还是不去,都有可能”,此时应要求$\mu(1)$为均匀概率测度,从而也有

$$\tau_\mu(p_1)=\frac{1}{2}.$$

由此可见,有了概率真度概念后,当事人可以根据实际情况(用概率测度表示)作出恰当判断,以使推理更符合实际,更具灵活性.

下面我们研究τ_μ的基本性质.先介绍几个概念,设μ是Ω_n上的 Borel 概率测度.

- 设$m\in N$,若对任一$(x_1,...,x_m)\in W_n^m$,$\mu(m)(\{(x_1,\ldots,x_m)\})\neq0$,则称$\mu$是$m$-原子的;
- 若对任意$m\in N$及任一$(x_1,...,x_m)\in W_n^m$,都有$\mu(m)(\{(x_1,\ldots,x_m)\})\neq0$,则称$\mu$是有限原子的;
- 若对任意$v\in\Omega_n$,$\mu(\{v\})=0$,则称μ是非原子的.

命题 1. 设μ是Ω_n上的 Borel 概率测度,$\varphi,\psi\in F(S)$,则:

(i) $0\leqslant\tau_\mu(\varphi)\leqslant1$;

(ii) 若φ是重言式(矛盾式),则$\tau_\mu(\varphi)=1(\tau_\mu(\varphi)=0)$;

(iii) 若φ与ψ逻辑等价,则$\tau_\mu(\varphi)=\tau_\mu(\psi)$;

(iv) 设$\varphi=\varphi(p_1,\ldots,p_m)\in F(S)$,$\mu$是$m$-原子的,若$\tau_\mu(\varphi)=1(\tau_\mu(\varphi)=0)$,则$\varphi$是重言式(矛盾式);

(v) 若μ是有限原子的,则对任一命题$\varphi\in F(S)$,若$\tau_\mu(\varphi)=1(\tau_\mu(\varphi)=0)$,则$\varphi$是重言式(矛盾式);

(vi) $\tau_\mu(\varphi)+\tau_\mu(\neg\varphi)=1$;

(vii) $\tau_\mu(\varphi)+\tau_\mu(\psi)=\tau_\mu(\varphi\vee\psi)+\tau_\mu(\varphi\wedge\psi)$;

(viii) $\tau_\mu(\varphi)+\tau_\mu(\varphi\to\psi)=\tau_\mu(\psi)+\tau_\mu(\psi\to\varphi)$;

(ix) 若$\vDash\varphi\to\psi$,则$\tau_\mu(\varphi)\leqslant\tau_\mu(\psi)$;

(x) $\tau_\mu(\varphi\wedge\psi)\geqslant\tau_\mu(\varphi)+\tau_\mu(\psi)-1$;

(xi) $\tau_\mu(\psi)\leqslant\tau_\mu(\varphi\to\psi)$.

证明:以(viii)为例证明,其他各条由公式(1)~公式(6)可以类似验证.任取$v\in\Omega_n$,易验证$v(\varphi)+v(\varphi\to\psi)=v(\psi)+v(\psi\to\varphi)$,作为$\Omega_n$上的函数,有$\varphi(v)+(\varphi\to\psi)(v)=\psi(v)+(\psi\to\varphi)(v)$.从而有,

$$\begin{aligned}\tau_\mu(\varphi)+\tau_\mu(\varphi\to\psi)&=\int_{\Omega_n}\varphi(v)d\mu+\int_{\Omega_n}(\varphi\to\psi)(v)\mathrm{d}\mu\\&=\int_{\Omega_n}[\varphi(v)+(\varphi\to\psi)(v)]\mathrm{d}\mu\\&=\int_{\Omega_n}[\psi(v)+(\psi\to\varphi)(v)]\mathrm{d}\mu\\&=\tau_\mu(\psi)+\tau_\mu(\psi\to\varphi).\end{aligned}$$

命题 2. 设μ是Ω_n上的 Borel 概率测度,$\varphi,\psi\in F(S)$,则

$$\tau_\mu(\varphi)+\tau_\mu(\psi)=\tau_\mu(\varphi\oplus\psi)+\tau_\mu(\varphi\&\psi).$$

