ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
Journal of Software, Vol.21, No.9, September 2010, pp.2107−2117
doi: 10.3724/SP.J.1001.2010.03855

E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel/Fax: +86-10-62562563

基于量子逻辑的下推自动机与上下文无关文法*

韩召伟[1+], 李永明[2]

[1](陕西师范大学 计算机科学学院,陕西 西安 710062)

[2](陕西师范大学 数学与信息科学学院,陕西 西安 710062)

Pushdown Automata and Context-Free Grammars Based on Quantum Logic

HAN Zhao-Wei[1+], LI Yong-Ming[2]

[1](College of Computer Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)

[2](College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)

+ Corresponding author: E-mail: hanzw888@snnu.edu.cn

Han ZW, Li YM. Pushdown automata and context-free grammars based on quantum logic. *Journal of Software*, 2010,21(9):2107−2117. http://www.jos.org.cn/1000-9825/3855.htm

Abstract: In this paper, an orthomodular lattice-valued pushdown automaton (ℓ-VPDA) is introduced. This paper also provides the means of general subset-construction, and further proves the fact that an ℓ-VPDA can accept the same l-valued language by final states and by another ℓ-VPDA, with crisp transition relation and quantum final states at the same time. By using these relations, this paper is able to establish some algebraic level characterizations of orthomodular lattice-valued context-free languages and also focuses on the closed properties of these l-valued languages in details under standard operative conditions. Finally, this paper presents that an arbitrary orthomodular lattice-valued context-free grammar (ℓ-VCFG) are mutually equivalently constructed with a ℓ-VPDA, respectively.

Key words: quantum logic; orthomodular lattice; orthomodular lattice-valued pushdown automata; orthomodular lattice-valued context-free language; orthomodular lattice-valued context-free grammar

摘 要: 给出基于量子逻辑的下推自动机(ℓ-VPDA)的概念,提出广义的子集构造方法,进而证明了一般的ℓ-VPDA与状态转移为分明函数且具有量子终态的ℓ-VPDA 的等价性.利用此等价性,给出了量子上下文无关语言的代数刻画与层次刻画,并籍此证明了量子上下文无关语言关于正则运算的封闭性.最后,说明了量子下推自动机和量子上下文无关文法(ℓ-VCFG)的等价性.

关键词: 量子逻辑;正交模格;量子下推自动机;量子上下文无关语言;量子上下文无关文法

中图法分类号: TP301 **文献标识码**: A

量子计算的思想源于物理与计算之间的联系[1,2].由于可逆性是量子物理的一个重要特征,所以该问题可追溯到 1973 年 Bennett[2]证明了任意的 Turing 机都能被可逆的 Turing 机有效地模拟.Benioff[3]于 1980 年构造了

* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.10571112 (国家自然科学基金); the Youth Technology Project of Shaanxi Normal University of China under Grant No.200701008 (陕西师范大学青年科技项目)

Received 2008-03-23; Revised 2010-01-20; Accepted 2010-03-29

一类基于量子力学原理的 Turing 计算模型,并证明它能够模拟经典的可逆 Turing 机.其后不久,Feynman[4]提出了一个本质的猜想:经典 Turing 机模拟一些量子现象的计算速度很可能呈指数下降.Deutsch 于 1985 年重新考察 Church-Turing 原理,并将 Feynman 的思想形式化,提出了量子并行操作技术,因而他引入的量子 Turing 机能在同一带上将大量的输入信号进行编码,并同时对它们进行演算.在进一步探索量子并行操作技术的过程中,Shor[5]于 1994 年发现了在量子计算机上进行大数分解的多项式时间算法,Grover[6]于 1996 年为模式识别和数据挖掘发展了平方根时间的量子搜索算法.由于大数分解和数据挖掘是计算机科学的中心问题,所以此后,量子计算成为物理学和计算机科学的一个日益活跃的研究领域,日益受到人们的关注和重视.至今,量子计算的研究大致可以分为 4 个层次:(1) 物理实现;(2) 物理模型;(3) 数学模型;(4) 逻辑基础.Lloyd 和 Cirac 等人[7,8]考虑过第(1)个层次;文献[3,4,9]考虑过第(2)个层次.量子计算模型的研究是量子计算中的一个重要的研究问题,在经典计算机理论中[10–13],有穷自动机可以看作一类具有有限内存的计算机的简单数学模型.文献[14–17]将状态集量子化,推广了经典自动机理论,引入了作为量子计算机的简单模型的量子自动机.Birkhoff 和 Neumann[18]于 1936 年在研究量子力学的逻辑基础问题时提出量子逻辑的概念,它源于量子力学的 Hilbert 空间形式化.因为一个量子系统可用 Hilbert 空间的闭子空间来描述,而一个 Hilbert 空间的所有闭子空间具有正交模格的代数结构,正如 Boolean 代数是经典逻辑的代数形式一样,因此,人们提议用正交模格作为量子力学逻辑的代数形式.实际上,正交模格有时被直接定义为量子逻辑[19,20].应明生等人在文献[21–27]中将量子逻辑定义为完备的正交模格值逻辑,采用语义分析的方法建立了基于量子逻辑的有穷自动机理论,是量子计算逻辑基础方面一个重要的研究方向.目前已经得到了很多与经典逻辑意义下不同的结果,并试图揭示量子计算的逻辑基础问题,其本身可以认为是一般有穷自动机理论的深化和推广.特别地,在文献[24,25]中,应明生给出了基于量子逻辑的自动机的重要定理的成立都依赖于正交模格中子集的交换子的条件,即对应的定理的完全成立依赖于正交模格的分配律,从而又还原到 Boolean 逻辑或者经典逻辑的情形.下推自动机和上下文无关文法[10,11]作为计算理论中两类重要的数学模型,它不仅是计算机科学的理论基础,为现代计算理论提供可靠的形式理论,而且与神经网络、数学模型等领域密切相关,在汇编语言、编译语言、算法设计、硬件设计和人工智能等方面有着重要的应用.本文在量子逻辑意义下对下推自动机和上下文无关文法作进一步研究,通过引入的广义子集构造方法,从全新的角度丰富了ℓ-值下推自动机理论,给出量子上下文无关语言的代数刻画和层次刻画以及对于正则运算(比如关于ℓ-值语言的有限并、数量积、连接、反转、Kleene 闭包、同态、逆同态)的封闭性全新证明方法,得到了比较完善的结果,使ℓ-值下推自动机理论得到实质性加强.

1 基于量子逻辑的下推自动机定义及其性质

量子逻辑是指真值为完备正交模格ℓ的逻辑,亦称为正交模格值逻辑,见文献[21–27].完备的正交模格是七元组$\ell=(L,\leqslant,\wedge,\vee,\perp,0,1)$,其中:$\ell=(L,\leqslant,\wedge,\vee,0,1)$是完备格;0 和 1 分别是最小元与最大元;$\leqslant$是偏序;对 $X\subseteq L$,$\wedge X$ 与$\vee X$分别表示X的最大下界与最小上界;一元运算$\perp$是L上的正交补,满足:对任意的$a,b\in L,a\wedge a^{\perp}=0,a\vee a^{\perp}=1;a^{\perp\perp}=a$;$a\leqslant b$ 蕴涵 $b^{\perp}\leqslant a^{\perp}$.同时,$\ell$满足正交模律:$a\leqslant b$ 蕴涵 $a\vee(a^{\perp}\wedge b)=b$.在$\ell$上定义蕴含算子$\rightarrow:L\times L\rightarrow L$ 满足:$a,b\in L,a\leqslant b$当且仅当 $a\rightarrow b=1$.本文假设$\rightarrow$为 Sasaki 蕴涵,即 $a\rightarrow b=a^{\perp}\vee(a\wedge b)$.双蕴涵$\leftrightarrow$定义为:对任意的$a,b\in L$,$a\leftrightarrow b\overset{def}{=}(a\rightarrow b)\wedge(b\rightarrow a)$.正交模格值逻辑的语法与经典的一阶逻辑类似.$\neg,\vee,\rightarrow$是 3 个原始连接词,$\exists$是原始量词.$\wedge,\leftrightarrow$以及$\forall$由$\neg,\vee,\rightarrow$和$\exists$定义.语义方面,将$\neg,\vee$,和$\rightarrow$分别解释为$\perp,\vee$和$\rightarrow$;$\exists$解释为$\ell$中的最小上界,集合论公式 $x\in A$ 的真值是$\lceil x\in A\rceil=A(x)$;公式φ是有效的当且仅当$\lceil\varphi\rceil=1$,并记为$\vDash^{\ell}\varphi$.对ℓ的有限子集 X,定义 X 交换子(commutator)$\gamma(X)$如下:$\gamma(X)=\vee\{\wedge_{a\in X}a^{f(a)}:f:X\rightarrow\{1,-1\}$为映射$\}$,其中,$a^1=a,a^{-1}=a^{\perp}$.

