软件学报 ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
Journal of Software,2012,23(9):2323−2335 [doi: 10.3724/SP.J.1001.2012.04163]

E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel/Fax: +86-10-62562563

谓词模态逻辑到对应物理论的翻译*

申宇铭[1+], 王 驹[1], 唐素勤[1], 蒋运承[2]

[1](广西师范大学 数学科学学院,广西 桂林 541004)
[2](华南师范大学 计算机学院,广东 广州 510631)

On the Translation from Quantified Modal Logic into the Counterpart Theory

SHEN Yu-Ming[1+], WANG Ju[1], TANG Su-Qin[1], JIANG Yun-Cheng[2]

[1](School of Mathematics, Guangxi Normal University, Guilin 541004, China)
[2](School of Computer Science, South China Normal University, Guangzhou 510631, China)
+ Corresponding author: E-mail: ymshen@mailbox.gxnu.edu.cn

Shen YM, Wang J, Tang SQ, Jiang YC. On the translation from quantified modal logic into the counterpart theory. *Journal of Software*, 2012,23(9):2323−2335 (in Chinese). http://www.jos.org.cn/1000-9825/4163.htm

Abstract: The counterpart theory is a theory of first-order logic. Lewis interprets modal claims by using a translation from quantified modal logic into the counterpart theory. However, Lewis's translation does not preserve the unsatisfiability of formulas. In this paper, an extended semantics for quantified modal logic is introduced, and the corresponding connection between models of the quantified modal logic and models of the counterpart theory is given. Based on the semantics, a faithful and full translation from quantified modal logic to the counterpart theory, which preserves the satisfiability and the unsatisfiability of formulas, is also established. Furthermore, since the counterpart theory is sound and complete, and the soundness and the completeness are preserved by the faithful and full translation, the quantified modal logic is also sound and complete.
Key words: quantified modal logic; counterpart theory; faithful and full translation

摘 要: 对应物理论(counterpart theory)是一阶逻辑的一种理论.Lewis 利用谓词模态逻辑到对应物理论的翻译来研究谓词模态逻辑的性质,但是Lewis 的翻译存在把不可满足的公式翻译为可满足公式的情况.针对这个问题,提出了一种扩展语义的谓词模态逻辑,建立了扩展语义后谓词模态逻辑模型与对应物理论模型的一一对应关系,并在此基础上建立了谓词模态逻辑到对应物理论的语义忠实语义满翻译(faithful and full translation),其可确保将谓词模态逻辑的可满足公式和不可满足公式分别翻译为对应物理论的可满足公式和不可满足公式.由对应物理论是可靠的、完备的一阶逻辑的理论且语义忠实语义满翻译保持可靠性和完备性,进一步证明了扩展语义的谓词模态逻辑也是可靠和完备的.
关键词: 谓词模态逻辑;对应物理论;语义忠实语义满翻译
中图法分类号: TP18 **文献标识码**: A

模态逻辑是逻辑学的一个重要分支,它是研究模态推理形式及其规律的逻辑.模态逻辑的基本体系包括命

* 基金项目: 国家自然科学基金(60573010, 60663001, 61103169); 广西自然科学基金(2011GXNSFA018159)
收稿时间: 2011-04-04; 修改时间: 2011-09-02; 定稿时间: 2011-11-17

题模态逻辑和一阶模态逻辑.其中,命题模态逻辑是在经典的命题逻辑基础上增加两个模态算子——必然算子和可能算子所得到的,一阶模态逻辑是在一阶逻辑的基础上增加必然算子和可能算子所得到的.与命题模态逻辑相比,一阶模态逻辑不仅要研究命题之间的形式结构,还要研究命题内部的形式结构.

作为知识表示的一种形式化工具,命题模态逻辑在计算机科学中有广泛的应用.比如,在程序设计语言的基础理论使用的时态逻辑[1],在程序的正确性验证使用的动态逻辑[2],在多主体系统中表示主体的认知状态和行为的 BDI 逻辑[3],验证通信协议安全性的 BAN 逻辑[4],验证系统规范性的道义逻辑[5]等等,这些都是模态形式的逻辑.

与命题模态逻辑在计算机科学的广泛应用相比,谓词模态逻辑的实际应用则相对较少.造成这一问题的主要原因之一是目前基于可能世界语义模型的谓词模态逻辑的研究还有很多的问题,比如:

- 跨可能世界相等(trans-world identity):如何表示和限制两个不同可能世界中的两个对象是相等的;
- 不存在对象:如何表示不存在对象具有性质,比如凤凰是鸟,因而有羽毛;
- 多个对应物:一个对象在另一个可能世界中变成了两个对象,比如 Cup/TCup 问题;
- 部分存在对象:如何表示一个对象在某些可能世界中是存在的,在另一些可能世界中是不存在的,比如 Lump/Statue 问题、自然人的表示.

在上述这些问题中,跨可能世界相等问题是目前谓词模态逻辑研究中所面临的一个重要问题.为了解决跨可能世界相等问题,Lewis[6,7]提出了对应物理论(counterpart theory),其基本思想是,通过建立谓词模态逻辑到对应物理论的翻译(转换、归约),从而把谓词模态逻辑的命题归约为对应物理论的命题,再通过给出对应物理论命题的解释,从而得到原谓词模态逻辑命题的解释.Hazen[8]发展了 Lewis 的工作,提出了谓词模态逻辑的对应物语义(counterpart semantics).对应物语义是在原可能世界语义中的增加对应物关系所得,由对应物关系来刻画可能世界中的对象之间的关系.Hazen 还指出,由于对应物理论的语义比可能世界语义具有更大的灵活性,所以 Lewis 给出的谓词模态逻辑到对应物理论的翻译,存在把谓词模态逻辑中不可满足的公式翻译为对应物理论可满足公式的情况.

此后,对应物理论及对应物语义的研究分为两个方面开展:一方面,Corsi[9]从形式上对谓词模态逻辑的对应物语义进行了深入的分析,Brauner 和 Ghilardi[10]讨论了在对应物语义下的谓词模态逻辑的公理化问题,Kracht 和 Kutz[11,12]发展了对应物语义,提出了对应物框架(counterpart frame)和关联性框架(coherence frame),Belardinelli[13]比较若干一阶模态逻辑系统在对应物语义和可能世界语义下完备性证明的差别;另一方面,为了解决谓词模态逻辑到对应物理论翻译存在的问题,Forbes[14]和 Ramachandran[15]又分别给出修改的谓词模态逻辑到对应物理论的翻译.但是,Fara 和 Williamson[16]举例指出,即使是修改了的翻译,也不可能避免将不可满足公式翻译为可满足公式的情形.

随着对应物理论及对应物语义的研究不断深入,其研究的结果已经逐渐地应用到了计算机科学中的若干领域.比如,解决多主体系统推理中的命名范围和多重指称问题[17],避免逻辑全知(logical omniscience)问题[18,19],运用基于对应语义的一阶时态逻辑说明堆演变(heap evolution)的时态性质[20]以及克服模型检测(model checking)中的状态爆炸问题[21]等等.

谓词模态逻辑到对应物理论的翻译是本文所要研究的问题.逻辑之间翻译本身是一个复杂的过程,到目前为止还没有一个公认的判定一个逻辑翻译好坏的标准.同时,保持可满足性和不可满足性是翻译的基本要求.设σ是一个逻辑(源逻辑)到另一个逻辑(目标逻辑)的一个翻译,为了确保源逻辑的可满足公式和不可满足公式分别翻译为目标逻辑的可满足公式和不可满足公式,我们在文献[22]提出了逻辑之间翻译的语义忠实性(faithfulness)和语义满性(fullness):

- 语义忠实性:对任意的公式φ源逻辑的模型 M 和赋值 v,M,v 满足φ,当且仅当翻译后的模型$\sigma(M)$和赋值$\sigma(v)$也满足翻译后的公式$\sigma(\varphi)$;
- 语义满性:对任意的公式φ,对任意的目标逻辑的模型 M'和赋值 v',如果 M',v'满足翻译后的公式$\sigma(\varphi)$,则总存在φ的可满足模型 M 和赋值 v,使得$\sigma(M)=M'$,$\sigma(v)=v'$.