证明:由命题 1(vi)和命题 1(viii)可知,

$$\begin{aligned}\tau_\mu(\varphi\oplus\psi)+\tau_\mu(\varphi\,\&\,\psi)&=\tau_\mu(\neg\varphi\to\psi)+\tau_\mu(\neg(\varphi\to\neg\psi))\\&=\tau_\mu(\neg\varphi\to\psi)+1-\tau_\mu(\varphi\to\neg\psi)\\&=\tau_\mu(\neg\varphi)+\tau_\mu(\neg\varphi\to\psi)-\tau_\mu(\varphi\to\neg\psi)+1-\tau_\mu(\neg\varphi)\\&=\tau_\mu(\psi)+\tau_\mu(\psi\to\neg\varphi)-\tau_\mu(\varphi\to\neg\psi)+\tau_\mu(\varphi)\\&=\tau_\mu(\varphi)+\tau_\mu(\psi)+\tau_\mu(\varphi\to\neg\psi)-\tau_\mu(\varphi\to\neg\psi)\\&=\tau_\mu(\varphi)+\tau_\mu(\psi).\end{aligned}$$

下面再给出τ_μ的一些性质.由于对任意$\varphi\in F(S),\tau_\mu(\varphi)\in[0,1]$,所以自然可像在 W=[0,1]中那样在 $H_\mu=\{\tau_\mu(\varphi)|\varphi\in F(S)\}$中引入运算$\neg,\to,\otimes$等,进而导出$\tau_\mu$的一些性质.任取$\varphi,\psi\in F(S)$,定义$\neg:H_\mu\to[0,1]$及$\to,\otimes:H_\mu^2\to[0,1]$如下:

- $\neg\tau_\mu(\varphi)=1-\tau_\mu(\varphi)$;
- $\tau_\mu(\varphi)\to\tau_\mu(\psi)=(1-\tau_\mu(\varphi)+\tau_\mu(\psi))\wedge 1$;
- $\tau_\mu(\varphi)\otimes\tau_\mu(\psi)=(\tau_\mu(\varphi)+\tau_\mu(\psi)-1)\vee 0$.

命题 3. 设μ是Ω_n上的 Borel 概率测度,$\varphi,\psi\in F(S)$,则:

(i) $\tau_\mu(\neg\varphi)=\neg\tau_\mu(\varphi)$;

(ii) $(\tau_\mu(\varphi)\otimes\tau_\mu(\varphi\to\psi))\to\tau_\mu(\psi)=1$;

(iii) $\tau_\mu(\varphi\vee\psi)=(\tau_\mu(\varphi)\to\tau_\mu(\varphi\wedge\psi))\to\tau_\mu(\psi)$.

证明:(i)显然成立,由命题 1(x)及$\tau_\mu(\varphi\wedge\psi)\leqslant\tau_\mu(\psi)$得知(ii)成立,下证(iii).由命题 1(vii)得知:

$$\begin{aligned}(\tau_\mu(\varphi)\to\tau_\mu(\varphi\wedge\psi))\to\tau_\mu(\psi)&=(1-\tau_\mu(\varphi)+\tau_\mu(\varphi\wedge\psi))\wedge 1\to\tau_\mu(\psi)\\&=(1-\tau_\mu(\varphi)+\tau_\mu(\varphi\wedge\psi))\to\tau_\mu(\psi)\\&=[1-(1-\tau_\mu(\varphi)+\tau_\mu(\varphi\wedge\psi))+\tau_\mu(\psi)]\wedge 1\\&=[\tau_\mu(\varphi)+\tau_\mu(\psi)-\tau_\mu(\varphi\wedge\psi)]\wedge 1\\&=\tau_\mu(\varphi\vee\psi).\end{aligned}$$

由命题 2 和命题 3(iii)的证明得知,若把命题 3(iii)中的析取$\vee$和合取$\wedge$分别换成强析取$\oplus$和强合取&也成立:

命题 4. 设μ是Ω_n上的 Borel 概率测度,$\varphi,\psi\in F(S)$,则

$$\tau_\mu(\varphi\oplus\psi)=(\tau_\mu(\varphi)\to\tau_\mu(\varphi\,\&\,\psi))\to\tau_\mu(\psi).$$

最后,我们再给出全体μ-真度值之集的一些性质.先回忆有关$Ł_n$的一个事实:

引理 1[34]. 在$Ł_n$中,对任意$(x_1,\dots,x_m)\in W_n^m$,存在命题$\delta_{(x_1,\dots,x_m)}\in F(S)$,使得对任意$v\in\Omega_n$,

$$v(\delta_{(x_1,\dots,x_m)})=\begin{cases}1, & v(p_k)=x_k,k=1,\dots,m\\0, & \text{否则}\end{cases}.$$

命题 5. 设μ是Ω_n上的非原子的 Borel 概率测度,则:

(i) H_μ是[0,1]中的可数稠密子集;

(ii) 当μ是各子空间上的均匀概率测度生成的乘积测度时,$\left\{\frac{k}{n^m}\middle|k=0,1,\dots,n^m;m\in N\right\}\subseteq H_\mu$;

(iii) μ-逻辑度量空间$(F(S),\rho_\mu)$中没有孤立点,其中$\rho_\mu(\varphi,\psi)=1-\tau_\mu((\varphi\to\psi)\wedge(\psi\to\varphi))$.

