ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
Journal of Software, Vol.21, No.12, December 2010, pp.3116−3123
doi: 10.3724/SP.J.1001.2010.03722

E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel/Fax: +86-10-62562563

区间上非线性程序的终止性判定*

姚 勇+

(中国科学院 成都计算机应用研究所,四川 成都 610041)

Termination Decision of Nonlinear Programs over Intervals

YAO Yong+

(Chengdu Institute of Computer Applications, The Chinese Academy of Sciences, Chengdu 610041, China)

+ Corresponding author: E-mail: yaoyong@casit.ac.cn, yaoyong@yahoo.cn

Yao Y. Termination decision of nonlinear programs over intervals. *Journal of Software*, 2010,21(12): 3116−3123. http://www.jos.org.cn/1000-9825/3722.htm

Abstract: In this paper, the termination of the following programs is analized. While $x\in\Omega$ do $\{x:=f(x)\}$ end. When x is the only program variable, Ω is an interval and f is a continuous function. These are called the Nonlinear Programs over Intervals. This paper shows that the necessary condition for non-termination of the above program is that there is a fixed point of f, either within the interval Ω, or on the boundary of Ω. Furthermore, if there is a fixed point within Ω, the above condition is not only necessary, but also sufficient. In the case that all fixed points are on the boundary of Ω, it is also possible to construct the corresponding necessary and sufficient condition of non-termination by introducing more constraints for the continuous function f. A piecewise polynomial function meets these constraints, and a decision algorithm for continuous piecewise polynomial function is presented in the paper.

Key words: program verification; termination analysis; nonlinear program; fixed point; periodic orbit

摘 要: 分析了如下类型程序的终止性:While $x\in\Omega$ do $\{x:=f(x)\}$ end.其中,x 是程序变量,Ω是一个区间,f 是一个连续函数.这类程序被称为区间上非线性程序.证明了上面程序不终止的必要条件是函数在区间内部或边界上有不动点.如果不动点不在区间的边界,则上述结果是充要条件.仅仅在区间边界上有不动点的情况下,对函数略加限制,也建立了相应结果.特别地,对逐段多项式连续函数程序的终止性给出了完备判定算法.

关键词: 程序验证;终止性分析;非线性程序;不动点;周期轨

中图法分类号: TP301 文献标识码: A

* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant Nos.90718041, 10901116, 11001228 (国家自然科学基金); the National Basic Research Program of China under Grant No.2004CB318003 (国家重点基础研究发展计划(973)); the Knowledge Innovation Program of the Chinese Academy of Sciences under Grant No.KJCX2-YW-S02 (中国科学院知识创新工程); the Open Project of Shanghai Key Laboratory of Trustworthy Computing of China under Grant No.07dz22304200801 (上海市高可信计算重点实验室开放课题)

Received 2009-06-16; Accepted 2009-08-28

随着计算机广泛、深入地应用,软件技术也越来越多地影响到社会的方方面面.有严重缺陷的软件会给社会造成巨大损失,这样的重大事件时有发生.例如 1996 年 6 月 4 日,阿丽亚娜 5 型火箭第一次鉴定发射即因火箭导航电脑软件系统发生故障而失败.2003 年 5 月,俄罗斯“联盟号”飞船因导航软件设计有误,导致返回时偏离预定着陆地点 460 公里.这些事件,再次提醒人们开发高可信软件的必要性与紧迫性.而高可信软件的设计与开发中重要的一步就是程序验证,程序验证中最困难的问题是不变量生成和终止性分析.

程序终止性分析在计算机领域有着更为基本的重要性.但在一般情况下,程序的终止性问题是不可判定的.因此,许多试探性方法应运而生,比如Ranking函数方法[1−4]等等,有一定的适用性.可是,Ranking函数方法也有明显的局限性,比如有的程序根本没有 Ranking 函数,也有的程序存在 Ranking 函数,但找到 Ranking 函数是非常困难的.