定义 1.1. ℓ-值下推自动机(简记为ℓ-VPDA)是七元组 $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$,其中:$Q,\Sigma,\Gamma$都是非空有限集,分别表示有限状态集、有限输入符号集和有限栈字母集;q_0 表示初始状态;Z_0 表示开始栈符号;$\delta:Q\times(\Sigma\cup\{\varepsilon\})\times\Gamma\rightarrow\ell_f(Q\times\Gamma^*)$表示状态转移关系.其中:$\varepsilon$表示空字符串,而$\ell_f(Q\times\Gamma^*)$表示 $Q\times\Gamma^*$的ℓ-值有限子集.亦即,对任意$(q,\tau,Z)\in Q\times(\Sigma\cup\{\varepsilon\})\times\Gamma,\delta(q,\tau,Z)\in\ell^{Q\times\Gamma^*}$ 且 $supp(\delta(q,\tau,Z))$有限.$F:Q\rightarrow L$,即 Q 的ℓ-值子集,表示终状态.

如下命题:

- “q 为终状态”记为“$q\in F$”;
- “输入τ使得当前状态 q 且栈顶符号 Z,转移到下一个状态 p 且栈顶符号 Z 换为γ”记为“$(p,\gamma)\in\delta(q,\tau,Z)$”,其中,$p,q\in Q,Z,\gamma\in\Gamma,\tau\in(\Sigma\cup\{\varepsilon\})$.

这些命题真值分别为 $F(q),\delta(q,\tau,Z)(p,\gamma)$.

注 1.1. 定义 1.1 与文献[26]中的定义不同之处是:首先,本文终状态之集 F 为ℓ值有限子集,即量子之集.此定义能够确保量子下推自动机接受一定真值程度的字符串(在给定的量子逻辑中),从而能够识别量子语言;其次,本文中 $supp(\delta(q,\tau,Z))$有限,从而易知 $Im(\delta)$有限,此定义可认为经典下推自动机的推广,而文献[26]中定义也不符合自动机应该是能够有限描述的计算模型的基本要求.由于Γ^*无限,从而可知 $Im(\delta)$无限,因为其中涉及到ℓ中无限多个格值,这样讨论起来似乎不方便.而当文献[26]中 $Im(\delta)$有限时,可认为是本文中的一种特殊情况,只需限制本文 F 为经典终状态子集即可.本文与文献[25]的不同之处在于δ定义不同,此定义较容易认为是经典自动机理论的推广.

定义 1.2. 设 $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$为任一$\ell$-VPDA,三元组$(q,\omega,\gamma)\in Q\times\Sigma^*\times\Gamma^*$称为 M 的一个瞬时描述(instantaneous description,简称 ID),它表示 M 处于状态 q,ω为当前还未处理的输入字符串,而 M 注视着ω的首字符,栈中的符号串为γ.

定义 1.3. 设 $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$为任一$\ell$-VPDA,$M$ 的一步ℓ值移动$\vdash^{\ell}$(可简记为$\vdash$)定义为$\vdash:(Q\times\Sigma^*\times\Gamma^*)\times(Q\times\Sigma^*\times\Gamma^*)\to\ell$,即对任意 $p,q\in Q,\tau\in\Sigma\cup\{\varepsilon\},\omega\in\Sigma^*,X,Z\in\Gamma,\beta\in\Gamma^*,(q,\tau\omega,X\beta)\vdash^{\gamma}(p,\omega,Z\beta)$.其中,$r\in\ell,\delta(q,\tau,X)(p,Z)=r$ 即 $\vdash((q,\tau\omega,X\beta),(p,\omega,Z\beta))=\delta(q,\tau,X)(p,Z)$.而多步移动$\vdash^*$定义为$\vdash$的反射与传递闭包,其中,集合 Q 上的ℓ值关系 R 的反射与传递闭包 R^*定义为 $R^*=I\cup R\cup R\circ R\cup\ldots\cup R^n\cup\ldots$,而$\circ$表示$\ell$值关系的 max-min 复合,其中 $R^0=I,R^{n+1}=R^n\circ R$.

定义 1.4. 设 $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$为任一$\ell$-VPDA,对任意输入串$\omega\in\Sigma^*,\omega=\tau_1\tau_2\ldots\tau_n$,其中,$\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n\in(\Sigma\cup\{\varepsilon\})$,则定义$\Sigma^*$上的$\ell$-值路径谓词 $path_M\in\ell(\Sigma^*)$为

$$\begin{aligned}path_M(\omega)\overset{\text{def}}{=}&((q_0,\tau_1\tau_2\ldots\tau_n,Z_0),(q_1,\tau_2\ldots\tau_n,Z_1\gamma_1))\in\vdash\wedge((q_1,\tau_2\tau_3\ldots\tau_n,Z_1\gamma_1),(q_2,\tau_3\ldots\tau_n,Z_2\gamma_2))\in\vdash\wedge\ldots\wedge\\&((q_{n-1},\tau_n,Z_{n-1}\gamma_{n-1}),(q_n,\varepsilon,Z_n\gamma_n))\in\vdash.\end{aligned}$$

其中,$q_i\in Q,Z_i\in\Gamma,\gamma_i\in\Gamma^*,i=1,2,\ldots,n$.即命题 $path_M(\omega)$的真值定义为

$$\begin{aligned}\lceil path_M(\omega)\rceil\overset{\text{def}}{=}&\vdash((q_0,\tau_1\tau_2\ldots\tau_n,Z_0),(q_1,\tau_2\ldots\tau_n,Z_1\gamma_1))\wedge\vdash((q_1,\tau_2\ldots\tau_n,Z_1\gamma_1),(q_2,\tau_3\ldots\tau_n,Z_2\gamma_2))\wedge\ldots\wedge\\&\vdash((q_{n-1},\tau_n,Z_{n-1}\gamma_{n-1}),(q_n,\varepsilon,Z_n\gamma_n)).\end{aligned}$$

而Σ^*上的ℓ-值路径谓词 $path_M^{\Phi}\in\ell(\Sigma^*)$ 定义为

$$\begin{aligned}path_M^{\Phi}(\omega)\overset{\text{def}}{=}&((q_0,\tau_1\tau_2\ldots\tau_n,Z_0),(q_1,\tau_2\ldots\tau_n,Z_1\gamma_1))\in\vdash\wedge((q_1,\tau_2\tau_3\ldots\tau_n,Z_1\gamma_1),(q_2,\tau_3\ldots\tau_n,Z_2\gamma_2))\in\vdash\wedge\ldots\wedge\\&((q_{n-1},\tau_n,Z_{n-1}\gamma_{n-1}),(q_n,\varepsilon,\varepsilon))\in\vdash,\end{aligned}$$

其中,$q_1,\ldots,q_n\in Q,Z_1,\ldots,Z_{n-1}\in\Gamma,\gamma_1,\ldots,\gamma_{n-1}\in\Gamma^*$.即命题 $path_M(\omega)$的真值定义为

$$\begin{aligned}\lceil path_M^{\Phi}(\omega)\rceil\overset{\text{def}}{=}&\vdash((q_0,\tau_1\tau_2\ldots\tau_n,Z_0),(q_1,\tau_2\ldots\tau_n,Z_1\gamma_1))\wedge\vdash((q_1,\tau_2\ldots\tau_n,Z_1\gamma_1),(q_2,\tau_3\ldots\tau_n,Z_2\gamma_2))\wedge\ldots\wedge\\&\vdash((q_{n-1},\tau_n,Z_{n-1}\gamma_{n-1}),(q_n,\varepsilon,\varepsilon)).\end{aligned}$$

记ℓ-VPDA M 的所有ℓ-值路径的集合为 $PATH_M$.