翻译的语义忠实性确保源逻辑的可满足公式翻译为目标逻辑的可满足公式.语义满性是要求目标逻辑每一个满足φ'的模型和赋值,都能在源逻辑中找到相应的模型和赋值满足φ.同时,具备语义忠实性和语义满性的翻译将源逻辑的可满足公式和不可满足公式分别翻译为目标逻辑的可满足公式和不可满足公式.比如,二阶逻辑在标准语义下到一阶逻辑的翻译是一个语义忠实的但不是语义满的翻译.Boolos[23]曾指出,二阶逻辑公式到一阶集合论公式的翻译没有把二阶永真公式翻译为集合论的定理.如果将二阶逻辑语义的由标准语义扩展为Henkin 语义[24],那么可以建立二阶逻辑到一阶逻辑具备语义忠实性和语义满性的翻译.

在文中,如果一个翻译同时具备语义忠实性和语义满性,那么我们称这样的翻译是语义忠实语义满翻译(faithful and full translation).在对应物理论中,Lewis 试图用对应物关系来表达对象跨可能世界相等关系,但是由于对应物理论中包含的 8 条公理给对应物关系的限制是宽松,所以当论域中的一个对象拥有多个对应物时,就会有谓词模态逻辑中的跨可能世界相等关系无法与对应物关系建立一一对应,也就导致了谓词模态逻辑的不可满足公式翻译为对应物理论的可满足公式的情况.

为了解决上述问题,本文提出了一种扩展语义的谓词模态逻辑,其基本思想是,在谓词模态逻辑的模型中引入以论域和两个可能世界集合的笛卡尔乘积为定义域、论域的幂集为值域的三元函数 f,由此,可能世界 w 中某个对象在可能世界 w'中的对应物就可以显示地表达为该对象在 w 和 w'下函数 f 的像.利用函数 f 模拟对应物理论的对应物关系,从而确定在扩展语义下的可变论域非刚性模型(varying domain non-rigid model)与对应物理论模型的一一对应关系,建立扩展语义的谓词模态逻辑到对应物理论的语义忠实语义满翻译.更进一步地,我们还证明了如果源逻辑到目标逻辑之间存在语义忠实语义满翻译,并且对任意的源逻辑的公式,上述翻译对否定联结词满足分配性,那么目标逻辑的可靠性和完备性蕴含源逻辑的可靠性和完备性.由这一结论,证明了引入函数的扩展语义的谓词模态逻辑是可靠的和完备的.

本文第 1 节简要给出对应物理论、谓词模态逻辑、Lewis 翻译以及语义忠实语义满翻译的介绍.第 2 节给出谓词模态逻辑到对应物理论和二阶逻辑到一阶逻辑两种翻译的简要比较.第 3 节讨论谓词模态逻辑和对应物理论的语义不对称性并给出扩展的谓词模态逻辑的语义.第 4 节建立扩展语义下的谓词模态逻辑到对应物理论的语义忠实语义满翻译.第 5 节讨论扩展语义的谓词模态逻辑的可靠性和完备性.第 6 节是结论.

1 预备知识

本节首先介绍 Lewis 的对应物理论,然后给出谓词模态逻辑的语法和语义,最后给出 Lewis 的谓词模态逻辑到对应物理论的翻译以及语义忠实语义满翻译的定义.

1.1 对应物理论

对应物理论是一阶逻辑的一个理论,它是在一阶逻辑的基础上增加下列 4 个特殊谓词符号:

- $W(x)$:x 是可能世界;
- $I(x,w)$:x 在可能世界 w 中;
- $A(x)$:x 在现实世界中;
- $C(x,y)$:x 是 y 的对应物.

通过上述 4 个特殊谓词,对应物理论可以显式地表达可能世界语义中对象跨可能世界相等,以及某个可能世界中的对象在其他可能世界对应物的形式存在.对应物理论还包括下列 8 条公理:

P1. $\forall x\forall y(I(x,y)\to W(y))$:任何对象只能在可能世界中出现;

P2. $\forall x\forall y\forall z(I(x,y)\wedge I(x,z)\to y=z)$:任何对象不能出现在不同的可能世界中;

P3. $\forall x\forall y(C(x,y)\to\exists zI(x,z))$:任何成为某物的对应物的对象必定存在某个可能世界中;

P4. $\forall x\forall y(C(x,y)\to\exists yI(y,z))$:任何拥有对应物的对象必然存在某个可能世界中;

P5. $\forall x\forall y\forall z(I(x,y)\wedge I(z,y)\wedge C(x,z)\to x=z)$:同一可能世界的不同对象不能具有对应物关系;

P6. $\forall x\forall y(I(x,y)\to C(x,x))$:在某个可能世界的对象的对应物是它本身;

P7. $\exists x(W(x)\wedge\forall y(I(y,x)\equiv A(y)))$:存在某个世界,包含且仅包含现实事物;

P8. $\exists xA(x)$:存在现实事物.

这 8 条公理给对应物理论的模型作了隐含限制,给对应物关系 C 的限制是宽松的.即对应物关系不一定满足传递性和对称性,并且某个可能世界中的对象在其他可能世界中允许拥有一个对应物、多个对应物或者没有对应物.

1.2 谓词模态逻辑

谓词模态逻辑的模型可以分为常论域和可变论域两大类,再根据常量符号的解释是否随可能世界而变化、变量符号的赋值是否随可能世界变化,又可以将谓词模态逻辑的模型作更细的分类,具体的细节见文献[25].文献[25]中讨论的是可变论域非刚性模型即论域、常量符号的解释、变量符号的赋值均随可能世界变化,并假设可能世界处处可达.以下给出谓词模态逻辑的形式定义:

定义 1(谓词模态逻辑的语法). 谓词模态逻辑的语言$\mathcal{L}$包含如下符号:

(1) 常量符号:$c_0,c_1,\ldots$;

(2) 变量符号:$x_0,x_1,\ldots$;

(3) 谓词符号:$p_0,p_1,\ldots$;

(4) 逻辑联结词:$\neg,\rightarrow$;

(5) 全称量词:$\forall$;

(6) 模态词:$\Box$.

一个项 t 为常量符号 c 或变量符号 x.谓词模态逻辑的公式递归定义如下:

- 原子公式 $p(t_1,\ldots,t_n)$,其中,p 为 n 元谓词符号,$t_1,\ldots,t_n$ 是项;
- 如果φ,ψ是公式,则$\neg\varphi,\varphi\rightarrow\psi,\forall x\varphi,\Box\varphi$都是公式.

定义 2(谓词模态逻辑的模型). 可变论域谓词模态逻辑的模型 M 是一个五元组(W,R,D_w,w_0,I),其中:

- W 是可能世界的集合;
- $R=W\times W$ 为可达关系;
- D_w 是可能世界 w 的论域;
- $w_0\in W$ 是现实世界;
- I 是解释函数,满足:
  i. 对任何常量符号 c 和可能世界 $w\in W,I(c,w)\in D_w$;
  ii. 对任何 n 元谓词符号 p 和可能世界 $w\in W,I(p,w)\subseteq D_w^n$.