证明:(i) 任取$\varepsilon>0$,则由μ是非原子的知,存在 $m\in N$ 使得对任一点$(x_1,\dots,x_m)\in W_n^m$,

$$\mu(m)(\{(x_1,\dots,x_m)\})=\mu\left((x_1,\dots,x_m)\times\prod_{k=m+1}^{\infty}X_k\right)<\varepsilon.$$

任取$E\subseteq W_n^m$,令

$$\varphi_E=\vee\{\delta_{(x_1,\dots,x_m)}\mid(x_1,\dots,x_m)\in E\},$$

则由引理 1 得知$\overline{\varphi_E}^{-1}(1)=E,\overline{\varphi_E}^{-1}(0)=W_n^m-E$,所以$\tau_\mu(\varphi_E)=\mu(m)(\overline{\varphi_E}^{-1}(1))=\mu(m)(E)$,从而,

$$\{\mu(m)(E)\mid E\subseteq W_n^m\}\subseteq H_\mu.$$

所以 H_μ在[0,1]中稠密;又 H_μ显然是可数的,所以命题 5(i)成立.

(ii) 任取 $m\in N$ 及 $k\in\{0,\ldots,n^m\}$,取 $E\subseteq W_n^m$ 满足$|E|=k$,则由(i)知 $\tau_\mu(\varphi_E)=\mu(m)(E)=\dfrac{k}{n^m}\in H_\mu$.

(iii) 任取$\varphi=\varphi(p_1,\ldots,p_m)\in F(S),\varepsilon>0$,由$\mu$是非原子的知,存在充分大的 $k\in N$,使得对任一点$(x_1,\ldots,x_m,x_{m+1},\ldots,x_{m+k})\in W_n^{m+k}$, $\mu(m+k)(\{(x_1,\ldots,x_m,x_{m+1},\ldots,x_{m+k})\})<\dfrac{\varepsilon}{n^m}$,从而,

$$\tau_\mu(\delta_{(x_{m+1},\ldots,x_{m+k})})=\mu(m+k)(W_n^m\times(x_{m+1},\ldots,x_{m+k}))<\frac{\varepsilon}{n^m}\times n^m=\varepsilon.$$

令 $\psi=\varphi\wedge\neg\delta_{(x_{m+1},\ldots,x_{m+k})}$,则

$$\begin{aligned}\rho_\mu(\varphi,\psi)&=1-\tau_\mu((\varphi\to\psi)\wedge(\psi\to\varphi))\\&=1-\tau_\mu(\varphi\to\psi)\\&=1-\tau_\mu(\varphi\to\neg\delta_{(x_{m+1},\ldots,x_{m+k})})\\&\leqslant 1-\tau_\mu(\neg\delta_{(x_{m+1},\ldots,x_{m+k})})\\&=\tau_\mu(\delta_{(x_{m+1},\ldots,x_{m+k})})\\&<\varepsilon.\end{aligned}$$

2 *n*-值 Łukasiewicz 命题逻辑中命题的概率真度的积分表示

从本节开始,我们也把 $\bar\Omega=[0,1]^\omega$ 视为通常乘积拓扑空间.这样,自然可以利用其上的 Borel 概率测度在 *Ł* 中引入命题的积分真度.这一问题我们留到下一节再加以研究.本节先考虑 $\bar\Omega$ 上的一种特殊的 Borel 概率测度,从而给出$\tau_{n,\mu}$的积分表示.