另一种研究程序终止性的指导思想是将问题分类,然后针对性质较好的类给出判定方法.其中比较基本的类是所谓的单重连续 while 循环程序类.一个单重连续 while 循环程序 P_1 被描述为如下形式:

$$P_1:\quad \text{While } X\in\Omega \text{ do } \{X:=F(X)\} \text{ end}$$

这里,$X=(x_1,\ldots,x_n)$是实变量,$\Omega\in\mathbb{R}^n$是一个点集,F是$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$的连续映射.程序$P_1$被称为是终止的,是指在任意初值$X_0\in\mathbb{R}^n$下都是终止的.

Tiwari 在文献[5]中证明了当Ω是线性不等式组解的集合且 F 是线性多项式映射时,程序 P_1 的终止性是可判定的.Yang 等人详细地给出了这类线性多项式程序终止性的精确符号判定方法.对于非线性程序,虽也有一些试探性的成果[6−8],但类似于线性程序的确定性研究成果极少,原因是非线性程序更为复杂,研究起来更为困难.因此,对非线性程序的任何研究进展都是极有意义的.在本文中,我们将要研究一类非线性程序的终止性判定.在严格描述这类程序之前,我们先对本文的符号与术语作一点说明.

1. $\mathbb{R}$ 表示实数集合.
2. $\mathbb{R}_\infty=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$是扩展的实数集.
3. $f^n(x)=f(f(\ldots f(x)\ldots))$,即函数 f 的 n 次迭代.
4. $A=\{x_0,f(x_0),f^2(x_0),\ldots,f^n(x_0),\ldots\}$是 f 以 x_0 为起点的轨道.
5. 如果 x_0 满足 $f^n(x_0)=x_0$ 但对一切 $1<k<n,f^k(x_0)\neq x_0$,则称 x_0 是 f 的一个 n-周期点,这时称 $f^k(x_0),k=1,\ldots,n$ 是 f 的 n-周期轨.特别地,当 $n=1$ 时,称 x_0 是函数 f 的不动点.
6. 多项式 $f(x)$的首项系数和次数分别记为 $L(\neq0),d(>0)$.定义 f 在$\pm\infty$处的值为:

$f(-\infty)=-\infty$,当 $L>0,d$ 是奇数;或 $L<0,d$ 是偶数;

$f(-\infty)=+\infty$,当 $L>0,d$ 是偶数;或 $L<0,d$ 是奇数;

$f(+\infty)=-\infty$,当 $L<0$;

$f(+\infty)=+\infty$,当 $L>0$.

7. 函数 f 被称是逐段多项式连续函数,如果 f 以如下方式定义:

$$f=\begin{cases} f_1(x), & x\in[-\infty,a_1) \\ f_2(x), & x\in[a_1,a_2) \\ \ldots & \ldots \\ f_n(x), & x\in[a_{n-1},+\infty] \end{cases},$$

其中,n 是自然数,$f_1(x),\ldots,f_n(x)$都是变元 x 的多项式,$a_1<a_2<\ldots<a_{n-1}$ 且满足:

$$f_1(a_1)=f_2(a_1),\ldots,f_{n-1}(a_{n-1})=f_n(a_{n-1}).$$

区间上的非线性程序被精确地描述为

$$P_2:\ \text{While } x\in\Omega \text{ do } \{x:=f(x)\} \text{ end},$$

其中,$\Omega\subset\mathbb{R}$ 是一个区间(可以是开的、闭的、半开半闭的),f 是 $\mathbb{R}_\infty\to\mathbb{R}_\infty$的连续映射.

while 循环程序 P_2 的终止性可以等价地用函数迭代来表述:

程序 P_2 终止,等价于对$\forall x_0\in\Omega$,存在自然数 i,使得 $f^i(x_0)\notin\Omega$($\notin$表示不属于);

程序 P_2 不终止,等价于$\exists x_0\in\Omega$,对任意自然数 $i,f^i(x_0)\in\Omega$.

在本文中,我们对这两种表述不加任何区别.

周期 3 定理[9](周期 3 蕴含混沌)或 Sharkovsky 定理[10,11]表明区间上连续函数的迭代可以足够复杂,由此可以预见程序 P_2 的终止性判定也会有一定困难.

当连续函数 f 不是区间 I 上的自映射时,f 在区间 I 上可能没有不动点,甚至 f^n 在区间 I 上是否有意义(迭代能够进行)都成问题.然而,假设在区间 I 上有一个点 x_0 使得 $f^n(x_0)$总有意义(在初始值 x_0 处迭代总能够进行),那么情况就大为不同了.