一个赋值函数 v,使得对任何变量符号 x 和可能世界 $w\in W,v(x,w)\in D_w$.给定一个项 t 和可能世界 w,项 t 在赋值 v 和解释 I 作用下取值为

$$t^{I,v}(w)=\begin{cases}I(c,w), & \text{如果}t=c\\ v(x,w), & \text{如果}t=x\end{cases}.$$

定义 3. 给定公式φ在模型 M,可能世界 w 和赋值 v 下可满足递归定义如下:

(1) $(M,w)\vDash_v p(t_1,\ldots,t_n)$,当且仅当 $(t_1^{I,v}(w),\ldots,t_n^{I,v}(w))\in I(p,w)$;

(2) $(M,w)\vDash_v\neg\psi$,当且仅当$(M,w)\nvDash_v\psi$;

(3) $(M,w)\vDash_v\psi\rightarrow\theta$,当且仅当如果$(M,w)\vDash_v\psi$,则$(M,w)\vDash_v\theta$;

(4) $(M,w)\vDash_v\forall x\psi(x)$,当且仅当对任意 $a\in D_w,(M,w)\vDash_v\psi(x/a)$;

(5) $(M,w)\vDash_v\Box\psi$,当且仅当对任意 $w'\in W,(M,w')\vDash_v\psi$.

1.3 Lewis的翻译

Lewis 的翻译是仅限于谓词模态逻辑到对应物理论的语法部分,对任意公式φ和可能世界 w,Lewis 的翻译递归定义如下:

$$\sigma(\varphi,w_0)=\begin{cases}p(t_1,\dots,t_n), & \text{如果}\varphi=p(t_1,\dots,t_n)\\ \neg\sigma(\psi,w_0), & \text{如果}\varphi=\neg\psi\\ \sigma(\psi,w_0)\to\sigma(\theta,w_0), & \text{如果}\varphi=\psi\to\theta\\ \forall x(A(x)\to\sigma(\psi,w_0)), & \text{如果}\varphi=\forall x\psi(x)\\ \forall w\forall x_1\dots\forall x_n(I(x_1,w)\wedge\dots\wedge I(x_n,w)\wedge C(x_1,t_1)\wedge\dots\wedge C(x_n,t_n))\to\sigma(\psi(x_1,\dots,x_n),w))), & \text{如果}\varphi=\Box\psi(t_1,\dots,t_n)\end{cases},$$

这里

$$\sigma(\varphi,w)=\begin{cases}p(t_1,\dots,t_n), & \text{如果}\varphi=p(t_1,\dots,t_n)\\ \neg\sigma(\psi,w), & \text{如果}\varphi=\neg\psi\\ \sigma(\psi,w)\to\sigma(\theta,w), & \text{如果}\varphi=\psi\to\theta\\ \forall x(I(x,w)\to\sigma(\psi,w)), & \text{如果}\varphi=\forall x\psi(x)\\ \forall w'\forall x_1\dots\forall x_n(I(x_1,w')\wedge\dots\wedge I(x_n,w')\wedge C(x_1,t_1)\wedge\dots\wedge C(x_n,t_n))\to\sigma(\psi(x_1,\dots,x_n),w'))), & \text{如果}\varphi=\Box\psi(t_1,\dots,t_n)\end{cases}.$$

Lewis 翻译的一个特点是消去谓词模态逻辑公式中的模态词,从而把带模态词的句子转换为一阶的句子.例如下列自然语言的句子:每一个人是必然不可能逃避死亡的.形式化为谓词模态逻辑的句子:

$$\forall x\Box(\text{Human}(x)\to\text{Death}(x)),$$

翻译为对应物理论的句子:

$$\forall x(\boldsymbol{A}(x)\to\forall \boldsymbol{w}(\boldsymbol{I}(t,\boldsymbol{w})\wedge\boldsymbol{C}(t,x)\to(\text{Human}(t)\to\text{Death}(t)))).$$

在对应物理论中,上述一阶句子理解为:每一个现实世界的人 x,在可能世界 w 的对应物 t 是不可能逃避死亡的.

严格地说,我们在这里假设谓词模态逻辑的模型 M 中的可能世界集合 W 到对应物理论的可能世界变元集合之间存在一个满单射 f,$f(w)$可以看作是 W 中的元素 w 语义语法化后的对象.根据上述假设,σ定义为

$$\sigma(\varphi,w_0)=\begin{cases}p(t_1,\dots,t_n), & \text{如果}\varphi=p(t_1,\dots,t_n)\\ \neg\sigma(\psi,w_0), & \text{如果}\varphi=\neg\psi\\ \sigma(\psi,w_0)\to\sigma(\theta,w_0), & \text{如果}\varphi=\psi\to\theta\\ \forall x(A(x)\to\sigma(\psi,w_0)), & \text{如果}\varphi=\forall x\psi(x)\\ \forall w\forall x_1\dots\forall x_n(I(x_1,w)\wedge\dots\wedge I(x_n,w)\wedge C(x_1,t_1)\wedge\dots\wedge C(x_n,t_n))\to & \\ \sigma(\psi(x_1,\dots,x_n),f^{-1}(w)))), & \text{如果}\varphi=\Box\psi(t_1,\dots,t_n)\end{cases},$$

这里,

$$\sigma(\varphi,w)=\begin{cases}p(t_1,\dots,t_n), & \text{如果}\varphi=p(t_1,\dots,t_n)\\ \neg\sigma(\psi,w), & \text{如果}\varphi=\neg\psi\\ \sigma(\psi,w)\to\sigma(\theta,w), & \text{如果}\varphi=\psi\to\theta\\ \forall x(I(x,w)\to\sigma(\psi,w)), & \text{如果}\varphi=\forall x\psi(x)\\ \forall w'\forall x_1\dots\forall x_n(I(x_1,w')\wedge\dots\wedge I(x_n,w')\wedge C(x_1,t_1)\wedge\dots\wedge C(x_n,t_n))\to & \\ \sigma(\psi(x_1,\dots,x_n),f^{-1}(w')))), & \text{如果}\varphi=\Box\psi(t_1,\dots,t_n)\end{cases},$$

这里,f^{-1}表示 f 的逆函数. □

1.4 语义忠实语义满解释

任意给定两个逻辑 S,S',下面从一个翻译必须同时保持公式的可满足性和不可满足性这一基本要求出发,给出语义忠实语义满翻译的定义.

定义 4. 设σ是 S 到 S'的一个翻译,如果σ还满足如下两个条件:

(1) 对于任意给定的 S 上的公式φ、模型 M、赋值 v 都有

$$(M,v)\vDash\varphi,\text{当且仅当}(\sigma(M),\sigma(v))\vDash\sigma(\varphi).$$

(2) 对于任意给定的 S 上的公式φ、任意的 S'的模型 M'、赋值 v'都有:如果$(M',v')\vDash\sigma(\varphi)$,那么存在 S 的模型 M 和赋值 v,使得

$$(M,v)\vDash\varphi\text{并且}\sigma(M)=M',\sigma(v)=v'.$$

则称σ是一个语义忠实语义满翻译.

定义 4 要求源逻辑的任意一个公式翻译为目标逻辑的一个公式.由谓词模态逻辑到对应物理论的翻译,这样的翻译是将谓词模态逻辑的一个公式φ在一个模型 $M=(W,R,D_w,w_0,I)$的一个可能世界 w 中的真值性翻译到对应物理论中的一个公式.所以,定义 4 中的映射σ应理解为带参数的翻译.

由定义 4 可知,公式的可满足性和不可满足性在语义忠实语义满的翻译下被保持.