注 1.2. 由定义 1.3 和定义 1.4 得知,Σ^*上的ℓ-值路径谓词 $path_M\in\ell(\Sigma^*)$的真值 $path_M(\omega)$可定义为

$$\lceil path_M(\omega)\rceil\overset{\text{def}}{=}\delta(q_0,\tau_1,Z_0)(q_1,Z_1\gamma_1)\wedge\delta(q_1,\tau_2,Z_1)(q_2,Z_2\gamma_2)\wedge\ldots\wedge\delta(q_{n-1},\tau_n,Z_{n-1})(q_n,Z_n\gamma_n).$$

而Σ^*上ℓ-值路径谓词 $path_M^{\phi}\in\ell(\Sigma^*)$ 的真值为

$$\lceil path_M^{\Phi}\rceil\overset{\text{def}}{=}\delta(q_0,\tau_1,Z_0)(q_1,Z_1\gamma_1)\wedge\delta(q_1,\tau_2,Z_1)(q_2,Z_2\gamma_2)\wedge\ldots\wedge\delta(q_{n-1},\tau_n,Z_{n-1})(q_n,\varepsilon).$$

定义 1.5. 设 $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$为任一$\ell$-VPDA,对任意输入串$\omega\in\Sigma^*$,令 $\omega=\tau_1\tau_2\ldots\tau_n$,其中,$\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n\in(\Sigma\cup\{\varepsilon\})$.定义$\Sigma^*$上的以终态方式接受的$\ell$-值可识别谓词 $rec_M^T\in\ell(\Sigma^*)$为

$$rec_M^T(\omega)\overset{\text{def}}{=}(\exists path_M\in PATH_M).(path_M(\omega)\wedge q_n\in F).$$

即命题 $rec_M^T(\omega)$ 的真值定义为

$$\lceil rec_M^T(\omega)\rceil \overset{\text{def}}{=} \vee\{\lceil path_M(\omega)\rceil \wedge F(q_n): path_M \in PATH_M\}.$$

而定义Σ^*上的以空栈方式接受的ℓ-值可识别谓词 $rec_M^S \in \ell(\Sigma^*)$ 为

$$rec_M^S(\omega) \overset{\text{def}}{=} (\exists path_M^{\Phi} \in PATH_M).(path_M^{\Phi}(\omega)).$$

即命题 $rec_M^S(\omega)$ 的真值定义为

$$\lceil rec_M^S(\omega)\rceil \overset{\text{def}}{=} \vee\{\lceil path_M^{\Phi}(\omega)\rceil : path_M^{\Phi} \in PATH_M\}.$$

这时, rec_M^T 和 rec_M^S 分别称为ℓ-值下推自动机 M 以终状态和以空栈方式识别或接受的Σ上的ℓ-值语言.以下用$\ell(\Sigma^*)$表示Σ^*上的所有ℓ-值语言之集.另外,本文中ℓ-值语言也称为量子语言.对 $A\in\ell(\Sigma^*)$,若存在ℓ-VPDA M 使得 $A=rec_M^T$ 或 $A=rec_M^S$,则称 A 为Σ上以终状态或以空栈方式识别的ℓ-值上下文无关语言.若不特别指定正交模格ℓ和接受方式时,A 也称为量子上下文无关语言.

这里,为了区分ℓ-VPDA 以终态方式和以空栈方式接受语言,记以空栈方式接受ℓ-值上下文无关语言的ℓ-VPDA 为 $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,\phi)$.

当ℓ-VPDA $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$和 $M_1=(Q_1,\Sigma,\Gamma_1,\delta_1,q_1,Z_1,F_1)$接受相同的量子上下文无关语言时,即对任意 $\omega\in\Sigma^*, rec_M^T(\omega)=rec_{M_1}^T(\omega)$,称 M 和 M_1 相互等价,并记为 $M\equiv M_1$.

注 1.3. 由定义 1.3~定义 1.5,

$$\lceil rec_M^T(\omega)\rceil = \vee\{\lceil path_M(\omega)\rceil \wedge F(q_n): path_M \in PATH_M\} = \vee\{\vdash^*((q_0,\omega,Z_0),(q,\varepsilon,\gamma): q\in Q, \gamma\in\Gamma^*)\},$$

$$\lceil rec_M^S(\omega)\rceil = \vee\{\lceil path_M^{\Phi}(\omega)\rceil : path_M^{\Phi} \in PATH_M\} = \vee\{\vdash^*((q_0,\omega,Z_0),(q,\varepsilon,\varepsilon): q\in Q)\}.$$

命题 1.1. 设 $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$为任一以终态方式接受语言的$\ell$-VPDA,则存在以空栈方式接受语言的$\ell$-VPDA $M^S=(Q',\Sigma,\Gamma',\delta',q_0',Z_0',\phi)$,使得对任意$\omega\in\Sigma^*$, $\vDash^{\ell} rec_M^T(\omega)\leftrightarrow rec_{M^S}^S(\omega)$.

命题 1.2. 设 $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,\phi)$为任一以空栈方式接受语言的$\ell$-VPDA,则存在以终态方式接受语言的$\ell$-VPDA $M^T=(Q',\Sigma,\Gamma',\delta',q_0',Z_0',F')$,使得对任意 $\omega\in\Sigma^*$, $\vDash^{\ell} rec_M^S(\omega)\leftrightarrow rec_{M^T}^T(\omega)$.

定理 1.1. 设 A 为Σ上的量子语言,A 能被ℓ-VPDA $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$以终态方式接受当且仅当存在以空栈方式接受语言的$\ell$-VPDA $M'=(Q',\Sigma,\Gamma',\delta',q_0',Z_0',\phi)$,且对任意$\omega\in\Sigma^*$,

$$\vDash^{\ell} rec_M^T(\omega)\leftrightarrow rec_{M^S}^S(\omega) \tag{1}$$

引理 1.1[14,28,30]. 设 L 为格,X 为 L 的有限子集,则由 X 生成的交$\wedge$-半格(记为 $X_\wedge$)与并$\vee$-半格(记为 $X_\vee$)也都是有限的,而且 $X_\wedge=\{x_1\wedge\ldots\wedge x_k: k\geqslant 1, x_1,\ldots,x_k\in X\}\cup\{1\}$, $X_\vee=\{x_1\vee\ldots\vee x_k: k\geqslant 1, x_1,\ldots,x_k\in X\}\cup\{0\}$.

命题 1.3. 对任一ℓ-VPDA $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$,$M$ 能识别的量子上下文无关语言 rec_M^T 作为从Σ^*到ℓ的函数,其像集 $Im(rec_M^T)=\{r\in\ell:\exists\omega\in\Sigma^*, rec_M^T(\omega)=r\}$ 是ℓ的有限子集.

证明:任取$\omega\in\Sigma^*$,令$\omega=\tau_1\tau_2\ldots\tau_k\in(\Sigma\cup\{\varepsilon\})^*$,其中,字符串$\omega$的长度$|\omega|=|\tau_1\tau_2\ldots\tau_k|$.由定义 1.4 和定义 1.5 可知,

$$\begin{aligned}\lceil rec_M^T(\omega)\rceil &= \vee\{\lceil path_M(\omega)\rceil \wedge F(q_n): path_M \in PATH_M\}\\ &= \vee\{\delta(q_0,\tau_1,Z_0)(q_1,Z_1\gamma_1)\wedge\delta(q_1,\tau_2,Z_1)(q_2,Z_2\gamma_2)\wedge\ldots\wedge\\ &\qquad \delta(q_{n-1},\tau_n,Z_{n-1})(q_n,Z_n\gamma_n)\wedge F(q_k): q_1,\ldots,q_k\in Q, Z_1,\ldots,Z_{k+1}\in\Gamma\}\\ &\overset{\exists d}{=} (a_{10}\wedge\ldots\wedge a_{1k}\wedge a_{1k+1})\vee\ldots\vee(a_{d0}\wedge\ldots\wedge a_{dk}\wedge a_{dk+1}),\end{aligned}$$

其中,$a_{ij}\in(Im(\delta)\cup Im(F))$.若令 $X=Im(\delta)\cup Im(F)$,则显然 X 为ℓ的有限子集.由引理 1.1 可知,$(X_\wedge)_\vee$也是ℓ的有限子集.对任意$\omega\in\Sigma^*$,综上分析,$\lceil rec_M^T(\omega)\rceil\in(X_\wedge)_\vee$,从而 $Im(rec_M^T)\subseteq(X_\wedge)_\vee$.因此, $Im(rec_M^T)$ 是ℓ的有限子集. □

为讨论方便,记Σ上的全体ℓ-值上下文无关语言为$\ell CF(\Sigma)$.