因为 $W_n=\left\{0,\dfrac{1}{n-1},\ldots,\dfrac{n-2}{n-1},1\right\}$,所以,$W_n^m$ 是一个由 n^m 个元素组成的均匀分布的 m 维点阵,即

$$W_n^m=\{x=(x_1,\ldots,x_m)\mid x_k\in W_n,1\leqslant k\leqslant m\}.$$

以下的关键技巧在于将 W_n^m 中的每个点转化为$[0,1]^m$ 中的一个 m 维 Borel 可测小方体.为此,可在[0,1]中加入 $n-1$ 个等分点 $\dfrac{1}{n},\ldots,\dfrac{n-1}{n}$,则[0,1]被分成 n 等份.设 $\alpha_k\in\left\{0,\dfrac{1}{n},\ldots,\dfrac{n-1}{n}\right\}(k=1,\ldots,m)$,则

$$\frac{n}{n-1}(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)=\left(\frac{n}{n-1}\alpha_1,\ldots,\frac{n}{n-1}\alpha_m\right)\in W_n^m.$$

引入一个符号:

$$\left[\!\left[\alpha_k,\alpha_k+\frac{1}{n}\right]\!\right]=\begin{cases}\left[\alpha_k,\alpha_k+\dfrac{1}{n}\right), & \alpha_k\neq\dfrac{n-1}{n}\\ \left[\alpha_k,\alpha_k+\dfrac{1}{n}\right], & \alpha_k=\dfrac{n-1}{n}\end{cases}.$$

定义:

$$cube(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)=\left\{(x_1,\ldots,x_m)\in[0,1]^m\,\middle|\,x_k\in\left[\!\left[\alpha_k,\alpha_k+\frac{1}{n}\right]\!\right],k=1,\ldots,m\right\},$$

则 $\left\{cube(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\,\middle|\,\dfrac{n}{n-1}(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\in W_n^m\right\}$ 是 n^m 个两两不交的 Borel 可测之集,且

$$\bigcup\left\{cube(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\,\middle|\,\frac{n}{n-1}(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\in W_n^m\right\}=[0,1]^m.$$

设μ是 $\Omega_n=W_n^\omega=\left\{0,\dfrac{1}{n-1},\ldots,\dfrac{n-2}{n-1},1\right\}^\omega$ 上的 Borel 概率测度,则Ω_n 是乘积空间 $\bar\Omega=[0,1]^\omega$ 的子空间.设μ^*是 $\bar\Omega$

上满足如下条件的 Borel 概率测度 $\mu^*:\mathcal{B}(\bar{\Omega})\to[0,1]$:对任意 $m\in N$ 及 $\alpha_1,\dots,\alpha_m\in\left\{0,\frac{1}{n},\dots,\frac{n-1}{n}\right\}$,

$$\mu^*(m)(cube(\alpha_1,\dots,\alpha_m))=\mu(m)\left(\left\{\left(\frac{n}{n-1}\alpha_1,\dots,\frac{n}{n-1}\alpha_m\right)\right\}\right) \tag{7}$$

这样的μ^*是存在的.如,令 $\mu^*(\Sigma)=\mu(\Sigma\cap\Omega_n),\Sigma\in\mathcal{B}(\bar{\Omega})$,则$\mu^*$就满足公式(7).本节用到的 $\bar{\Omega}$ 上的 Borel 概率测度恒指公式(7)意义下的μ^*.在不致混淆时,仍把μ^*记为μ.

设$\varphi=\varphi(p_1,\dots,p_m)$是 $Ł_n$ 中的一个命题,则由前面已知φ可诱导出一个 McNaughton 函数 $\bar{\varphi}:W_n^m\to W_n$.为给出$\varphi$的$\mu$-真度的积分表示,还需引入$\varphi$在$[0,1]^m$上诱导的阶梯函数$\bar{\bar{\varphi}}$.

定义 2. 设$\varphi=\varphi(p_1,\dots,p_m)\in F(S)$,定义 $\bar{\bar{\varphi}}:[0,1]^m\to[0,1]$ 如下:

$$\bar{\bar{\varphi}}(x_1,\dots,x_m)=\frac{i}{n-1}\ \text{iff}\ (x_1,\dots,x_m)\in cube(\alpha_1,\dots,\alpha_m).$$

这里,$\bar{\varphi}\left(\frac{n}{n-1}\alpha_1,\dots,\frac{n}{n-1}\alpha_m\right)=\frac{i}{n-1},i=0,1,\dots,n-1$.称$\bar{\bar{\varphi}}$为$\varphi$在$[0,1]^m$上诱导的阶梯函数.