命题 1. 如果σ是 S 到 S'的一个语义忠实语义满翻译,那么对 S 的任意公式φ,φ在 S 中可满足当且仅当$\sigma(\varphi)$在 S'中可满足.

命题 2. 如果σ是 S 到 S'的一个语义忠实语义满翻译,那么对 S 的任意公式φ,φ在 S 中不可满足当且仅当$\sigma(\varphi)$在 S'中不可满足.

证明:假设φ在 S 中不可满足但是$\sigma(\varphi)$在 S'中可满足,那么存在模型 M'和赋值 v',使得$(M',v')\vDash\sigma(\varphi)$.由语义忠实语义满翻译的条件(2),就有:$S$ 的模型 M 和赋值 v 使得$(M,v)\vDash\varphi$,这与φ在 S 中不可满足矛盾;反之,若$\sigma(\varphi)$在 S'中不可满足但是φ在 S 中可满足,那么存在 S 的模型 M 和赋值 v,使得$(M,v)\vDash\varphi$.由语义忠实语义满翻译的条件(1),就有$(\sigma(M),\sigma(v))\vDash\sigma(\varphi)$,这与$\sigma(\varphi)$在 S'中不可满足矛盾. □

2 两种翻译的比较

本节首先给出谓词模态逻辑与对应物理论的模型间对应关系,然后简要给出二阶逻辑到一阶逻辑的翻译,最后从语法层和语义层两个方面对这两种翻译进行了简单的比较.

2.1 谓词模态逻辑与对应物理论的模型间翻译

任意给定一个谓词模态逻辑的模型 $M=(W,R,D_w,w_0,I)$和赋值 v,相应地,对应物理论的模型构造如下:

- $U'=W\cup\bigcup_{w\in W}(D_w\times\{w\})$;
- $p^{I'}=\{((a_1,w),\dots,(a_n,w))\in(U')^n:w\in W,a_1,\dots,a_n\in D_w,(a_1,\dots,a_n)\in I(p,w)\}$;
- $I^{I'}=\{((a,w),w):a\in\bigcup_{w\in W}D_w\}$;
- $W^{I'}=W$;
- $A^{I'}=D_w\times\{w_0\}$;
- $C^{I'}=\{((a,w),(b,w'))\in(U')^2$:$w=w'$并且 $a=b$,或者 $w\neq w'$并且存在项 t,使得 $t^{I,v}(w)=a,t^{I,v}(w')=b\}$;
- $c^{I'}=(I(c,w),w)$;
- $v'(x)=(v(x,w),w)$;
- $v'(w)=w$.

2.2 二阶逻辑到一阶逻辑的翻译

设σ_1是二阶逻辑到一阶逻辑的一个翻译.由于二阶逻辑可以用来描述论域中一阶对象的性质、二阶对象的性质以及一阶对象和二阶对象之间的关系,所以需要在一阶逻辑语言基础上添加如下 3 个特殊谓词符号:

- E:$E(x)$表示 x 是一个个体项;
- S:$S(y)$表示 y 是一个集合项;
- H:$H(x,y)$表示 x 是 y 的元素.

任意给定一个二阶逻辑的公式φ,σ_1在公式间的翻译定义如下:

$$\sigma_1(\varphi)=\begin{cases}E(x)\wedge S(y)\wedge H(x,y), & 如果\varphi=x\in X\\ k_1(\sigma_1(t_1))\wedge\ldots\wedge k_n(\sigma_1(t_n))\wedge p(\sigma_1(t_1)\wedge\ldots\wedge\sigma_1(t_n)), & 如果\varphi=p(t_1,\ldots,t_n)\\ \neg\sigma_1(\psi), & 如果\varphi=\neg\psi\\ \sigma_1(\psi)\to\sigma_1(\theta), & 如果\varphi=\psi\to\theta\\ \forall x(E(x)\to\sigma_1(\psi(x))), & 如果\varphi=\forall x\psi(x)\\ \forall y(S(y)\to\sigma_1(\psi(y))), & 如果\varphi=\forall X\psi(X)\end{cases},$$

其中,如果 t_i 为个体项,则 $k_i(\sigma_1(t_i))=E(x_i)$;如果 t_i 为集合项,则 $k_i(\sigma_1(t_i))=S(y_i)$.

σ_1 在语义层的翻译定义如下:

任意给定一个二阶逻辑的模型 M 和赋值 v,构造一个一阶逻辑的模型 $M'=(U',I')$和赋值 v',即

$$(\sigma_1(M),\sigma_1(v))=(U',I',v')=(M',v').$$

其中,

- $U'=U\cup 2^U$;
- $(\sigma_1(t_1)^{I',v'},\ldots,\sigma_1(t_n)^{I',v'})\in p^{I'}$,当且仅当 $(t_1^{I,v},\ldots,t_n^{I,v})\in I(p)$,这里,
$$t_i^{I,v}=\begin{cases}v(x), & 如果t_i=x\\ v(X), & 如果t_i=X\end{cases};$$
- $E^{I'}=U$;
- $S^{I'}=2^U$;
- $v'(x)=v(x)$;
- $v'(y)=v(X)$;
- $(v'(x),v'(y))\in H^{I'}$,当且仅当 $v(x)\in v(X)$.

2.3 两个翻译的比较

下面从语法和语义两个层面,比较二阶逻辑到一阶逻辑和谓词模态逻辑到对应物理论这两个翻译.

2.3.1 语法层比较

由翻译σ和σ_1 容易证明,谓词模态逻辑到对应物理论和二阶逻辑到一阶逻辑的公式之间的翻译均是单射但都不是满射;另一方面,翻译σ的公式之间的翻译都包含了谓词模态逻辑的语义信息,即可能世界 w 作为公式之间翻译的参数,而二阶逻辑到一阶逻辑的翻译完全是在语法层面上的公式之间的对应.

2.3.2 语义层比较

由σ和σ_1 在模型间的翻译,我们证明σ和σ_1 在模型间的翻译是单射但都不是满射.

命题 3. 二阶逻辑到一阶逻辑模型间的翻译σ_1 是一个单射.

证明:对任意两个二阶逻辑的模型 $M_1=(U_1,I_1)$,$M_2=(U_2,I_2)$,如果 $M_1\neq M_2$,那么由二阶逻辑模型的定义就有:或者 $U_1\neq U_2$ 或者 $I_1\neq I_2$.

- 如果 $U_1\neq U_2$,那么由σ_1 的语义层翻译就有 $U_1'=U_1\cup 2^{U_1}$,$U_2'=U_2\cup 2^{U_2}$,$U_1'\neq U_2'$,即$\sigma_1(M_1)\neq\sigma_1(M_2)$;
- 如果 $I_1\neq I_2$,那么存在某个 n 元谓词符号 p,使得 $I_1(p)\neq I_2(p)$.由σ_1 的语义层翻译就有 $p^{I_1'}\neq p^{I_2'}$,即$\sigma_1(M_1)\neq\sigma_1(M_2)$. □

接下来,我们证明σ_1 模型间的翻译σ_1 不是满射.

命题 4. 二阶逻辑到一阶逻辑模型间的翻译不是满射.

证明:令 $M'=(U',I')$是一个一阶逻辑的可数模型,即 M'的论域 U'是一个可数集.由σ_1 在语义层的翻译得知,对任意的二阶逻辑的模型 M,$\sigma_1(M)$的论域或者是有限集或者是不可数集,所以不存在二阶逻辑的模型σ_1 翻译后等于 M'.即二阶逻辑到一阶逻辑在语义层的翻译不是满射. □

命题 5. 谓词模态逻辑到对应物理论的模型间翻译σ是一个单射.