在本文中我们来证明如下定理:

定理 1. f 是 $\mathbb{R}_\infty\rightarrow\mathbb{R}_\infty$的连续函数,$(a,b)\subseteq\mathbb{R}$ 是一个开区间,如果存在 $x_0\in(a,b)$,使得对任意自然数 i,都有 $f^i(x_0)\in(a,b)$,即轨道 A 中每一个数都在区间(a,b)中,则函数 f 在闭区间$[a,b]\subseteq\mathbb{R}_\infty$上有不动点.

定理 1 是判定程序 P_2 终止性的基础,利用定理 1,结合函数 f 在不动点的单侧稳定性,我们可以轻易地判定许多程序的终止性.特别对 f 是逐段多项式连续函数,我们建立了判定程序 P_2 终止性的完备算法 TNPI(见第 2 节、第 3 节).

文献[12]通过分析多项式 f 的发散区域,讨论了区间$(-\infty,r_{\min})$,$(r_{\max},+\infty)$上多项式程序 P_2 的终止性判定.这里,$r_{\min},r_{\max}$ 分别是 f 的最小、最大不动点.其方法所能处理的范围是本文结果的特殊情况.本文方法不仅可以处理任何区间,函数 f 也不限于多项式.

1 定理 1 的证明与推论

下面用程序 P_2 的终止性重述定理 1.

定理 1. 在程序 P_2 中,$\Omega=(a,b)\subseteq\mathbb{R}$ 是一个开区间,如果程序 P_2 是不终止的,则函数 f 在闭区间$[a,b]\subseteq\mathbb{R}_\infty$上有不动点.

证明:由已知条件,存在数 $x_0\in(a,b)$满足 $f^i(x_0)\in(a,b),i=1,2,\ldots$,记 x_0 的轨道为 A,即

$$A=\{x_0,f(x_0),f^2(x_0),\ldots\}.$$

考虑数集 A 的上、下确界,分别记 $b_1=\sup(A),a_1=\inf(A)$.下面证明必有

$$a\leq a_1\leq f(a_1),b\geq b_1\geq f(b_1).$$

如果 $a_1\in A$,则 $f(a_1)\in A$,显然有 $a<a_1\leq f(a_1)$.

如果 $a_1\notin A$,则由确界的基本性质,A 存在一个子列$\{x_{kn}\}=\{f^{kn}(x_0)\}$收敛到 a_1,即 $\lim_{n\to+\infty}x_{kn}=a_1$.由极限的保号性可知 $a\leq a_1$.又由 f 的连续性,有 $\lim_{n\to+\infty}f(x_{kn})=f(a_1)$.而 $f(x_{kn})>a_1$,由极限的保号性,有 $\lim_{n\to+\infty}f(x_{kn})\geq a_1$,因此 $a_1\leq f(a_1)$.同理可证 $b\geq b_1\geq f(b_1)$.

如果 $a_1\leq f(a_1),b_1\geq f(b_1)$中至少有一个等号成立,则结论已经成立;否则有 $a_1<f(a_1),b_1>f(b_1)$.

考虑到函数$\varphi(x)=f(x)-x,x\in[a_1,b_1]$.$\varphi(x)$显然在$[a_1,b_1]$上连续且$\varphi(a_1)>0,\varphi(b_1)<0$.由连续函数的介值定理知,存在 x^*满足$\varphi(x^*)=0$,即 $f(x^*)=x^*,x^*\in[a_1,b_1]\subseteq[a,b]$. □

讨论:关于 $a=-\infty$或者 $b=+\infty$的情况,上述证明依然有效.由于$\pm\infty$不能是程序的初值点,所以区间Ω的端点含有$\pm\infty$时,相应的端点必须是开的.下面的推论 2 在$\pm\infty$的情况依然成立,不再单独说明.

推论 1. 在程序 P_2 中,$\Omega=[a,b]\subset\mathbb{R}$ 是一个闭区间,则程序 P_2 不终止的充要条件是函数 f 在闭区间$[a,b]$上有不动点.