定理 1(积分表示定理). 设$\varphi=\varphi(p_1,\dots,p_m)\in F(S)$,$\mu$是$\Omega_n$上的 Borel 概率测度,则按公式(7),$\mu$可诱导出 $\bar{\Omega}$ 上的一个 Borel 概率测度(仍记为μ),且

$$\tau_{n,\mu}(\varphi)=\int_{[0,1]^m}\bar{\bar{\varphi}}(x_1,\dots,x_m)\mathrm{d}\mu(m).$$

证明:对每个 $i=0,1,\dots,n-1$,令

$$\sigma_i=\bigcup\left\{cube(\alpha_1,\dots,\alpha_m)\middle|\bar{\varphi}\left(\frac{n}{n-1}\alpha_1,\dots,\frac{n}{n-1}\alpha_m\right)=\frac{i}{n-1}\right\},$$

则$\sigma_0,\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}$组成$[0,1]^m$的一个分划,且 $\mu(m)(\sigma_i)=\mu(m)\left(\bar{\varphi}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right)=\mu\left(\varphi^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right)$.由此可得:

$$\tau_{n,\mu}(\varphi)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n-1}\mu\left(\varphi^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n-1}\mu(m)(\sigma_i).$$

又由定义 2 可知,

$$\bar{\bar{\varphi}}(x_1,\dots,x_m)=\frac{i}{n-1}\ \text{iff}\ (x_1,\dots,x_m)\in\sigma_i,i=0,1,\dots,n-1.$$

所以,

$$\begin{aligned}\tau_{n,\mu}(\varphi)&=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n-1}\mu(m)(\sigma_i)\\&=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{\sigma_i}\bar{\bar{\varphi}}(x_1,\dots,x_m)\mathrm{d}\mu(m)\\&=\int_{[0,1]^m}\bar{\bar{\varphi}}(x_1,\dots,x_m)\mathrm{d}\mu(m)\\&=\int_{[0,1]^\omega}\bar{\bar{\varphi}}(x_1,\dots,x_m)\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

这就证明了定理 1. □

3 [0,1]-值 Łukasiewicz 命题逻辑中命题的积分概率真度及极限定理

正如第 2 节开始所述,利用通常乘积拓扑空间 $\bar{\Omega}=[0,1]^\omega$ 上的 Borel 概率测度μ,在 $Ł$ 中可引入命题的μ-积分真度.此外,我们还将通过建立极限定理将 n 值情形的μ-真度函数$\tau_{n,\mu}$和μ-积分真度函数和谐地统一起来.

定义 3. 设$\varphi=\varphi(p_1,\dots,p_m)\in F(S)$,$\mu$是 $\bar{\Omega}=[0,1]^\omega$ 上的 Borel 概率测度.定义

$$\tau_{\infty,\mu}(\varphi)=\int_{[0,1]^{\omega}}\varphi(v)\mathrm{d}\mu$$
$$=\int_{[0,1]^m}\overline{\varphi_{\infty}}(x_1,\dots,x_m)\mathrm{d}\mu(m),$$

其中,$\overline{\varphi_{\infty}}:[0,1]^m\to[0,1]$,为$\varphi$在 $Ł$ 中诱导的 McNaughton 函数.称$\tau_{\infty,\mu}(\varphi)$为$\varphi$的$\mu$-积分真度.

注意,由 Łukasiewicz 运算$\neg$和$\to$的连续性φ和$\overline{\varphi_{\infty}}$都是 Borel 可测的,从而定义 3 是合理的.

利用定义 3 可直接验证,命题 1~命题 4 对$\tau_{\infty,\mu}$仍成立.事实上,这可从如下的极限定理直接得出.

定理 2(极限定理). 设$\varphi\in F(S)$,μ是 $\Omega_n=W_n^{\omega}$ 上的 Borel 概率测度,μ也是 $\bar{\Omega}=[0,1]^{\omega}$ 上按公式(7)诱导的 Borel 概率测度,则在多值 Łukasiewicz 命题逻辑中有

$$\lim_{n\to\infty}\tau_{n,\mu}(\varphi)=\tau_{\infty,\mu}(\varphi).$$

证明:由定义 3 和定理 1 可知,以下只需证明:当 $n\to\infty$时,$\overline{\overline{\varphi}}$在$[0,1]^m$上关于$\mu$一致收敛于$\overline{\varphi_{\infty}}$.