证明:对任意两个谓词模态逻辑的模型 $M_1=(W_1,R_1,D_{w,1},w_0,I_1)$和 $M_2=(W_2,R_2,D_{w,2},w_0,I_2)$.如果 $M_1\neq M_2$,那么由谓

词模态逻辑模型的定义就有:或者 $W_1 \neq W_2$ 或者 $R_1 \neq R_2$ 或者 $D_{w,1} \neq D_{w,2}$ 或者 $I_1 \neq I_2$.

- 如果 $W_1 \neq W_2$,那么由σ的语义层翻译就有 $U_1' \neq U_2'$;
- 如果 $R_1 \neq R_2$,那么 $W_1 \neq W_2$,于是就有 $U_1' \neq U_2'$;
- 如果 $D_{w,1} \neq D_{w,2}$,那么由σ的语义层翻译就有 $U_1' \neq U_2'$;
- 如果 $I_1 \neq I_2$,那么或者存在某个 n 元谓词符号 p,使得 $I_1(p,w) \neq I_2(p,w)$;或者存在某个常量符号 c,使得 $I_1(c,w) \neq I_2(c,w)$:
  - 如果 $I_1(p,w) \neq I_2(p,w)$,那么由σ的语义层翻译就有 $p^{I_1'} \neq p^{I_2'}$;
  - 如果 $I_1(c,w) \neq I_2(c,w)$,那么由σ的语义层翻译就有 $c^{I_1'} \neq c^{I_2'}$. □

命题 6. 谓词模态逻辑到对应物理论的模型间翻译σ不是满的.

证明:令 $N'=(U',I')$,其中,$U'=W' \cup \bigcup_{w \in W'}(D_w' \times \{w\})$,$W'=\{w_0,w_1,w_2\}$,$D_w'=\{a_1,a_2\}$,$C^{I'}=\{((a,w),(a,w)):a \in D_w', w \in W'\}$,$I^{I'}=\{((a,w),w):a \in D', w \in W'\}$,$W^{I'}=W'$,$A^{I'}=\{(a,w_0) \in D_{w_0}' \times \{w_0\}:a \in D'\}$,并且对某个二元谓词符号 p,$p^{I'}=\{((a_1,w_1),(a_2,w_2))\}$,则 N'是一个对应物理论的模型.对任意的给定的谓词模态逻辑模型 M,$\sigma(M)$中的对任意的二元谓词符号 p 的解释为 $p^{I'}=\{((a_1,w),(a_2,w)):(a_1,a_2) \in I(p,w)\}$,所以对任意的谓词模态逻辑的模型 M,$\sigma(M) \neq N'$.即,σ不是模型满的翻译. □

由命题4和命题6可知,σ和σ_1都不是模型满的.这将意味着模型间不是一一对应的,从而导致不可满足的公式翻译为可满足公式的情形.对二阶逻辑到一阶逻辑的翻译情况,我们可以将二阶逻辑的标准语义扩展为Henkin 语义,建立二阶逻辑到一阶逻辑的语义忠实语义满的翻译,详见文献[23].对谓词模态逻辑到对应物理论翻译,我们将引入一个函数来模拟对应物理论中的对应物关系,建立扩展语义的谓词模态逻辑到对应物理论的语义忠实语义满翻译.

3 扩展的模态逻辑语义

在谓词模态逻辑中,论域中的两个对象 a,a'是跨可能世界相等的,是指存在项 t、可能世界 w,w'满足 $t^{I,v}(w)=a$, $t^{I,v}(w')=a'$.上述关系可以如图 1 所示.

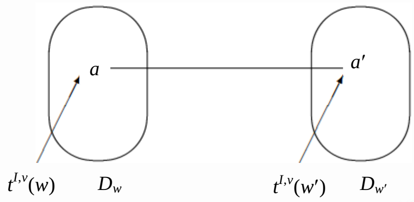

Fig.1

图 1

在对应物理论中,Lewis 试图用对应物关系来表达对象跨可能世界相等关系.但是由对应物理论的 8 条公理可知:对应物理论给对应物关系的要求是很宽松的,即论域中的一个对象可以允许拥有一个对应物、多个对应物或者没有对应物.比如:论域 w 中的对象 b 在 w'中有两个对应物 b_1,b_2.如果对应物理论的项 $t^{I',v'}=b$,那么需要对应物理论中的两个项 t_1,t_2,使得 $t_1^{I',v'}=b_1, t_2^{I',v'}=b_2$ 并且 $C(t_1,t),C(t_2,t)$.上述过程如图 2 所示.

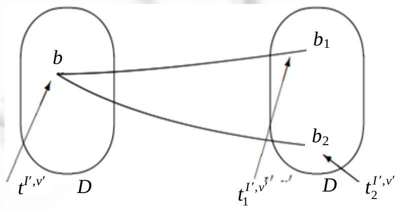

Fig.2

图 2

根据 Lewis 的翻译,谓词模态逻辑中的一个项 t 翻译后只能对应对应物理论的一个项,当论域中的某个对象出现两个对应物时,对应物理论需要两个项来指称该对象的对应物.因此,谓词模态逻辑中的跨可能世界相等关系无法与对应物关系建立一一对应.为了解决这个问题,我们在谓词模态逻辑的模型中引入函数 f 来模拟对应物理论中的对应物关系 C.函数 f 的定义域为 $D\times W\times W$,这里,$D=\bigcup_{w\in W}D_w$,值域为 2^D.由此,可能世界 w 中对象 a 在 w'的对应物就可以显示地表示为 $f(a,w,w')$.定义 5 详细地给出扩展的模态逻辑的语义.

定义 5. 一个扩展的可变论域的谓词模态逻辑的模型 M 是一个六元组(W,R,D_w,w_0,f,I),其中:

- W 是可能世界的集合;
- $R=W\times W$ 是可能世界集合 W 上的可达关系;
- D_w 是可能世界 w 的论域;
- $w_0\in W$ 是现实世界;
- f 是 $D\times W\times W\rightarrow 2^D$ 的部分函数,对任意的 $a\in D_w$,任意的 $w,w'\in W$,$f(a,w,w')$表示可能世界 w 中的对象 a 在可能世界 w'中对应物的集合;
- I 是解释函数,满足:
  ⅰ.对任何常量符号 c 和可能世界 $w\in W$,$I(c,w)\in D_w$;
  ⅱ.对任何 n 元谓词符号 p 和可能世界 $w\in W$,$I(p,w)\subseteq D_w^n$.

一个赋值函数 v,使得对任何变量符号 x 和可能世界 $w\in W$,$v(x,w)\in D_w$.给定一个项 t 和可能世界 w,项 t 在赋值 v 和解释 I 作用下取值为

$$t^{I,v}(w)=\begin{cases}I(c,w), & \text{如果}t=c\\ v(x,w), & \text{如果}t=x\end{cases}.$$

定义 6. 给定公式φ在模型 M,可能世界 w 和赋值 v 下可满足递归定义如下:

- $(M,w)\vDash_v p(t_1,\ldots,t_n)$,当且仅当 $(t_1^{I,v}(w),\ldots,t_n^{I,v}(w))\in I(p,w)$;
- $(M,w)\vDash_v\neg\psi$,当且仅当$(M,w)\nvDash_v\psi$;
- $(M,w)\vDash_v\psi\rightarrow\theta$,当且仅当如果$(M,w)\vDash_v\psi$,则$(M,w)\vDash_v\theta$;
- $(M,w)\vDash_v\forall x\psi(x)$,当且仅当对任意的 $a\in D_w$,$(M,w)\vDash_v\psi(x/a)$;
- $(M,w)\vDash_v\Box\psi(t_1,\ldots,t_n)$,当且仅当对任意的 $w'\in W$、任意的 $a_1\in f(t_1^{I,v}(w),w,w'),\ldots,a_n\in f(t_n^{I,v}(w),w,w')$,都有 $(M,w')\vDash_v\psi(x_1,\ldots,x_n)[x_1/a_1,\ldots,x_n/a_n]$.