推论 2. 在程序 P_2 中,$\Omega\subseteq\mathbb{R}$ 可以是一个开、闭、半开半闭区间,Ω的两个端点 a,b 满足 $f(a)\neq a,f(b)\neq b$(即区间端点不是 f 的不动点).则程序 P_2 不终止的充要条件是函数 f 在开区间(a,b)内部有不动点.

2 仅在边界有不动点的情况与定理 2

定理 1 的推论 1、推论 2 表明,如果区间的边界上没有 f 的不动点,则程序 P_2 的终止性很好判定.麻烦仅仅出现在区间边界上有 f 的不动点的情况.对这些情况,我们对函数 f 略加限制,建立了如下结果(引理 1~引理 3).

为了统一处理含$\pm\infty$边界的情况,我们需要做一点准备工作.a 的右ε邻域 $O_+(a,\varepsilon)(\varepsilon>0)$定义为点集:

$$O_{+}(a,\ \varepsilon)=\begin{cases}\{x\mid 0<x-a<\varepsilon\},\ a\neq-\infty\\ \{x\mid x>\varepsilon\},\qquad\quad a=-\infty\end{cases}.$$

b 的左ε邻域 $O_{-}(b,\varepsilon)(\varepsilon>0)$定义为点集:

$$O_{-}(b,\ \varepsilon)=\begin{cases}\{x\mid 0<b-x<\varepsilon\},\ b\neq+\infty\\ \{x\mid x>\varepsilon\},\qquad\quad b=+\infty\end{cases}.$$

引理 **1**. 在程序 P_2 中,$\Omega=(a,b)\subseteq\mathbb{R}$(或$(a,b]\subset\mathbb{R}$),函数 f 满足:

1. $f(a)=a,f(b)\neq b$ 且 f 在区间(a,b)内部没有不动点(即不动点只出现在 a 端);

2.方程 $f(x)=a$ 在Ω上只有有限个解.

则程序 P_2 不终止的充要条件是:$(a+b)/2>f((a+b)/2)$且存在正数ε满足$\forall x\in O_{+}(a,\varepsilon),f(x)>a$.

注:当 a,b 至少有一个是无穷时,在Ω中任取一点 x'代替$(a+b)/2$,以便顺利判断 $x'>(<)f(x')$.下面同样处理.

证明:充分性.如果存在 a 的右邻域 $O_{+}(a,\varepsilon)$满足$\forall x\in O_{+}(a,\varepsilon),f(x)>a$,则任取点 $x_0\in O_{+}(a,\varepsilon)$,考查集合 A

$$A=\{x_0,f(x_0),f^2(x_0),\ldots\}.$$

因 f 在Ω上无不动点,故 $x>f(x)$或 $x<f(x)$恰有一个在Ω上恒成立;但$(a+b)/2>f((a+b)/2)$,故在Ω上有 $x>f(x)$.因为 $a+\varepsilon>x_0>f(x_0)>a$,所以 $f(x_0)\in O_{+}(a,\varepsilon)$.

同理,$f^i(x_0)\in O_{+}(a,\varepsilon)$对 $i=1,2,\ldots$都成立.因此,程序 P_2 不终止.

必要性.程序 P_2 不终止,则存在数 $x_0\in(a,b)$满足 $f^i(x_0)\in(a,b),i=1,2,\ldots$,记

$$A=\{x_0,f(x_0),f^2(x_0),\ldots\}.$$

又 f 在区间Ω内部没有不动点,因此 $x>f(x)$或 $x<f(x)$恰有一个在Ω上恒成立.

如果 $x>f(x)$,则有$(a+b)/2>f((a+b)/2)$且数列 A 单调减少,有下界 a,故 A 收敛.容易证明,如果数列 A 收敛,则必收敛到 f 的不动点,这是因为

$$\lim_{n\to+\infty}f^n(x_0)=f(\lim_{n\to+\infty}f^{n-1}(x_0)).$$

因此,数列 A 收敛到 a.又 $f(x)=a$ 在区间(a,b)只有有限个解,因此存在 a 的右邻域 $O_{+}(a,\varepsilon)$满足$\forall x\in O_{+}(a,\varepsilon)$, $f(x)>a$ 或 $f(x)<a$ 成立.而数列 A 单调减少收敛到 a,即右邻域 $O_{+}(a,\varepsilon)$内有点满足 $f(x)>a$,故在整个右邻域 $O_{+}(a,\varepsilon)$有 $f(x)>a$.