我们知道,在经典逻辑下,确定型有穷自动机(DFA)与非确定型有穷自动机(NFA)从接受语言能力上是等价的.其中,非确定型有穷自动机转化为与之等价的确定型有穷自动机采用的是子集构造方法[10,11].在量子逻辑意义下,正如文献[24,25]所证明的,利用子集构造方法一般不能把一个非确定型有穷自动机转化为与之等价的确

定型有穷自动机.下面我们引入量子逻辑意义下广义的子集构造方法,利用该方法,可以进一步考虑量子语言的代数刻画与层次刻画,并能证明量子逻辑意义下确定型的有穷自动机和非确定型的有穷自动机是等价的[30].而且,该方法可对ℓ-VPDA 的转移函数进行改造,使其为分明的.

设 $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$为任一$\ell$-VPDA,构造与之等价的$\ell$-VPDA $M'=(Q',\Sigma,\Gamma,\delta',q_0',Z_0,F')$如下:

令 $X=Im(\delta)\cup Im(F)$,则 X 明显地为ℓ的有限子集.取$\ell_1=(X_\wedge)$,由引理 1.1 可知,ℓ_1 是ℓ的有限子集.取$Q'=Q\times(\ell_1-\{0\})$,则 Q'亦为有限集合.取$q_0'=(q_0,1)$.

状态转移函数$\delta':Q'\times(\Sigma\cup\{\varepsilon\})\times\Gamma\to 2^{Q'\times\Gamma^*}$定义如下:对任意的$(q,a)\in Q',\tau\in(\Sigma\cup\{\varepsilon\}),X\in\Gamma,\delta'((q,a),\tau,X)=\{((q',a\wedge a'),\gamma):\delta(q,\tau,X)(q',\gamma)=a'>0,a\wedge a'\neq 0\}$,对任意$P\in 2^{Q'},\delta'(P,\tau,X)=\bigcup\{\delta'((q,a),\tau,X):(q,a)\in P\}$.

由ℓ_1的取法,ℓ_1对于最大下确界运算$\wedge$封闭,即对任意 $b,c\in\ell_1,b\wedge c\in\ell_1$.从而可知对任意 $a\in\ell_1$

$$(q,\tau,Z,p,\gamma)\in Q\times(\Sigma\cup\{\varepsilon\})\times\Gamma\times Q\times\Gamma^*,a\wedge\delta'(q,\tau,Z)(p,\gamma)\in\ell_1.$$

因此,对任意$(q,a)\in Q\times(\ell_1-\{0\}),\delta'((q,a),\tau,Z)\in(Q\times(\ell_1-\{0\}))\times\Gamma^*$,可知$\delta'$是良定义的.终状态 $F':Q'\to\ell$,定义为$F'((q,a))=a\wedge F(q)$.如此定义的 M'显然为ℓ-VPDA.该构造方法称为广义子集构造方法.

定理 1.2. 设 $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$为任一$\ell$-VPDA,则存在$M'=(Q',\Sigma,\Gamma,\delta',q_0',Z_0,F')$,其中$\delta'$: $Q'\times(\Sigma\cup\{\varepsilon\})\times\Gamma\to 2^{Q'\times\Gamma^*}$为经典的转移函数,而使得 $M\equiv M'$.即对任意$\omega\in\Sigma^*$:

$$\models^{\ell} rec_M^T(\omega)\leftrightarrow rec_{M'}^T(\omega) \tag{2}$$

证明:对任意$\omega\in\Sigma^*$,只需证明$\lceil rec_M^T(\omega)\rceil=\lceil rec_{M'}^T(\omega)\rceil$.

对于任意输入串$\omega\in\Sigma^*$,利用数学归纳法对ω的长度$|\omega|$进行归纳证明下式成立:

$$\begin{aligned}&\delta'^*(q_0',\omega,Z_0)=\{((q_n,r_n),Z_n\gamma_n):q_1,q_2,\dots,q_n\in Q,Z_1,\dots,Z_n\in\Gamma,\gamma_1,\dots,\gamma_n\in\Gamma^*,\\&r_n=\delta(q_0,\tau_1,Z_0)(q_1,Z_1\gamma_1)\wedge\delta(q_1,\tau_2,Z_1)(q_2,Z_2\gamma_2)\wedge\dots\wedge\delta(q_{n-1},\tau_n,Z_{n-1})(q_n,Z_n\gamma_n)\neq 0\}.\end{aligned}$$

当$|\omega|=0$时,因$\omega=\varepsilon$且$\delta^*(q_0,\varepsilon,Z_0)(q_0,Z_0)=1$,则$\delta'^*(q_0,1),\varepsilon,Z_0)=\{((q_0,1),Z_0)\}$,因此结论成立.

假设对于$|\omega|\leqslant n,n\in\mathbf{N}$ 结论成立.

当$|\omega|=n+1$时,令$\omega=\tau_1\tau_2\dots\tau_k\tau_{k+1}=x\tau_{k+1}$,则$\tau_{k+1}\in\Sigma$,由归纳假设,对 $x=\tau_1\tau_2\dots\tau_k,|x|=n$,若 M 的移动为

$$(q_0,\tau_1\tau_2\dots\tau_k,Z_0)\overset{a_1}{\vdash}(q_1,\tau_2\dots\tau_k,Z_1\gamma_1)\overset{a_2}{\vdash}(q_2,\tau_3\dots\tau_k,Z_2\gamma_2)\overset{a_3}{\vdash}\dots\overset{a_k}{\vdash}(q_k,\varepsilon,Z_k\gamma_k),$$

则 M'的移动为

$$((q_0,1),\tau_1\tau_2\dots\tau_k,Z_0)\overset{1}{\vdash}((q_1,a_1),\tau_2\tau_3\dots\tau_k,Z_1\gamma_1)\overset{1}{\vdash}((q_2,a_1\wedge a_2),\tau_3\tau_4\dots\tau_k,Z_2\gamma_2)\overset{1}{\vdash}\dots\overset{1}{\vdash}((q_k,a_1\wedge a_2\wedge\dots\wedge a_k),\varepsilon,Z_k\gamma_k),$$

即

$$\begin{aligned}&\delta'^*(q_0',x,Z_0)=\{((q_k,r_k),Z_k\gamma_k):q_i\in Q,Z_i\in\Gamma,\gamma_i\in\Gamma^*,i=1,2,\dots,k,\\&r_k=\delta(q_0,\tau_1,Z_0)(q_1,Z_1\gamma_1)\wedge\delta(q_1,\tau_2,Z_1)(q_2,Z_2\gamma_2)\wedge\dots\wedge\delta(q_{k-1},\tau_k,Z_{k-1})(q_k,Z_k\gamma_k)\neq 0\}.\end{aligned}$$

由δ'的定义

$$\begin{aligned}\delta'(\delta'^*(q_0',x,Z_0),\tau_{k+1},Z_k)&=\bigcup\{\delta'((q_k,r_k),\tau_{k+1},Z_k):((q_k,r_k),Z_k\gamma_k)\in\delta'^*(q_0',x,Z_0))\}\\&=\bigcup\{(q_{k+1},r_k\wedge\delta(q_k,\tau_{k+1},Z_k)(q_{k+1},Z_{k+1}\gamma_{k+1})):((q_k,r_k),Z_k\gamma_k)\in\delta'^*(q_0',x,Z_0),\\&\qquad q_{k+1}\in Q,Z_{k+1}\in\Gamma,\gamma_{k+1}\in\Gamma^*,r_{k+1}\neq 0\}\\&=\bigcup\{(q_{k+1},r_{k+1}):r_{k+1}=\delta(q_0,\tau_1,Z_0)(q_1,Z_1\gamma_1)\wedge\dots\wedge\delta(q_{k-1},\tau_k,Z_{k-1})(q_k,Z_k\gamma_k)\wedge\\&\qquad\delta(q_k,\tau_{k+1},Z_k)(q_{k+1},Z_{k+1}\gamma_{k+1})\neq 0,q_0,\dots,q_{k+1}\in Q\}.\end{aligned}$$

因此,由数学归纳法知结论成立.