有了扩展的谓词模态逻辑的语义,利用三元函数 f 就可以模拟对应物理论的对应物关系.例如:论域 w 中的对象 a 在 w'中有两个对应物 a',a'',则取 $f(a,w,w')=\{a',a''\}$;如果 a 在 w'仅有一个对应物 a',则取 $f(a,w,w')=\{a'\}$;如果 a 在 w'中没有对应物则取 $f(a,w,w')=\varnothing$.

在谓词模态逻辑的模型中引入函数 f,将会在语法上影响对应物理论中公式的表现及相应的翻译规则.比如,假设项 x 在可能世界 w 中存在两个对应物项 t,t',那么谓词模态逻辑的句子,

$$\forall x\Box(\text{Human}(x)\rightarrow\text{Death}(x)),$$

翻译为对应物理论的句子:

$$\forall w(A(x)\rightarrow\forall w((I(t,w)\wedge I(t',w))\wedge(C(t,x)\wedge C(t',x)))\rightarrow(\text{Human}(t)\wedge\text{Human}(t'))\rightarrow(\text{Death}(t)\wedge\text{Death}(t'))).$$

令 $F(t,w,w')$表示论域 w 的项 t 在 w'中对应物项的集合并且$\varphi=\Box\psi(t_1,\ldots,t_n)$,那么,

$$\sigma(\varphi,w_0)=\forall w\forall x_1\ldots\forall x_n(\bigwedge_{x_1\in F(t_1,w_0,w)}I(x_1,w)\wedge\ldots\wedge\bigwedge_{x_n\in F(t_n,w_0,w)}I(x_n,w)\wedge\bigwedge_{x_1\in F(t_1,w_0,w)}C(x_1,t_1)\wedge\ldots\wedge\bigwedge_{x_n\in F(t_n,w_0,w)}C(x_n,t_n))\rightarrow$$
$$\sigma(\bigwedge_{x_1\in F(t_1,w_0,w),\ldots,x_n\in F(t_n,w_0,w)}\psi(x_1,\ldots,x_n),w).$$

4 谓词模态逻辑到对应物理论的语义忠实语义满翻译

本节考虑如何建立扩展语义的谓词模态逻辑到对应物理论的语义忠实语义满翻译.首先,证明扩展语义后的谓词模态逻辑到对应物理论的翻译满足语义忠实语义满翻译定义的条件(1),即证明对任意的谓词模态逻辑

的公式φ,扩展语义的模型 M 和赋值 v,

$$(M,w_0)\vDash_v\varphi,\text{当且仅当}(\sigma(M),\sigma(v))\vDash\sigma(\varphi,w_0).$$

给定一个扩展谓词模态逻辑模型 $M=(W,R,D_w,w_0,f,I)$和赋值 v,构造一个对应物理论的模型$\sigma(M)=(U',I')$和赋值$\sigma(v)=v'$如下:

- $U'=W\cup\bigcup_{w\in W}(D_w\times\{w\})$;
- $p^{I'}=\{((a_1,w),...,(a_n,w))\in(U')^n:w\in W,a_1,...,a_n\in D_w,(a_1,...,a_n)\in I(p,w)\}$;
- $I^{I'}=\{((a,w),w):a\in\bigcup_{w\in W}D_w\}$;
- $W^{I'}=W$;
- $A^{I'}=D_{w_0}\times\{w_0\}$;
- $C^{I'}=\{((a,w),(b,w')\in(U')^2:w=w'$并且 $a=b$,或者 $w\neq w'$并且 $b\in f(a,w,w')\}$;
- $c^{I'}=(I(c,w),w)$;
- $v'(x)=(v(x,w),w)$;
- $v'(w)=w$.

定理 7. 对谓词模态逻辑的任意给定公式φ,扩展语义的模型 M 和赋值 v,

$$(M,w_0)\vDash_v\varphi,\text{当且仅当}(\sigma(M),\sigma(v))\vDash\sigma(\varphi,w_0).$$

证明:施归纳于公式φ的结构.仅列举$\varphi=p(t_1,...,t_n)$和$\varphi=\Box\psi(t_1,...,t_n)$两种情形,其他情形的证明是类似的.

情形 1:若$\varphi=p(t_1,...,t_n)$,则$\sigma(p,w_0)=p(t_1,...,t_n)$,

$$(M,w_0)\vDash_v p(t_1,...,t_n)$$

当且仅当

$$(t_1^{I,v}(w_0),...,t_n^{I,v}(w_0))\in I(p,w_0)$$

当且仅当(由 $p^{I'}$的定义)

$$((t_1^{I,v}(w_0),w_0),...,(t_n^{I,v}(w_0),w_0))\in p^{I'},\text{并且}((t_1^{I,v}(w_0),w_0),w_0)\in I^{I'},...,((t_n^{I,v}(w_0),w_0),w_0)\in I^{I'}$$

当且仅当

$$(\sigma(M),\sigma(v))\vDash p(t_1,...,t_n).$$

情形 2:若$\varphi=\Box\psi(t_1,...,t_n)$,则

$$\sigma(\varphi,w_0)=\forall w\forall x_1...\forall x_n(\bigwedge_{x_1\in F(t_1,w_0,w)}I(x_1,w)\wedge...\wedge\bigwedge_{x_n\in F(t_n,w_0,w)}I(x_n,w)\wedge\bigwedge_{x_1\in F(t_1,w_0,w)}C(x_1,t_1)\wedge...\wedge\bigwedge_{x_n\in F(t_n,w_0,w)}C(x_n,t_n))\rightarrow$$
$$\sigma(\bigwedge_{x_1\in F(t_1,w_0,w),...,x_n\in F(t_n,w_0,w)}\psi(x_1,...,x_n),w),$$

$$(M,w_0)\vDash_v\Box\psi(t_1,...,t_n)$$

当且仅当对任意的 $w\in W,b_i\in f(t_i^{I,v}(w_0),w_0,w)$,$i=1,...,n$ 有

$$(M,w)\vDash_v\psi(x_1/b_1,...,x_n/b_n).$$

对公式$\psi(x_1/b_1,...,x_n/b_n)$的结构作归纳,可以证明对任意的 $w\in W$,任意的 $a_1,...,a_n\in D_{w_0}$,如果

$$a_1=t_1^{I,v}(w_0),...,a_n=t_n^{I,v}(w_0),((b_1,w),w)\in I^{I'},...,((b_n,w),w)\in I^{I'},$$

则$(\sigma(M),\sigma(v))\vDash\sigma(\bigwedge_{x_1\in F(t_1,w_0,w),...,x_n\in F(t_n,w_0,w)}\psi(x_1/b_1,...,x_n/b_n),w)$.

即,$(\sigma(M),\sigma(v))\vDash\sigma(\Box\psi(t_1,...,t_n),w_0)$. □

接下来,我们考虑扩展语义的谓词模态逻辑到对应物理论的翻译满足语义忠实语义满翻译定义的条件(2),即证明对任意的谓词模态逻辑的公式φ和可能世界 w,对任意的对应物理论的模型 M''和赋值 v'',如果$(M'',v'')\vDash\sigma(\varphi,w)$,那么存在扩展语义的谓词模态逻辑的模型 M 和赋值 v,使得

$$(M,w)\vDash_v\varphi,\text{并且}\sigma(M)=M'',\sigma(v)=v''.$$

假设对任意的谓词模态逻辑中的常量符号 c、变量符号 x 和可能世界 w,c_w 和 x_w 分别表示相应的对应物理论的常量符号和变量符号,并且常量符号 c_w 和变量符号 x_w 满足如下条件:$I(x_w,w),I(c_w,w)$.