事实上,因$\varphi=\varphi(p_1,\dots,p_m)$分别在$W_n^m$及$[0,1]^m$上所诱导的 McNaughton 函数$\overline{\varphi}:W_n^m\to W_n$和$\overline{\varphi_{\infty}}:[0,1]^m\to[0,1]$的结构完全相同,只不过$\overline{\varphi}$的定义域$W_n^m$是$\overline{\varphi_{\infty}}$的定义域$[0,1]^m$的一部分而已,所以,

$$\overline{\varphi}\left(\frac{n}{n-1}\alpha_1,\dots,\frac{n}{n-1}\alpha_m\right)=\overline{\varphi_{\infty}}\left(\frac{n}{n-1}\alpha_1,\dots,\frac{n}{n-1}\alpha_m\right)\tag{8}$$

这里,$\alpha_k\in\left\{0,\frac{1}{n},\dots,\frac{n-1}{n}\right\}(k=1,\dots,m)$.因为$\overline{\varphi_{\infty}}$是从通常乘积空间$[0,1]^m$到通常拓扑空间$[0,1]$的连续函数,所以$\overline{\varphi_{\infty}}$在紧集$[0,1]^m$上一致连续,从而对任意给定的正数$\varepsilon$,取$n$充分大即可使$\overline{\varphi_{\infty}}$在每个小方体$cube(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$的振幅小于$\varepsilon$.又,由定义 2 定义的阶梯函数$\overline{\overline{\varphi}}$在每个 $cube(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$都取常值$\overline{\varphi}\left(\frac{n}{n-1}\alpha_1,\dots,\frac{n}{n-1}\alpha_m\right)$,所以由公式(8)得知$|\overline{\varphi_{\infty}}-\overline{\overline{\varphi}}|$在每个 $cube$,从而在整个$[0,1]^m$上处处小于ε.由ε的任意性得知,当 $n\to\infty$时,$\overline{\overline{\varphi}}$在$[0,1]^m$上以测度$\mu$一致收敛于$\overline{\varphi_{\infty}}$.这就证明了极限定理. □

当取μ为Ω_n的各子空间上的均匀概率测度生成的乘积概率测度,而$\bar{\Omega}$上的μ为 Lebesgue 测度时,它们也满足公式(7),所以此时定理 2 也成立,即:

推论 1[12]. 设$\varphi=\varphi(p_1,\dots,p_m)\in F(S)$,记$\tau_n(\varphi)=\frac{1}{n^m}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n-1}\left|\overline{\varphi}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right|$,$\tau_{\infty}(\varphi)=\int_{[0,1]^m}\overline{\varphi_{\infty}}(x_1,\dots,x_m)\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_m$,则

$$\lim_{n\to\infty}\tau_n(\varphi)=\tau_{\infty}(\varphi).$$

例 4:由例 2 和推论 1 可知,$\tau_{\infty}(p_1)=\frac{1}{2}$,$\tau_{\infty}(p_2\to p_3)=\frac{5}{6}$,$\tau_{\infty}(p_1\vee p_2)=\frac{2}{3}$,$\lim_{m\to\infty}\tau_{\infty}(p_1\wedge\dots\wedge p_m)=0$.

4 结束语

本文通过把多值 Łukasiewicz 命题逻辑中的赋值之集赋予通常乘积拓扑,利用其上的 Borel 概率测度引入了命题的 Borel 概率真度概念,研究了它的基本性质,并建立了 n 值系统中的真度函数与连续值系统中的联系.结果表明,计量逻辑学中已有的真度概念都是本文的特例.所以,基于本文的 Borel 概率真度函数可以引入概率相似度及伪距离概念,进而建立 Borel 型的逻辑度量空间,并展开相应的不确定性推理理论.这些内容将于另文讨论.

另外,需要说明的是,我们也可使用赋值集上的一般概率测度定义命题的概率真度概念,只要能够保证每个命题都是赋值集上的可测函数即可.随后,我们通过给出概率真度函数的公理化定义,证明满足该公理的真度函数都可由赋值空间上的 Borel 概率测度按本文的定义 1 表出,我们只使用 Borel 概率测度就够了.

最后,本文的方法也可以推广到其他多值命题逻辑系统(如 Gödel,NM,L*及它们的 n 值扩张系统)中.但由于其逻辑连接词的不连续性,在建立极限定理时要对概率测度μ做些限制,具体将于另文加以讨论.

致谢 作者衷心感谢审稿人的批评和指导.

References:

[1] Rosser JB, Turquette AR. Many-Valued Logics. Amsterdam: North-Holland, 1952. 10−26.

[2] Gottwald S. A Treatise on Many-Valued Logics. Baldock: Research Studies Press, 2001. 179−383.

[3] Hájek P. Metamathematics of Fuzzy Logic. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998. 27−107.

[4] Wang GJ, Zhou HJ. Introduction to Mathematical Logic and Resolution Principle. Beijing: Science Press, 2009. 200−256.