如果 $x<f(x)$,则数列 A 单调增加,有上界 b.同前面的分析,A 仍要收敛到 a.但这是不可能的,因为 $\lim_{n\to+\infty}f^n(x_0)\geq x_0>a$,矛盾.即 $x<f(x)$的情况不可能成立. □

完全类似地可以证明:

引理 **2**. 在程序 P_2 中,$\Omega=(a,b)\subseteq\mathbb{R}$(或$[a,b)\subset\mathbb{R}$),函数 f 满足:

1. $f(a)\neq a,f(b)=b$ 且 f 在区间(a,b)内部没有不动点(即不动点只出现在 b 端);

2.方程 $f(x)=b$ 在Ω上只有有限个解,

则程序 P_2 不终止的充要条件是:$(a+b)/2<f((a+b)/2)$且存在正数ε满足$\forall x\in O_{-}(b,\varepsilon),f(x)<b$.

引理 **3**. 在程序 P_2 中,$\Omega=(a,b)\subseteq\mathbb{R}$ 是一个开区间,函数 f 满足:

1. $f(a)=a,f(b)=b$ 且 f 在区间Ω内部没有不动点(即不动点只出现在 a,b 端);

2.方程 $f(x)=a$ 与方程 $f(x)=b$ 在Ω上都只有有限个解,

则程序 P_2 不终止的充要条件是:$(a+b)/2>f((a+b)/2)$且存在正数ε满足$\forall x\in O_{+}(a,\varepsilon),f(x)>a$;或$(a+b)/2<f((a+b)/2)$且存在正数$\varepsilon$满足$\forall x\in O_{-}(b,\varepsilon),f(x)<b$.

讨论:满足引理 1~引理 3 中条件 2 的连续函数是相当大的一个类,包含了大多数常见的函数类型,比如逐段多项式连续函数等等.

定理 **2**. 区间上逐段多项式连续函数程序的终止性是可判定的.

证明:首先,我们需要证明如果 f 是逐段多项式连续函数,则对$\forall a\in\mathbb{R}_{\infty}$,方程 $f(x)=a$ 只有有限个解.当 $a=\pm\infty$时,由前文关于符号与术语说明中的 6,方程 $f(x)=a$ 的解只可能是 $x=-\infty$或 $x=+\infty$,故结论成立.如果 $a\neq\pm\infty$,则由代数基本定理,结论显然成立.因此,对逐段多项式连续函数程序,定理 1 的两个推论与引理 1~引理 3 都可应用.

其次,函数 f 的不动点出现在区间的位置,只有如下 3 种可能情况:

1. 区间Ω内部与端点都没有 f 的不动点;
2. 区间Ω内部有 f 的不动点;
3. 区间Ω内部没有 f 的不动点,但区间端点有不动点.

情况 1,由定理 1 可知程序 P_2 终止.情况 2,由定理 1 的推论 2 可知,程序 P_2 不终止.对于情况 3,需要对区间的类型与不动点出现的位置分别加以讨论.

区间Ω分 4 种类型$(a,b),[a,b),(a,b],[a,b]$.

此时,不动点出现的位置又有 3 种情况,即不动点只出现在区间的 a 端(简记为$[f(a)=a]$)、不动点只出现在区间的 b 端(简记为$[f(b)=b]$)、不动点只出现在区间的 a,b 两端(简记为$[f(a)=a\wedge f(b)=b]$).这样,需要对 $4\times3=12$ 情况加以讨论.经简化之后,只有 8 种情况,每种情况都标明了所适用的判定准则或终止性结论.