任意给定一个对应物理论$M''=(U'',I'')$和赋值v'',构造扩展语义的谓词模态逻辑模型$M=(W,R,D_w,w_0,f,I)$如下:

- $W=W^{I''}$;
- $R=W\times W$;
- $D_w=\{a\in U'':(a,w)\in I^{I''}\}$;
- $D_{w_0}=\{a\in U'':a\in A^{I''}\}$;
- $I(c,w)=I''(c_w)$;
- $f:D\times W\times W\to 2^D$的函数,$f(a,w,w')=\{b\in U'':(a,w)\in I^{I''}$并且$(b,w')\in I^{I''}$并且$(b,a)\in C^{I''}\}$;
- $I(p,w)=\{(a_1,\dots,a_n)\in(U'')^n:(a_1,w)\in I^{I''},\dots,(a_n,w)\in I^{I''},(a_1,\dots,a_n)\in p^{I''}\}$;
- $v(x,w)=v''(x_w)$.

根据上述模型的构造,就有$\sigma(M)=M''$,$\sigma(v)=v''$.施归纳于公式φ的结构,我们证明:如果$(M'',v'')\vDash\sigma(\varphi,w)$,那么$(M,w)\vDash_v\varphi$.

定理 8. 对谓词模态逻辑中的任意公式φ和可能世界 w,对任意的对应物理论的模型 M''和赋值 v'',若$(M'',v'')\vDash\sigma(\varphi,w)$,则总存在扩展语义的谓词模态逻辑的模型 M 和赋值 v,使得$(M,w)\vDash_v\varphi$.

证明:施归纳于公式φ的结构.仅列举$\varphi=p(t_1,\dots,t_n)$和$\varphi=\Box\psi(t_1,\dots,t_n)$两种情形,其他情形的证明是类似的.

情形 1:若$\varphi=p(t_1,\dots,t_n)$,则$\sigma(p(t_1,\dots,t_n),w)=p(t_{1,w},\dots,t_{n,w})$.

假设$(M'',v'')\vDash p(t_{1,w},\dots,t_{n,w})$,则

$$(t_{1,w}^{I'',v''},\dots,t_{n,w}^{I'',v''})\in p^{I''},\text{并且}(t_{1,w}^{I'',v''},w)\in I^{I''},\dots,(t_{n,w}^{I'',v''},w)\in I^{I''},$$

那么就有$(t_1^{I,v}(w),\dots,t_n^{I,v}(w))\in I(p,w)$.即,$(M,w)\vDash_v p(t_1,\dots,t_n)$.

情形 2:若$\varphi=\Box\psi(t_1,\dots,t_n)$,则

$$\sigma(\varphi,w)=\forall w'\forall x_1\dots\forall x_n(\bigwedge_{x_1\in F(t_{1,w},w,w')}I(x_1,w)\wedge\dots\wedge\bigwedge_{x_n\in F(t_{n,w},w,w')}I(x_n,w)\wedge\bigwedge_{x_1\in F(t_{1,w},w,w')}C(x_1,t_{1,w})\wedge\dots\wedge$$
$$\bigwedge_{x_n\in F(t_{n,w},w,w')}C(x_n,t_{n,w}))\to\sigma(\bigwedge_{x_1\in F(t_{1,w},w,w'),\dots,x_n\in F(t_{n,w},w,w')}\psi(x_1,\dots,x_n),w').$$

假设$(M'',v'')\vDash\sigma(\varphi,w)$,即对任意的 $w'\in W$、任意的 $a_1,\dots,a_n\in U''$,如果

$$(a_1,w')\in I^{I''},\dots,(a_n,w')\in I^{I''},(t_{1,w}^{I'',v''},w)\in \boldsymbol{I}^{I''},\dots,(t_{n,w}^{I'',v''},w)\in \boldsymbol{I}^{I''},\text{并且}(a_1,t_{1,w}^{I'',v''})\in\boldsymbol{C}^{I''},\dots,(a_n,t_{n,w}^{I'',v''})\in\boldsymbol{C}^{I''},$$

则有

$$(M'',v'')\vDash\sigma(\bigwedge_{x_1\in F(t_{1,w},w,w'),\dots,x_n\in F(t_{n,w},w,w')}\psi(x_1,\dots,x_n),w')[x_1/a_1,\dots,x_n/a_n].$$

由扩展语义模态逻辑模型:对任意的 $w'\in W$、任意的 $a_1\in f(t_1^{I,v}(w),w,w'),\dots,a_n\in f(t_n^{I,v}(w),w,w')$ 都有

$$(M,w')\vDash_v\psi(x_1,\dots,x_n)[x_1/a_1,\dots,x_n/a_n],$$

也就是$(M,w)\vDash_v\Box\psi(t_1,\dots,t_n)$. □

5 扩展语义的谓词模态逻辑的可靠性和完备性

本节讨论引入函数 f 的扩展语义的谓词模态逻辑的可靠性和完备性.首先证明:如果 S,S'的语言都包含否定联结词,并且σ是一个否定可分配的语义忠实语义满翻译,即对任意的公式φ,$\sigma(\neg\varphi)=\neg\sigma(\varphi)$,那么对 S 的任意公式φ,

$$\vdash_S\varphi,\text{当且仅当}\vdash_{S'}\sigma(\varphi).$$

命题 9. S,S'的语言都包含否定联结词.如果σ是 S 到 S'的一个否定可分配的语义忠实语义满翻译,那么对 S 的任意公式φ,

$$\vdash_S\varphi,\text{当且仅当}\vdash_{S'}\sigma(\varphi).$$

证明:对 S 的任意公式φ,如果$\vdash_S\varphi$但是$\nvdash_{S'}\sigma(\varphi)$,那么存在 S'的模型 M'和赋值 v',使得$(M',v')\vDash_{S'}\neg\sigma(\varphi)$.因为$\sigma$是语义忠实语义满的,并且对任意的公式$\varphi$,$\sigma(\neg\varphi)=\neg\sigma(\varphi)$,所以存在 S 的模型 M 和赋值 v,使得$(M,v)\vDash_S\neg\varphi$.这与$\vdash_S\varphi$矛盾.

反之,如果$\vdash_{S'}\sigma(\varphi)$但是$\nvdash_S\varphi$,那么存在 S 的模型 M 和赋值 v,使得$(M,v)\vDash_S\neg\varphi$.因为σ是语义忠实语义满的,并且对任意的公式φ,$\sigma(\neg\varphi)=\neg\sigma(\varphi)$,所以就有$(\sigma(M),\sigma(v))\vDash_{S'}\neg\sigma(\varphi)$.这与$\vdash_{S'}\sigma(\varphi)$矛盾. □

一个逻辑 S 是可靠的,当且仅当对 S 的任意公式φ,如果φ是 S 的一个定理,那么φ是 S 的一个永真公式.接下来我们证明:如果源逻辑到目标逻辑存在否定可分配的语义忠实语义满翻译,那么目标逻辑的可靠性蕴涵了源逻辑的可靠性.

命题 10. 设 S,S'的语言都包含否定联结词.如果σ是 S 到 S'的一个否定可分配的语义忠实语义满翻译,那么若 S'是可靠的,则 S 也是可靠的.