[5] Esteva F, Godo L. Monoidal *t*-norm based logic: Towards a logic for left-continuous *t*-norms. Fuzzy Sets and Systems, 2001,124: 271−288. [doi: 10.1016/S0165-0114(01)00098-7]

[6] Cintula P, Esteva F, Gispert J, Godo L, Montagna F, Noguera G. Distinguished algebraic semantics for *t*-norm based fuzzy logics: Methods and algebraic equivalencies. Annals of Pure and Applied Logic, 2009,160(1):53−81. [doi: 10.1016/j.apal.2009.01.012]

[7] Pavelka P. On fuzzy logic I, II, III. Zeit Math Logic Grundl Math., 1979,25:45−52, 119−134, 447−464.

[8] Novák V, Perfilieva I, Mockor J. Mathematical Principles of Fuzzy Logic. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. 61−178.

[9] Turunen E. Mathematics Behind Fuzzy Logic. Heidelberg: Physica-Verlag, 1999. 35−105.

[10] Wang GJ. Theory of Σ-(α-tautologies) in revised Kleene system. Science in China (Series E), 1998,28(3):146−152 (in Chinese with English abstract).

[11] Wang GJ, Fu L, Song JS. Theory of truth degrees of propositions in two-valued propositional logic. Science in China (Series A), 2001,31(11):998−1008 (in Chinese with English abstract).

[12] Wang GJ, Li BJ. Theory of truth degrees of formulas in *n*-valued Łukasiewicz propositional logic and a limit theorem. Science in China (Series E), 2005,35(6):561−569 (in Chinese with English abstract).

[13] Wang GJ, Leung Y. Integrated semantics and logic metric spaces. Fuzzy Sets and Systems, 2003,136(1):71−91. [doi: 10.1016/S0165-0114(02)00328-7]

[14] Wang GJ, Song JS. Graded method in propositional logic. Acta Electronica Sinica, 2006,34(3):252−257 (in Chinese with English abstract).

[15] Zhou HJ, Wang GJ. A new theory consistency index based on deduction theorems in several logic systems. Fuzzy Sets and Systems, 2006,157(4):427−443. [doi: 10.1016/j.fss.2005.07.006]

[16] Zhou HJ, Wang GJ. Generalized consistency degrees of theories w.r.t. formulas in several standard complete logic systems. Fuzzy Sets and Systems, 2006,157(6):2058−2073. [doi: 10.1155/2010/907298]

[17] Zhou HJ, Wang GJ. Consistency degrees of theories and methods of graded reasoning in *n*-valued R_0-logic (*NM*-logic). International Journal of Approximate Reasoning, 2006,43(3):117−132. [doi: 10.1016/j.ijar.2006.03.001]

[18] Zhou HJ, Wang GJ. Characterizations of maximal consistent theories in the formal deductive system L^* (*NM*-logic) and Cantor space. Fuzzy Sets and Systems, 2007,158(23):2591−2604. [doi: 10.1016/j.fss.2007.05.004]

[19] Zhou HJ, Wang GJ. Three and two-valued Łukasiewicz theories in the formal deductive system L^* (*NM*-logic). Fuzzy Sets and Systems, 2008,159(22):2970−2982. [doi: 10.1016/j.fss.2008.04.005]

[20] Liu HW, Wang GJ, Zhang CY. Approximate reasoning in several logic systems. Journal of Shandong University (Natural Science Edition), 2007,42(7):77−86 (in Chinese with English abstract).

[21] Zhang DX, Li LF. Syntactic graded method of two-valued propositional logic formulas. Acta Electronica Sinica, 2008,36(3): 325−330 (in Chinese with English abstract).

[22] Zhe YH, Wang GJ. A topological characterization of logic theories in three-valued propositional logic system L_3^*. Acta Mathematica Sinica, 2009,52(6):1225−1234 (in Chinese with English abstract).

[23] Zhou HJ, Wang GJ. Satisfiability and compactness of NMG-logic system. Journal of Software, 2009,20(3):515−523 (in Chinese with English abstract). http://www.jos.org.cn/1000-9825/3381.htm [doi: 10.3724/SP.J.1001.2009.03381]

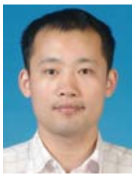
[24] Wang GJ, Zhou HJ. Quantitative logic. Information Sciences, 2009,179(4):226−247. [doi: 10.1016/j.ins.2008.09.008]

[25] Li J, Wang GJ. Theory of truth degrees of propositions in the logic system L_n^*. Science in China (Series E), 2006,36(6):631−643 (in Chinese with English abstract).