1. $\Omega=[a,b],[f(a)=a]$或$[f(b)=b]$或$[f(a)=a\wedge f(b)=b]$. (显然不终止)
2. $\Omega=[a,b),[f(a)=a]$或$[f(a)=a\wedge f(b)=b]$. (显然不终止)
3. $\Omega=[a,b),[f(b)=b]$. (引理 2)
4. $\Omega=(a,b],[f(b)=b]$或$[f(a)=a\wedge f(b)=b]$. (显然不终止)
5. $\Omega=(a,b],[f(a)=a]$. (引理 1)
6. $\Omega=(a,b),[f(a)=a]$. (引理 1)
7. $\Omega=(a,b),[f(b)=b]$. (引理 2)
8. $\Omega=(a,b),[f(a)=a\wedge f(b)=b]$. (引理 3)

上面的讨论是完全的,没有遗漏,所以定理 2 成立. □

3 判定算法与应用实例

为了能够自动判定程序 P_2 的终止性,我们给出如下算法 TNPI(termination of nonlinear programs over intervals).

记区间类型的集合 $Int=\{(a,b),[a,b),(a,b],[a,b]\}$(当端点含有$\pm\infty$时相应端点必须被看作是开的,因$\pm\infty$不能作为程序的初始值).

算法(**TNPI**).

Input: 区间$\Omega\in Int$,逐段多项式连续函数 f;

Output: T(=termination)或 NT(=non-termination).

$N1$: 计算 f 在区间Ω内部是否有不动点(即判断集合$\{x|x\in(a,b),f(x)-x=0\}$是否空集,可使用实根隔离[13]、Sturm[13]等方法求解).是,则输出 NT 并停机;否,则继续下一步.

$N2$: 计算 f 在区间Ω边界是否有不动点.否,则输出 T 并停机;是,则继续下一步.

$N3$: 对区间Ω的不同类型以及不动点出现的位置,选择定理 1 的推论 1、推论 2 与引理 1~引理 3 作判断.

 $N31$: 如果$\Omega=[a,b]$,输出 NT 并停机;

 $N32$: 如果$\Omega=[a,b)$,继续下一步

  $N321$: 如果 $f(a)=a$,则输出 NT 并停机;否则,$\Omega\leftarrow(a,b)$转到 $N35$.

 $N33$: 如果$\Omega=(a,b]$,继续下一步

  $N331$: 如果 $f(b)=b$,则输出 NT 并停机;否则,$\Omega\leftarrow(a,b)$转到 $N34$.

 $N34$: 如果$\Omega=(a,b)$且 $f(a)=a,f(b)\neq b$,继续下一步

  $N341$: 如果$(a+b)/2<f((a+b)/2)$,则输出 T 并停机;否则,继续下一步

  $N342$: 如果存在正实数ε,满足$\forall x\in O_+(a,\varepsilon),f(x)>a$,则输出 NT 并停机;否则,输出 T 并停机.

 $N35$: 如果$\Omega=(a,b)$且 $f(a)\neq a,f(b)=b$,继续下一步

  $N351$: 如果$(a+b)/2>f((a+b)/2)$,则输出 T 并停机;否则,继续下一步

  $N352$: 如果存在正实数ε,满足$\forall x\in O_-(b,\varepsilon),f(x)<b$,则输出 NT 并停机;否则,输出 T 并停机.

$N36$: 如果$\Omega=(a,b)$且 $f(a)=a,f(b)=b$,继续下一步

$N361$: 如果$(a+b)/2>f((a+b)/2)$,继续下一步;否则,转到 $N363$.

$N362$: 如果存在正实数ε,满足$\forall x\in O_+(a,\varepsilon),f(x)>a$,则输出 NT 并停机;否则,输出 T 并停机.

$N363$: 如果存在正实数ε,满足$\forall x\in O_-(b,\varepsilon),f(x)<b$,则输出 NT 并停机;否则,输出 T 并停机.

算法结束.

算法 TNPI 的终止性显然,正确性以及完备性(对逐段多项式连续函数 f)由定理 1 的推论 1、推论 2 和定理 2 保证.

下面举几个应用实例.

例 1:判定如下程序的终止性:

$$P_3\text{: while } x^2-x-5<0 \text{ do } \{x:=x^2-5\} \text{ end.}$$

解:不等式 $x^2-x-5<0$ 的解集是开区间$(a,b)=((1-\sqrt{21})/2,(1+\sqrt{21})/2)$.又显然,两个端点都是 $f(x)=x^2-5$ 的不动点,故适合应用引理 3.

计算$(a+b)/2=((1-\sqrt{21})/2+(1+\sqrt{21})/2)/2=1/2>-19/4=f((a+b)/2)$.