证明:对 S 的任意公式φ,如果φ是 S 的定理,那么由命题 9 可得:$\sigma(\varphi)$是 S'的定理.因为 S'是可靠的,所以$\sigma(\varphi)$是一个永真公式.由命题 2 就有:φ是 S 的一个永真公式.即 S 是可靠的. □

一个逻辑 S 是完备的,当且仅当对 S 的任意公式φ,若φ是一个永真公式,则φ是 S 的一个定理.下面我们证明:若源逻辑到目标逻辑存在否定可分配的语义忠实语义满翻译,则目标逻辑的完备性蕴涵了源逻辑的完备性.

命题 11. 设 S,S'的语言都包含否定联结词.如果σ是 S 到 S'的一个否定可分配的语义忠实语义满翻译,那么若 S'是完备的,则 S 也是完备的.

证明:对 S 的任意公式φ,如果φ是一个永真公式,那么由命题 2 就有:$\sigma(\varphi)$是 S'一个永真公式.因为 S'是完备的,所以$\sigma(\varphi)$是 S'的一个定理.由命题 9 则有:φ也是 S 的一个定理.即 S 是完备的. □

对应物理论是一阶逻辑的一个理论,由于一阶逻辑是可靠的和完备的,所以对应物理论也是可靠的和完备的.由命题 10 和命题 11 以及定理 7 和定理 8,就有定理 12.

定理 12. 引入函数 f 的扩展语义的谓词模态逻辑是可靠的和完备的.

6 结 论

由于谓词模态逻辑的可能世界语义还存在尚未解决的问题,导致谓词模态逻辑还没有得到广泛应用.对应物理论是一阶逻辑的一个理论,它较好地解决了谓词模态逻辑语义问题中的跨可能时间相等问题.但是由于没有考虑到谓词模态逻辑到对应物理论的语义对应关系,Lewis 的谓词模态逻辑到对应物理论的翻译存在把不可满足的公式翻译为可满足公式的情形.为了解决上述问题,本文提出了扩展语义的谓词模态逻辑,并在此基础上建立了谓词模态逻辑到对应物理论的语义忠实语义满翻译,上述翻译确保谓词模态逻辑的可满足公式和不可满足的公式分别翻译为对应物理论的可满足公式和不可满足公式.进一步地,证明了扩展语义的谓词模态逻辑仍然是可靠的和完备的.

References:

[1] Van Benthem J. Temporal logic. In: Gabbay D, Hogger C, Robinson J, eds. Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming, Vol.4. Oxford: Clarendon Press, 1995. 241−350.

[2] Harel D. Dynamic logic. In: Gabbay D, Guenthner F, eds. Handbook of Philosophical Logic, Vol.2. Dordrecht: D. Reidel, 1984. 497−604.

[3] Wooldridge M. Reasoning About Rational Agents. MIT Press, 2000. 47−68.

[4] Burrows M, Abadi M, Needham A. A logic of authentication. ACM Trans. on Computer Systems, 1990,8(1):18−31. [doi: 10.1145/77648.77649]

[5] Aqvist L. Deontic logic. In: Gabbay D, Guenthner F, eds. Handbook of Philosophical Logic, Vol.8. 2nd ed., Netherlands: Kluwer Academic Publihers, 2002. 147−264.

[6] Lewis D. Counterpart theory and quantified modal logic. The Journal of Philosophy, 1968,65(5):113−126. [doi: 10.2307/2024555]

[7] Lewis D. On the Plurality of Worlds. Australia: Blackwell Publishing, 1986. 1−42.

[8] Hazen A. Counterpart-Theoretic semantics for modal logic. The Journal of Philosophy, 1979,76(6):319−338. [doi: 10.2307/2025472]

[9] Corsi G. Counterpart semantics: A foundational study on quantified modal logics. ILLC Report, 02-20, Amsterdam: The Institute for Logic, Language and Computation, 2002. 1–61.

[10] Brauner T, Ghilardi S. First-Order modal logic. In: Blackburn P, van Benthem J, Wolter F, eds. Handbook of Modal Logic. Holland: Elsevier, 2007. 550–620.

[11] Kracht M, Kutz O. The semantics of modal predicate logic ii—Modal individuals revisited. In: Kahle R, ed. Intensionality, Lecture Notes in Logic, Vol.22. Los Angeles: Association for Symbolic Logic, 2001. 60–97.

[12] Kracht M, Kutz O. The semantics of modal predicate logic i—Counterpart frames. In: Wolter F, Wansing H, de Rijke M, Zakharyaschev M, eds. Advances in Modal Logic. Standford: CSLI Publications, 2002. 295–316.

[13] Belardinelli F. Quantified modal logic and the ontology of physical objects [Ph.D. Thesis]. Pisa: Scuola Normale Superiore, 2006.

[14] Forbes G. Canonical counterpart theory. Analysis, 1982,42(1):33–37. [doi: 10.2307/3327712]

[15] Ramachandran M. An alternative translation scheme for counterpart theory. Analysis, 1989,49(3):131–141. [doi: 10.2307/3328115]

[16] Fara M, Williamson T. Counterparts and actuality. Mind, 2005,114(453):1–30. [doi: 10.1093/mind/fzi001]

[17] Grove AJ. Naming and identity in epistemic logic Part II: A first-order logic for naming. Artificial Intelligence. 1995,74(2): 311–350. [doi: 10.1016/0004-3702(95)98593-D]

[18] Cohen M, Dam M. Logical omniscience in the semantics of BAN logic. In: Proc. of the Foundations of Computer Security (FCS 2005). Chicago: IEEE, 2005. 121–132.

[19] Egre P. Logical omniscience and counterpart semantics. In: Proc. of the ESSLLI 2006 Workshop on Logics for Resource-Bounded Agents. Malaga: University of Malaga, 2006. 1–13.

[20] Yahav E, Reps T, Sagiv M, Wilhelm R. Verifying temporal heap properties specified via evolution logic. In: Degano P, ed. Proc. of the ESOP 2003 and ETAPS 2003. LNCS 2618, Warsaw: Springer-Verlag, 2003. 204–222. [doi: 10.1007/3-540-36575-3_15]

[21] Cohen M, Dam M, Lomuscio A, Qu H. A symmetry reduction technique for model checking temporal-epistemic logic. In: Proc. of the 21st Int'l Joint Conf. on Artificial Intelligence (IJCAI 2009). Pasadena: Morgan Kaufmann Publishers, 2009. 721–726.

[22] Shen YM, Ma Y, Cao CG, Sui YF, Wang J. Logical properties on translations between logics. Chinese Journal of Computers, 2009, 32(10):2091–2098 (in Chinese with English abstract).

[23] Boolos G. On second-order logic. The Journal of Philosophy, 1975,72(16):509–527. [doi: 10.2307/2025179]

[24] Henkin L. Completeness in the theory of types. Journal of Symbolic Logic, 1950,15(2):159–171. [doi: 10.2307/2266967]

[25] Fitting M, Mendelsohn R. First-Order Modal Logic. The Netherland: Kluwer Academic Publishers, 1998. 81–115.

附中文参考文献:

[22] 申宇铭,马越,曹存根,眭跃飞,王驹.不同逻辑间翻译的逻辑性质.计算机学报,2009,32(10):2091–2098.

申宇铭(1976－),男,广西桂林人,博士,副教授,主要研究领域为模态逻辑,描述逻辑.

唐素勤(1972－),女,博士,副教授,主要研究领域为本体,描述逻辑.

王驹(1950－),男,博士,研究员,博士生导师,主要研究领域为人工智能.

蒋运承(1974－),男,博士,教授,主要研究领域为语义 Web,描述逻辑.