进而,由定义 2.4 可知,

$$\begin{aligned}\lceil rec_{M'}^{T}(\omega)\rceil &= \vee\{\lceil path_{M'}(\omega)\rceil \wedge F'((q_{k+1},r_{k+1}): path_{M'}\in PATH_{M'}\}\\ &= \vee\{r_{k+1}\wedge F(q_{k+1}): q_1,\dots,q_k,q_{k+1}\in Q\}\\ &= \vee\{\delta(q_0,\tau_1,Z_0)(q_1,Z_1\gamma_1)\wedge\dots\wedge\delta(q_{k-1},\tau_k,Z_{k-1})(q_k,Z_k\gamma_k)\wedge\delta(q_k,\tau_{k+1},Z_k)(q_{k+1},Z_{k+1}\gamma_{k+1})\wedge\\ &\qquad F(q_{k+1}): q_1,\dots,q_k,q_{k+1}\in Q, Z_1,\dots,Z_{k+1}\in\Gamma,\gamma_1,\dots,\gamma_{k+1}\in\Gamma^*\}\\ &= \lceil rec_M^T(\omega)\rceil\end{aligned}$$

综上分析可知,$\vDash^{\ell} rec_M^T(\omega)\leftrightarrow rec_{M'}^T(\omega)$,从而 $rec_M^T = rec_{M'}^T$,即 $M\equiv M'$. □

注 1.4. 由定理 1.2 知,我们可用广义子集构造方法将任意ℓ-VPDA $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$转化为与其等价的$\ell$-VPDA,使得 M'的状态转移函数是分明的.

这样,一元可识别谓词$\lceil rec_M^T(\omega)\rceil = \vee\{\lceil path_M(\omega)\rceil\wedge F(q_n): path_M\in PATH_M\}$可以简化为

$$\lceil rec_{M'}^T(\omega)\rceil = \vee\{F'((q_k,r_k)):(q_0,\omega,Z_0)\vdash^*(q_k,\varepsilon,\gamma),q_k\in Q,r_k=\vdash^*((q_0,\omega,Z_0),(q_k,\varepsilon,\gamma))\}.$$

这就表明,基于量子逻辑的下推自动机可以通过经典的下推自动机和带有量子特性的终状态加以实现.特别地,当$\ell=\{0,1\}$时,对应的逻辑为经典逻辑,广义的子集构造退化为经典子集构造.因此,量子逻辑意义下的下推自动机与经典下推自动机具有紧密联系和本质区别.与此同时,与文献[25]相比,一方面,虽然我们定义的一元可识别谓词 $rec_M^T\in\ell(\Sigma^*)$ 只相当于文献[25]中通过深度优先方式定义的谓词,但是文献[24,25]中结论表明,基于量子逻辑自动机的重要定理成立都依赖于正交模格中子集的交换子的条件,即对应的定理的完全成立依赖于正交模格的分配律,从而又还原到 Boolean 逻辑或者经典逻辑的情形.特别地,量子上下文无关语言的封闭性部分结论需要交换子的条件,而本文通过引入的量子子集构造方法,不需要添加交换子的条件证明了结论成立,因此在深度优先方式定义下,对语言的封闭性等结论可以说是多余的,这是对文献[25]有关结论的实质性加强;另一方面,通过直接使用经典自动机的有关技术来处理量子语言,也可使问题简单化和分明化,从而在理论上变得容易处理.但从定理 1.2 的构造也可看出,本文给出的转化复杂性不仅与原ℓ-VPDA 的状态数目有关,而且以取值格ℓ的大小呈指数级增长.注意到ℓ可能很大,从而这种转化的复杂性也很大,因此从实现的角度来看,文献[25,26]或许更易于量子逻辑意义下的实现.虽然有这种不便,但广义子集构造方法确实为我们讨论ℓ-VPDA 的语言的代数刻画和层次刻画带来了极大方便,所得结论得到了实质性的加强.

例 1.1:量子计算与复 Hilbert 空间 $C^{2^n}=\otimes^n C^2$ 紧密相关[1,2](C 表示复数集合),因此我们考虑 C^{2^n} 的所有闭子空间构成的集合 L_n.如果定义集合的包含关系作为偏序关系$\leqslant$,定义$\wedge$为集合的交,定义$\vee$为集合的并的闭包,则容易验证$(L_n,\leqslant,\wedge,\vee,0,1)$是一完备格.其中,0,1 分别是{0}(0 表示 0 向量)和$\otimes^n C^2$.进一步,如果定义 $A^{\perp}$为 A 的正交补,那么$\ell_n=(L_n,\leqslant,\wedge,\vee,\perp,0,1)$是一完备正交模格.

现定义一正交模格值下推自动机,其真值格是ℓ_2,因而,其中每一个命题公式 p 的真值$\lceil p\rceil$指派为ℓ_2中的元素,即$\otimes^n C^2$的一个闭子空间.定义$\rightarrow$为 Sasaki 蕴涵,即对任意的命题公式 p 和 q

$$\lceil p\rightarrow q\rceil=\lceil\neg p\vee(p\wedge q)\rceil=\lceil p\rceil^{\perp}\vee(\lceil p\rceil\wedge\lceil q\rceil).$$

我们用量子计算的标准记号[7,19]:让$|0\rangle|0\rangle,|0\rangle|1\rangle,|1\rangle|0\rangle$和$|1\rangle|1\rangle$表示空间$\otimes^n C^2$的标准正交基(可计算基状态),其中,$|0\rangle$和$|1\rangle$是空间 C^2 中的标准正交基.为简便起见,记 $a_{ij}=span\{|i\rangle|j\rangle\}$,即$|i\rangle|j\rangle$生成的子空间,$i,j$=0,1.

正交模格值下推自动机ℓ-VPDA $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$定义如下:

$$Q=\{p,q\},\Sigma=\{\sigma\},\Gamma=\{Z_0,Z\},q_0=p,$$

而$\delta:Q\times(\Sigma\cup\{\varepsilon\})\times\Gamma\rightarrow\ell_f(Q\times\Gamma^*)$为

$$\begin{aligned}&\delta(p,\sigma,Z_0)(q,Z_0)=a_{00},\ \ \delta(p,\sigma,Z_0)(p,Z_0)=a_{01},\\ &\delta(q,\sigma,Z_0)(q,Z_0)=a_{10},\ \ \delta(q,\sigma,Z_0)(p,Z_0)=a_{11},\\ &\delta(p,\sigma,Z_0)(q,Z)=a_{11},\ \ \delta(p,\sigma,Z_0)(p,Z)=a_{10},\\ &\delta(q,\sigma,Z_0)(q,Z)=a_{01},\ \ \delta(q,\sigma,Z_0)(p,Z)=a_{00},\\ &\delta(p,\sigma,Z)(q,Z)=a_{10},\ \ \delta(p,\sigma,Z)(p,Z)=a_{00},\\ &\delta(q,\sigma,Z)(q,Z)=a_{01},\ \ \delta(q,\sigma,Z)(p,Z)=a_{11}.\end{aligned}$$

$F:Q\rightarrow\ell$为:$F(p)=a_{01}$,$F(q)$=1.

利用广义的子集构造方法构造 $M'=(Q',\Sigma,\Gamma',\delta',q_0',Z_0',F')$ 如下:

$$Q'=Q\times(\ell_1-\{0\}),$$

其中,$\ell_1=(X_\wedge)$.而 $X=\{a_{00},a_{01},a_{10},a_{11},0,1\}$. $q_0'=(p,1)$.

状态转移函数 $\delta':Q'\times(\Sigma\cup\{\varepsilon\})\times\Gamma\to 2^{Q'\times\Gamma^*}$ 定义为

$$\begin{aligned}
&\delta'((p,1),\sigma,Z_0)((q,a_{00}),Z_0)=1,\\
&\delta'((p,1),\sigma,Z_0)((p,a_{01}),Z_0)=1,\\
&\delta'((p,1),\sigma,Z_0)((q,a_{11}),Z)=1,\\
&\delta'((p,1),\sigma,Z_0)((p,a_{10}),Z)=1,\\
&\delta'((q,a_{00}),\sigma,Z_0)((p,a_{00}),Z)=1,\\
&\delta'((p,a_{01}),\sigma,Z_0)((p,a_{01}),Z_0)=1,\\
&\delta'((q,a_{11}),\sigma,Z_0)((p,a_{11}),Z_0)=1,\\
&\delta'((p,a_{10}),\sigma,Z_0)((p,a_{10}),Z)=1,\\
&\delta'((p,a_{10}),\sigma,Z)((q,a_{10}),Z)=1,\\
&\delta'((p,a_{00}),\sigma,Z_0)((q,a_{00}),Z_0)=1,\\
&\delta'((p,a_{00}),\sigma,Z)((p,a_{00}),Z)=1,\\
&\delta'((p,a_{11}),\sigma,Z_0)((q,a_{11}),Z)=1,\\
&\delta'((q,a_{10}),\sigma,Z_0)((q,a_{10}),Z_0)=1.
\end{aligned}$$

而 $F':Q'\to\ell$,定义为:$F'((p,1))=a_{01},F'((q,a_{00}))=a_{00},F'((p,a_{01}))=a_{01},F'((q,a_{11}))=a_{11},F'((q,a_{10}))=a_{10}$.