[26] Hui XJ, Wang GJ. Randomization of classical inference patterns and its application. Science in China (Series E), 2007,37(6): 801−812 (in Chinese with English abstract).
[27] Wang GJ, Duan QL. Theory of (n) truth degrees of formulas in modal logic and a consistent theorem. Science in China (Series E), 2009,39(3):234−245 (in Chinese with English abstract).
[28] Li J, Wang GJ. Theory of α-truth degrees in n-valued Gödel propositional logic. Journal of Software, 2007,18(1):33−39 (in Chinese with English abstract). http://www.jos.org.cn/1000-9825/18/33.htm [doi: 10.1360/jos180033]
[29] Li J, Wang GJ. Optimal solutions based on sustentation degree for problems of generalized modus pones. Journal of Software, 2007, 18(11):2712−2718 (in Chinese with English abstract). http://www.jos.org.cn/1000-9825/18/2712.htm [doi: 10.1360/jos182712]
[30] Wu HB. The generalized truth degree of quantitative logic in the logic system L* (n-valued NM-logic system). Computers & Mathematics with Applications, 2010,59(8):2587−2596. [doi: 10.1016/j.camwa.2010.01.024]
[31] Zhou HJ, Wang GJ. Borel probabilistic ang quantitative logic. Science in China (Information Science), 2011,54(9):1843−1854. [doi: 10.1007/s11432-011-4268-x]
[32] Zhou HJ. Probabilistic truth degrees of formulas in classical propositional logic. In: Cheng YX, ed. Proc. of the Int'l Conf. on Quantitative Logic and Quantification of Software. Hong Kong: Global-Link Publisher, 2009. 239−247. [doi: 10.3778/j.issn.1002-8331.2010.11.014]
[33] Cohn DL. Measure Theory. Boston: Birkhäuser, 1980. 196−259.
[34] Nola AD, Lettieri A. On normal forms in Łukasiewicz logic. Archive for Mathematical Logic, 2004,43(6):795−823. [doi: 10.1007/s00153-004-0230-6]

附中文参考文献:

[10] 王国俊.修正的 Kleene 系统中的Σ-(α-重言式)理论.中国科学(E 辑),1998,28(3):146−152.
[11] 王国俊,傅丽,宋建社.二值命题逻辑中命题的真度理论.中国科学(A 辑),2001,31(11):998−1008.
[12] 王国俊,李璧镜.Łukasiewicz n-值命题逻辑中公式的真度理论和极限定理.中国科学(E 辑),2005,35(6):561−569.
[14] 王国俊,宋健社.命题逻辑中的程度化方法.电子学报,2006,34(3):252−257.
[20] 刘华文,王国俊,张诚一.几种逻辑系统中的近似推理理论.山东大学学报(理学版),2007,42(7):77−86.
[21] 张东晓,李立峰.二值命题逻辑公式的语构程度化方法.电子学报,2008,36(3):325−330.
[22] 折延宏,王国俊.三值命题逻辑系统 L_3^* 中逻辑理论性态的拓扑刻画.数学学报,2009,52(6):1225−1234.
[23] 周红军,王国俊.逻辑系统 NMG 的满足性和紧致性.软件学报,2009,20(3):515−523. http://www.jos.org.cn/1000-9825/3381.htm [doi: 10.3724/SP.J.1001.2009.03381]
[25] 李骏,王国俊.逻辑系统 L_n^* 中命题的真度理论.中国科学(E 辑),2006,36(6):631−643.
[26] 惠小静,王国俊.经典推理模式的随机化研究及其应用.中国科学(E 辑),2007,37(6):801−812.
[27] 王国俊,段巧林.模态逻辑中的(n)真度理论和和谐定理.中国科学(E 辑),2009,39(3):234−245.
[28] 李骏,王国俊.Gödel n 值命题逻辑中命题的α-真度理论.软件学报,2007,18(1):33−39. http://www.jos.org.cn/1000-9825/18/33.htm [doi: 10.1360/jos180033]
[29] 李骏,王国俊.基于支持度理论的广义 Modus Ponens 问题的最优解.软件学报,2007,18(11):2712−2718. http://www.jos.org.cn/1000-9825/18/2712.htm [doi: 10.1360/jos182712]



周红军(1980－),男,山东莘县人,博士,副教授,CCF 会员,主要研究领域为非经典数理逻辑,软计算.