解方程 $f(x)=a$,得二根为 $x_1=a,x_2=(-1+\sqrt{21})/2\approx1.791287848$.容易检测 x 在区间(a,x_2)中恒有 $f(x)<a$.即不存在 a 的右邻域 $O_+(a,\varepsilon)$,使得$\forall x\in O_+(a,\varepsilon),f(x)>a$.由引理 3 的结论,程序 P_3 终止.

讨论:$f(x)=x^2-x-5$ 在 $\mathbb{R}_\infty$上的不动点只有 3 个$(1-\sqrt{21})/2,(1+\sqrt{21})/2,+\infty$.因此,条件区间$\Omega=(-\infty,(1-\sqrt{21})/2)$时,适合使用引理 2,程序终止.当条件区间$\Omega=((1+\sqrt{21})/2,+\infty)$时,适合使用引理 3,程序不终止.

例 2[13]:讨论如下程序的终止性,Z 是符号常数.

$$0\le Z\le 30,$$

$$P_4\text{:}\quad \text{while } x<10 \text{ do } \{x:=x^3-2x^2-x+2+Z\} \text{ end.}$$

解:令 $f=x^3-2x^2-x+2+Z$.显见,无论 $Z(\in\mathbb{R})$取什么数,f 在区间$(-\infty,10)$的端点$-\infty$处有不动点.对给定的常数 Z, $f(x)=x$ 在 $\mathbb{R}$ 上只有有限个解,记最小的解为 $x_{\min}$.如果 $x_{\min}>10$,则区间$(-\infty,10)$上没有 $f(x)=x$ 的解,由引理 1 知程序 P_4 不终止.如果 $x_{\min}\le 10$,则考虑区间$(-\infty,x_{\min})$,由引理 3 知程序 P_4 仍不终止.

讨论:这里的解法没有用到条件 $0\le Z\le 30$,因此它是多余的.易见,本文的方法适用范围比文献[12]的方法要广得多.使用计算代数工具 DISCOVERER[14,15],我们甚至可以考虑带参数的更为复杂的例子.比如,$Z\in\mathbb{R}$ 是实常数,考虑程序:

$$P_5\text{: while } x^2<1 \text{ do } \{x:=x^3-2Zx^2-x+2\} \text{ end.}$$

这种例子已经远远超出了文献[12]方法的能力范围.我们的解法如下:

记 $g=x^3-2Zx^2-x+2$,按算法 TNPI,需要分 4 种情况讨论:

1. $\exists x\in(-1,1),[g(x)=x]$;
2. $[g(-1)=-1,g(1)\ne1]\wedge\forall x\in(-1,1),[g(x)\ne x]$;
3. $[g(-1)\ne-1,g(1)=1]\wedge\forall x\in(-1,1),[g(x)\ne x]$;
4. $[g(-1)=-1,g(1)=1]\wedge\forall x\in(-1,1),[g(x)\ne x]$.

其中,情况 2、情况 4 无解.情况 1 的解是 $Z>1/2$(使用 DISCOVERER),由推论 1 可知,此时程序 P_5 不终止.情况 3 的解是 $Z=1/2$,由引理 2 知,此时程序 P_5 终止.所以,程序 P_5 不终止当且仅当 $Z>1/2$.

4 进一步的工作

在程序 P_2 中,Ω为不相交区间并的情况已经相当复杂,我们举个例子加以说明.

函数

$$f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{1}{2}, & x\in\left[-\infty,\dfrac{1}{2}\right) \\ 2(1-x), & x\in\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right] \end{cases},$$

P_6: while $x\in[0,11/20]\cup[19/20,1]$ do $\{x:=f(x)\}$ end.

程序P_6中,$\Omega=[0,11/20]\cup[19/20,1]$由两个不相交区间组成,易知$P_6$是不终止的,因为$f$在$\Omega$上有3-周期点$f(0)=1/2,f(1/2)=1,f(1)=0$.但$f$在$\Omega$上没有不动点,也没有2-周期点.

我们仍然有猜测:

猜想 1:在程序 P_2 中,Ω是 n 个不相交闭区间的并,如果 P_2 不终止,则函数 f 在Ω上至少有一条长度不超过$2^{n-1}+1$ 的周期轨.