进而,结合经典下推自动机和模糊集合理论可知,$rec_M^T(=rec_{M'}^T)$ 可简单计算如下:

$$rec_M^T(\omega)=\begin{cases}a_{00}\vee a_{01}\vee a_{11}, & 若\omega=\sigma\\ a_{01}\vee a_{10}, & 若\omega=\sigma\sigma.\\ a_{01}, & 否则\end{cases}$$

注 1.5. 在本例中,由于 L_n 是一个无限的正交模格,且 $\ell_1=(X_\wedge)$,而 $X=\{a_{00},a_{01},a_{10},a_{11},0,1\}$.即

$$\ell_1=\{a_{00},a_{01},a_{10},a_{11},0,1\}.$$

在构造状态转移函数为分明的过程中,状态集 $Q'=Q\times(\ell_1-\{0\})$将含有 2^{10} 个状态,直接计算起来特别不方便;然而从接受语言的角度来说,只需给出从初状态 $q_0'=(p,1)$ 出发、对产生语言有影响的状态(8 个,即$(p,1),(q,a_{00}),(p,a_{01}),(q,a_{11}),(p,a_{10}),(p,a_{00}),(p,a_{11}),(q,a_{10})$)即可.另外注意到,虽然$\{a_{00},a_{01},a_{10},a_{11}\}$构成正交模格$\ell_2$的 Boolean 子代数,但是整个计算过程依然是在正交模格ℓ_2(非 Boolean 代数)中进行的.

2 量子上下文无关文法及其代数性质

定义 2.1. ℓ-值上下文无关文法(简记为ℓ-VCFG)是四元组 $G=(N,T,P,I)$,其中,N 和 T 分别为有限非中止符号表(其中元素也称为变量)和有限中止符号表,且 $N\cap T=\varnothing$.而 $I:N\to\ell$,即 N 的ℓ值子集,表示开始记号.命题"S 为开始记号",记为"$S\in I$",真值为 $I(S)$. $P=\{A\xrightarrow{a}x:A\in N,x\in(T\cup N)^*,a\in\ell\text{-}\{0\}\}$,且 $supp(P)$有限,表示ℓ值产生式的有限集合,其中产生式 $A\xrightarrow{a}x$ 被解释为变元 A 可被替换为任意字符串 x 的真值为 a,即$\ulcorner A\to x\urcorner=a$.且对任意 $S\in I,S$ 只出现在ℓ值产生式 $A\xrightarrow{a}x$ 的左边.

定义 2.2. 如果 $A\xrightarrow{a}x$,对任意$\alpha,\beta\in(T\cup N)^*$,则有 $\alpha A\beta\xrightarrow{a}\alpha x\beta$,而称$\alpha x\beta$可由$\alpha A\beta$直接推导,记作

$$\alpha A\beta\Rightarrow^a\alpha x\beta,$$

即定义直接推导为$\Rightarrow:(T\cup N)^*\times(T\cup N)^*\to\ell$.又对任意$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k\in(T\cup N)^*$,若 $\alpha_1\Rightarrow^{a_1}\alpha_2\Rightarrow^{a_2}\ldots\Rightarrow^{a_{k-1}}\alpha_k$ 时,α_k 称为可由上式表示的推导链从α_1 导出,记作 $\alpha_1\Rightarrow^{\rho}_{k-1}\alpha_k$.其中,$\rho=a_1\wedge\ldots\wedge a_{k-1}$.而多步推导$\Rightarrow_*$定义为$\Rightarrow$的反射与传递闭包,其中,集合 T 上ℓ-值关系 R 的反射与传递闭包 R^*定义为 $R^*=I\cup R\cup R\circ R\cup\ldots\cup\ldots$,而$\circ$表示$\ell$-值关系的 max-min 复合,其中 $R^0=I,R^{n+1}=R^n\circ R$.而用 $A\Rightarrow^{\rho}_{*}x$ 表示存在 n,使得 $A\Rightarrow^{\rho}_{n}x$.

注 2.1. 由直接推导的定义可知,容易将多步推导的定义推广到任意的 $u\in(T\cup N)^*N(T\cup N)^*,v\in(T\cup N)^*$,

$u \Rightarrow_*^{\rho} v$.另外,本文定义 2.1 与文献[25]不同之处在于开始记号不同,本文加入了ℓ-值开始记号,相对来讲是对经典上下文无关文法更广义的推广;而文献[25]只是经典的开始记号,可以认为是本文的特殊情况而已,即认为 I 为经典单点子集即可.

定义 2.3. 设 $G=(N,T,P,I)$为任一ℓ-VCFG,对任意字符串$\theta\in T^*$,定义 T^*上一元ℓ-值可导出谓词 $der_G\in \ell(T^*)$为

$$der_G \overset{\text{def}}{=} (\exists S\in I)(\exists u_1\in (T\cup N)^*)(\exists u_2\in (T\cup N)^*)...(\exists u_k\in (T\cup N)^*).(S\in I\wedge (S,u_1)\in\Rightarrow\wedge (u_1,u_2)\in\Rightarrow\wedge...\wedge (u_k,\theta)\in\Rightarrow),$$

即命题 $der_G(\theta)$的真值定义为

$$\lceil der_G(\theta)\rceil \overset{\text{def}}{=} \vee\{I(S)\wedge\Rightarrow(S,u_1)\wedge\Rightarrow(u_1,u_2)\wedge...\wedge\Rightarrow(u_k,\theta): u_1,u_2,...,u_k\in (T\cup N)^*\}.$$

这时,der_G称为ℓ-值上下文无关文法生成的 T 上的ℓ-值语言.以下用$\ell(T^*)$表示 T^*上的所有ℓ-值语言之集(量子语言).对 $A\in \ell(T^*)$,若存在ℓ-VCFG G 使得 $A=der_G$,则称 A 为 T 生成的ℓ-值上下文无关语言.若不指定正交模格ℓ时,A 也称为量子上下文无关语言.

当 ℓ-VCFG $G=(N,T,P,I)$ 和 $G_1=(N_1,T,P_1,I_1)$ 生成相同的量子上下文无关语言时,即对任意 $\theta\in T^*$,$der_G(\theta)=der_{G_1}(\theta)$,称 G 和 G_1 相互等价,记为 $G\equiv G_1$.

定义 2.4. 设 $G=(N,T,P,I)$为任一ℓ-VCFG,若对任意 $A\in N,\alpha\in (T\cup N)^*, A\Rightarrow_*^{\rho}\alpha$,则称$\alpha$是 G 产生的一个句型,真值为ρ.对于推导 $A\Rightarrow_*^{\rho}\alpha$,若在每一步推导过程中,都替换当前句型的最左(右)变量,则称该推导为最左(右)推导,记作 $A\Rightarrow_{*L}^{\rho}\alpha(A\Rightarrow_{*R}^{\rho}\alpha)$,并定义一元最左推导可导出$\ell$-值谓词 $der_G^L\in \ell(T^*)$为

$$der_G^L \overset{\text{def}}{=} (\exists S\in I)(\exists u_1\in (T\cup N)^*)(\exists u_2\in (T\cup N)^*)...(\exists u_k\in (T\cup N)^*).$$
$$(S\in I\wedge (S,u_1)\in\Rightarrow_L\wedge (u_1,u_2)\in\Rightarrow_L\wedge...\wedge (u_k,\theta)\in\Rightarrow_L).$$

而相应命题 $der_G^L(\theta)$的真值定义为

$$\lceil der_G^L(\theta)\rceil \overset{\text{def}}{=} \vee\{I(S)\wedge\Rightarrow_L(S,u_1)\wedge\Rightarrow_L(u_1,u_2)\wedge...\wedge\Rightarrow_L(u_k,\theta): u_1,u_2,...,u_k\in (T\cup N)^*\}.$$

同理可定义最右推导可导出ℓ值谓词 $der_G^R\in \ell(T^*)$.

命题 2.1. 设 $G=(N,T,P,I)$为任一ℓ-VCFG,对任意$\theta\in T^*$,都有$\vDash^{\ell} der_G(\theta)\leftrightarrow der_G^L(\theta)$.

命题 2.2. 设 $G=(N,T,P,I)$为任一ℓ-VCFG,则存在ℓ-VCFG $G'=(N',T,P',S_0)$,其中,S_0为经典单点集,使得对任意$\theta\in T^*$,都有$\vDash^{\ell} der_G(\theta)\leftrightarrow der_{G'}^L(\theta)$,即 $G\equiv G'$.

定理 2.1. 设 A 为 T 上的量子语言,A 能被ℓ-VCFG $G=(N,T,P,I)$生成当且仅当存在ℓ-VCFG $G'=(N',T,P',S_0)$,其中,S_0为经典单点集,且对任意$\theta\in T^*$,都有$\vDash^{\ell} der_G(\theta)\leftrightarrow der_{G'}^L(\theta)$.

3 ℓ-VPDA 与ℓ-VCFG 的等价性

利用定理 2.1 和文献[29]中类似的方法容易证明以下结论成立:

定理 3.1. 设 $G=(N,T,P,I)$为任一ℓ-VCFG,则存在以空栈方式接受语言的ℓ-VPDA $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,\phi)$,使得对任意$\theta\in T^*$,都有$\vDash^{\ell} rec_M^S(\theta)\leftrightarrow der_G(\theta)$.

定理 3.2. 设 $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,\phi)$为任一以空栈方式接受语言的$\ell$-VPDA,则存在$\ell$-VCFG $G=(N,T,P,I)$,使得对任意$\omega\in\Sigma^*$,都有$\vDash^{\ell} der_G(\omega)\leftrightarrow rec_M^S(\omega)$.

定理 3.3. 设 A 为 T 上的量子语言,A 能被ℓ-VCFG $G=(N,T,P,I)$生成当且仅当存在ℓ-VPDA $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$,使得对任意$\theta\in T^*$,都有

$$\vDash^{\ell} rec_M^T(\theta)\leftrightarrow der_G(\theta) \tag{3}$$

4 量子上下文无关语言的代数性质

对任意 $A,B\in \ell(\Sigma^*),a\in\ell$,并 $A\vee B$、交 $A\wedge B$、补 $A^{\perp}$、数量积 aA、连接 AB、*Kleene* 闭包 A^*、反转 A^{-1} 定义为:对任意$\omega\in\Sigma^*$,

$$A\vee B(\omega)=A(\omega)\vee B(\omega),$$
$$A\wedge B(\omega)=A(\omega)\wedge B(\omega),$$
$$A^{\perp}(\omega)=A(\omega)^{\perp},$$
$$aA(\omega)=a\wedge A(\omega),$$
$$AB(\omega)=\vee\{A(\omega_1)\wedge B(\omega_2):\omega_1\omega_2=\omega\},$$
$$A^{-1}(\omega)=A(\omega^{-1}),$$

其中,ω^{-1}表示字符串ω的反转,即若$\omega=\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n$,则$\omega^{-1}=\sigma_n\sigma_{n-1}\dots\sigma_1$.

命题 4.1. 设$A:\Sigma^*\to\ell$为ℓ-值语言,下列条件等价:

(1) A是ℓ-值上下文无关语言;

(2) 存在$a_1,\dots,a_k\in\ell-\{0\}$以及上下文无关语言$L_1,\dots,L_k$,使得

$$A=\vee_{i=1}^{k}a_i 1_{L_i} \tag{4}$$

其中,1_{L_i}表示L_i的特征函数.

(3) 存在$a_1,\dots,a_k\in\ell-\{0\}$以及两两不交的上下文无关语言$L_1,\dots,L_k$,使得$A=\vee_{i=1}^{k}a_i 1_{L_i}$.

证明:条件(1)⇒条件(3):因为 A 是ℓ-值上下文无关语言,因此存在ℓ-VPDA $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$,且状态转移函数是分明的,即$\delta:Q\times(\Sigma\cup\{\varepsilon\})\times\Gamma\to 2^{Q\times\Gamma^*}$,使得$A=rec_M^T$.

即对任意的$\omega\in\Sigma^*$,$A(\omega)=\lceil rec_M^T(\omega)\rceil=\vee\{F(q):(q_0,\omega,Z_0)\overset{*}{\vdash}(q,\varepsilon,\gamma),q\in Q\}$,令 $Im(F)-\{0\}=\{a_1,\dots,a_k\}$,且 $F_i=\{q\in Q:F(q)=a_i\}$,对此F_i构造下推自动机 PDA $M_i=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F_i)$.设该 PDA 识别的语言为$L_i$,则$L_i$为上下文无关语言,显然,如此构造的$L_i$两两不交.

由以上构造可知,$\omega\in\mathcal{L}(M_i)=L_i$当且仅当$(q_0,\omega,Z_0)\overset{*}{\vdash}(q,\varepsilon,\gamma)$且$q\in F_i$.由此可知,

$$\begin{aligned}A(\omega)&=\lceil rec_M^T(\omega)\rceil\\&=\vee\{F(q):(q_0,\omega,Z_0)\overset{*}{\vdash}(q,\varepsilon,\gamma),q\in Q\}\\&=\vee\{a_i:(q_0,\omega,Z_0)\overset{*}{\vdash}(q,\varepsilon,\gamma)\text{且}F(q)=a_i\}\\&=\vee\{a_i:\omega\in L_i\}\\&=(\vee a_i\wedge 1_{L_i})(\omega).\end{aligned}$$

因此,$A=\vee_{i=1}^{k}a_i 1_{L_i}$.

条件(3)⇒条件(2):显然.

条件(2)⇒条件(1):令识别L_i的 PDA 为$M_i=(Q_i,\Sigma,\Gamma_i,\delta_i,q_{0i},Z_{0i},F_i)$,且当$i\neq j$时,$Q_i\cap Q_j=\varnothing$.定义$\ell$-VPDA $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$如下:

$$Q=\bigcup_{i=1}^{k}(Q_i-\{q_{0i}\})\cup\{q_0\},\ \Gamma=\bigcup_{i=1}^{k}(\Gamma_i-\{Z_{0i}\})\cup\{Z_0\}.$$

而$\delta:Q\times(\Sigma\cup\{\varepsilon\})\times\Gamma\to 2^{Q\times\Gamma^*}$为$\delta(q_0,\tau,Z_0)=\{\delta_1(q_{01},\tau,Z_{01}),\dots,\delta_k(q_{0k},\tau,Z_{0k})\}$,对 $q\in Q_i-\{q_{0i}\},Z\in\Gamma_i-\{Z_{0i}\}$,$\delta(q,\tau,Z)=\delta_i(q,\tau,Z)$;$F(q_0)=\vee\{a_i:q_{0i}\in F_i\}$,而当$q\neq q_0$时,

$$F(q)=\begin{cases}a_i, & \text{若}q\in F_i\\0, & \text{否则}\end{cases},$$

则易证$A=rec_M^T=\vee_{i=1}^{k}a_i 1_{L_i}$. □

定理 4.1. 设$A:\Sigma^*\to\ell$为ℓ-值语言,下列条件等价:

(1) 存在ℓ-VPDA M,使得$A=rec_M^T$;

(2) 集合$Im(A)$为有限集,且对任意 $a\in\ell-\{0\}$,A 的 a-层集 $A[a]=\{\omega\in\Sigma^*:A(\omega)=a\}$是$\Sigma$上的上下文无关语言,且

$$A=\vee_{a\in\ell-\{0\}}a 1_{A[a]} \tag{5}$$

其中,$1_{A_{[a]}}$ 表示 $A_{[a]}$的特征函数.

以下称满足命题 4.1(2)或者命题 4.1(3)的ℓ-值语言为有限步识别语言,其全体之集记为 $step(\Sigma)$,它代表了能被ℓ-VPDA 识别的ℓ-值语言的全体.

定理 4.2. 集合 $step(\Sigma)$关于ℓ-值语言的有限并、数量积、连接、反转、Kleene 闭包运算封闭.