另外,对多变元的情况,我们也有猜测:

猜想 2:在程序 P_1 中,Ω是有界凸集,如果 P_1 不终止,则函数 F 在Ω内部或Ω边界上有不动点.

当 F 是线性函数时,可以证明猜想 2 结论是正确的.

致谢 感谢中国科学院成都计算机应用研究所杨路研究员、冯勇研究员、张景中院士对作者无微不至的关怀和指导;感谢中国科学院软件研究所周巢尘院士、四川大学张伟年教授给予作者的建设性意见;感谢匿名审稿人提出的有益意见和建议.

References:

[1] Podelski A, Rybalchenko A. A complete method for the synthesis of linear ranking functions. In: Steffen B, ed. Proc. of the Verification, Model Checking, and Abstract Interpretation. LNCS 2937, Heidelberg: Springer-Verlag, 2004. 239−251.

[2] Dams D, Gerth R, Grumberg O. A heuristic for the automatic generation of ranking functions. In: Alur R, ed. Proc. of the Workshop on Advances in Verification. Chicago: University of Utah Press, 2000. 1−8.

[3] Colon M, Sipma HB. Synthesis of linear ranking functions. In: Margaria T, ed. Proc. of the Tools and Algorithms for Construction and Analysis of Systems. LNCS 2031, Heidelberg: Springer-Verlag, 2001. 67−81.

[4] Chen YH, Xia BC, Yang L, Zhan NJ, Zhou CC. Discovering non-linear ranking functions by solving semi-algebraic systems. In: John F, ed. Proc. of the Theoretical Aspects of Computing (ICTAC 2007). Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. 34−49.

[5] Tiwari A. Termination of linear programs. In: Alur R, ed. Proc. of the Computer Aided Verification. LNCS 3114, Heidelberg: Springer-Verlag, 2004. 70−82.

[6] Cousot P. Proving program invariance and termination by parametric abstraction, Lagrangian relaxation and semi-definite programming. In: Cousot R, ed. Proc. of the Verification, Model Checking, and Abstract Interpretation. LNCS 3385, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. 61−81.

[7] Bradley AR, Manna Z, Sipma HB. Termination of polynomial programs. In: Cousot R, ed. Proc. of the Verification, Model Checking, and Abstract Interpretation. LNCS 3385, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. 113−129.

[8] Yang L, Zhan NJ, Xia BC, Zhou CC. Program verification by using DISCOVERER. In: Meyer B, ed. Proc. of the Verified Software. LNCS 4171, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. 528−538.

[9] Li T, Yorke JA. Period three implies chaos. American Mathematical Monthly, 1975,82(10):985−992. [doi: 10.2307/2318254]

[10] Zhang JZ, Yang L. Some theorems on Sarkovskii order. Advances in Mathematics, 1987,16(1):33−48 (in Chinese with English abstract).

[11] Zhang WN. Dynamical Systems. Beijing: Higher Education Press, 2001 (in Chinese).

[12] Babic D, Hu AJ, Rakamaric Z, Cook B. Proving termination by divergence. In: Bowen JP, ed. Proc. of the 5th IEEE Int'l Conf. on Software Engineering and Formal Methods. London: the IEEE Computer Society Press, 2007. 93−102.

[13] Yang L, Xia BC. Computational real algebraic geometry. In: Wang D, ed. Proc. of the Selected Lecture in Symbolic Computation. Beijing: Tsinghua University Press, 2003.

[14] Yang L, Hou XR, Xia BC. A complete algorithm for automated discovering of a class of inequality-type theorems. Science in China (Series F), 2001,44(1):33−49. [doi: 10.1007/BF02713938]

[15] Yang L, Xia BC. Automated Proving and Discovering on Inequalities. Beijing: Science Press, 2008. 84−111 (in Chinese).

附中文参考文献:

[10] 张景中,杨路.关于 Sarkovskii 序的一些定理.数学进展,1987,16(1):33–48.
[11] 张伟年.动力系统基础.北京:高等教育出版.2001.
[15] 杨路,夏壁灿.不等机机器证明与自动发现.北京:科学出版社,2008.84–111.

姚勇(1974－),男,重庆人,主要研究领域为自动推理,符号计算,智能软件技术.