证明:(1) 对任意 $A,B\in step(\Sigma)$,根据命题 4.1(2),令 $A=\vee_{i=1}^{k}a_i 1_{L_i}, B=\vee_{j=1}^{n}b_j 1_{M_j}$,其中,L_i和 M_j 都是上下文无关语言且 $\{L_i\}_{i=1}^{k}$ 两两不交, $\{M_j\}_{j=1}^{n}$ 同样两两不交:

- 关于并, $A\vee B=\vee_{i=1}^{k}a_i 1_{L_i}\vee\vee_{j=1}^{n}b_j 1_{M_j}$,显然满足定理 4.1(2),因此 $A\vee B\in step(\Sigma)$;
- 关于数量积,对 $r\in\ell$,由于 $rA(\omega)=r\wedge A(\omega)$且 $\{L_i\}_{i=1}^{k}$ 两两不交,因此 $rA=\vee_{i=1}^{k}(r\wedge a_i)1_{L_i}$,从而 $rA\in step(\Sigma)$;
- 同理可证 $step(\Sigma)$关于连接、反转、Kleene 闭包运算封闭. □

定理 4.3. 设 $h:\Sigma_1^*\to\Sigma_2^*$ 为同态,以下论断成立:

(1) 若 $A\in step(\Sigma_2)$,则 $h^{-1}(A)=A\circ h\in step(\Sigma_1)$;

(2) 若 h 满足,对 $\tau\in\Sigma\cup\{\varepsilon\},h(\tau)\neq\varepsilon,B\in step(\Sigma_1)$,则 $h(B)\in step(\Sigma_2)$,其中,$h(B)(\omega)=\vee\{B(\nu):h(\nu)=\omega\}$.

证明:(1) 因 $A\in step(\Sigma_2)$,且由命题 4.1(3), $A=\vee_{i=1}^{k}a_i 1_{L_i}$,其中,L_i 是Σ_2 上的上下文无关语言且 $\{L_i\}_{i=1}^{k}$ 两两不交. 对任意 $\omega_1\in\Sigma_1^*$,易知有 $h^{-1}(A)(\omega_1)=A\circ h(\omega_1)=\vee_{i=1}^{k}a_i 1_{h^{-1}(L_i)}(\omega_1)$,其中,$h^{-1}(L_i)$表示上下文无关语言的逆同态,且由经典自动机理论可知封闭,因此 $h^{-1}(A)=A\circ h\in step(\Sigma_1)$.

同理可证论断(2). □

5 结 论

本文利用语义分析方法进一步研究了基于量子逻辑的下推自动机理论,从全新角度证明了任意ℓ-VPDA 能够识别的语言的像集总是有限的(命题 1.3),并利用广义的量子子集构造方法给出此类自动机的代数刻画(定理 1.2);证明了一般ℓ-VCFG 与开始记号为经典单点集的ℓ-VCFG 的相互等价性(定理 2.1);证明了量子下推自动机(ℓ-VPDA)和量子上下文无关文法(ℓ-VCFG)可以相互转化(定理 3.3);进而建立量子上下文无关语言的代数刻画和层次刻画,研究了ℓ-值上下文无关语言对于正则运算的封闭性(定理 4.1~定理 4.3).

References:

[1] Gruska J. Quantum Computing. London: McGraw-Hill, 1999.

[2] Nielsen MA, Chuang IL, Wrote; Zhao QC, Trans. Quantum Computation and Quantum Information. Beijing: Tsinghua University Press, 2004 (in Chinese).

[3] Benioff P. The computer as a physical system: A microsopic quantum mechanical Hamiltonian model of computers as represented by Turing machines. Physical Review Letters, 1980,22(5):563−591.

[4] Feynman RP. Simulating physics with computers. Int'l Journal of Theoretical Physics, 1982,21(6/7):467−488. [doi: 10.1007/BF02650179]

[5] Shor PW. Polynomial-Time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. SIAM Journal on Computing, 1997,26(5):1484−1509. [doi: 10.1137/S0097539795293172]

[6] Grover LK. Quantum mechanics helps in searching for a needle in a haystack. Physical Review Letters, 1997,79(2):325−328. [doi: 10.1103/physRevLett.79.325]

[7] Lloyd S. A potentially realizable quantum computer. Science, 1993,261(5128):1569−1571. [doi: 10.1126/science.261.5128.1569]

[8] Cirac JI, Zoller P. Quantum computations with cold trapped ions. Physical Review Letters, 1995,74(20):4091−4094. [doi: 10.1103/physRevLett.74.4091]

[9] Deutsch D. Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer. Proc. of the Royal Society of London A, 1985,400:97−117. [doi: 10.1098/rspa.1985.0070]

[10] Hopcroft JE, Ullman JD, Wrote; Liu T, Jiang H, Wang HP, Trans. Introduction to Automata Theory, Languages and Computation. Beijing: China Machine Press, Citic Publishing House, 2004 (in Chinese).

[11] Khoussainov B, Nerode A. Automata Theory and Its Applications. Boston: Birkäuser, 2001.

[12] Kleen SC. Representation of Events in Nerve Nets and Finite Automata. Princeton: Princeton University Press, 1956. 3−42.

[13] Thomas W. Languages, Automata and Logic. Handbook of Formal Languages. Vol.3. Springer Verlag, 1997. 389−485.

[14] Moore C, Crutchfield JP. Quantum automata and quantum grammars. Theoretical Computer Science, 2000,237(1-2):275−306. [doi: 10.1016/S0304-3975(98)00191-1]

[15] Gudder S. Basic properties of quantum automata. Foundation of Physics, 2000,30(2):301−319. [doi: 10.1023/A:1003649201735]

[16] Xi ZJ, Wang X, Li YM. Some algebraic properties of measure-once two-way quantum finite automata. Quantum Information Processing, 2008,7(5):211−225. [doi: 10.1007/s11128-008-0083-8]

[17] Xi ZJ, Li YM, Wang X. Weakly regular quantum grammars and asynchronous quantum automata. Int'l Journal of Theoretical Physics, 2009,48:357−368. [doi: 10.1007/s10773-008-9808-9]

[18] Birkhoff G, Von Neumann J. The logic of quantum mechanics. Annals of Mathematics, 1936,37(4):823−843. [doi: 10.2307/1968621]

[19] Kalmbach G. Orthomodular Lattices. London: Academic Press, 1983.

[20] Pták P, Pulmannová S. Orthomodular Structures as Quantum Logics. Dordrecht: Kluwer, 1991.

[21] Ying MS. Automata theory based on quantum logic (I). Int'l Journal of Theoretical Physics, 2000,39(4):985−995. [doi: 10.1023/A:1003642222321]

[22] Ying MS. Automata theory based on quantum logic (II). Int'l Journal of Theoretical Physics, 2000,39(11):2545−2557. [doi: 10.1023/A:1026453524064]

[23] Qiu DW. Automata theory based on quantum logic: Some characterizations. Information and Computation, 2004,190(1):179−195. [doi: 10.1016/j.ic.2003.11.003]

[24] Ying MS. A theory of computation based on quantum logic (I). Theoretical Computer Science, 2005,344(2-3):134−207. [doi: 10.1016/j.tcs.2005.04.001]

[25] Ying MS. Quantum Logic and Automata Theory. In: Engesser K, Gabbay DM, Lehmann D, eds. Handbook of Quantum Logic and Quantum Structures. ELSEVIER, 2007. 619−754.

[26] Qiu DW. Automata theory based on quantum logic: Reversibilities and pushdown automata. Theoretical Computer Science, 2007, 386(1-2):38−56. [doi: 10.1016/j.tcs.2007.05.026]

[27] Qiu DW. Notes on automata theory based on quantum logic. Science in China, 2007,37(6):723−737 (in Chinese with English abstract).

[28] Li YM, Li ZH. Free semilattices and strongly free semilattices generated by partially ordered sets. Northeastern Mathematical Journal, 1993,9(3):359−366.

[29] Li YM. Finite automata based on quantum logic and monadic second-order quantum logic. Beijing: Science Press, 2005 (in Chinese).

[30] Li YM. Analysis of Fuzzy Systems. Science in China Series F: Information Sciences, 2009,39(11):1135−1145 (in Chinese with English abstract).

附中文参考文献:

[2] Nielsen MA, Chuang IL,著;赵千川,译.量子计算和量子信息(一)——量子计算部分.北京:清华大学出版社,2004.

[10] Hopcroft JE, Ullman JD,著;刘田,姜晖,王捍贫,译.自动机理论、语言和计算导论.北京:机械工业出版社,中信出版社,2004.

[27] 邱道文.基于量子逻辑的自动机理论的一些注记.中国科学,2007,37(6):723−737.

[29] 李永明.模糊系统分析.北京:科学出版社,2005.

[30] 李永明.基于量子逻辑的有穷自动机与单体二阶量子逻辑.中国科学(F 辑:信息科学), 2009,39(11):1135−1145.

韩召伟(1981－),男,陕西西安人,博士,讲师,主要研究领域为计算智能,量子计算.

李永明(1966－),男,博士,教授,博士生导师,CCF 高级会员,主要研究领域为非经典计算理论,计算智能,模糊系统分析,量子逻辑与量子计算,格上拓扑学.