ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
Journal of Software, Vol.21, No.5, May 2010, pp.968−977
doi: 10.3724/SP.J.1001.2010.03624

E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel/Fax: +86-10-62562563

一种覆盖粗糙模糊集模型*

胡　军[1,2]，王国胤[2+]，张清华[2]

[1](西安电子科技大学　电子工程学院,陕西　西安　710071)
[2](重庆邮电大学　计算机科学与技术研究所,重庆　400065)

Covering Based Generalized Rough Fuzzy Set Model

HU Jun[1,2],　WANG Guo-Yin[2+],　ZHANG Qing-Hua[2]

[1](School of Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an 710071, China)
[2](Institute of Computer Science and Technology, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China)
+ Corresponding author: E-mail: wanggy@cqupt.edu.cn

Hu J, Wang GY, Zhang QH. Covering based generalized rough fuzzy set model. *Journal of Software*, 2010, 21(5):968−977. http://www.jos.org.cn/1000-9825/3624.htm

Abstract:　The extension of rough set is an important issue in rough set theory among which the covering based generalized rough set is vital. Concept approximation in covering approximation space (CAS) is a key issue for acquiring knowledge from it. Some researchers have done much on approximation of classical sets in covering approximation space. Some covering based generalized rough fuzzy set models have already been developed for approximation of fuzzy sets in covering approximation space. Unfortunately, there are limitations in these models. In this paper, a new covering based generalized rough fuzzy set model is proposed. It solves the problems of former models. Moreover, the lower and upper approximations in two different covering approximation spaces with partial order relation are studied, and the sufficient and necessary condition for generating the same covering based generalized rough fuzzy sets from two different covering approximation spaces is that these two coverings have the same reductions. In the end, the relationship of this new model with the models proposed by Wei and Xu is analyzed. Wei's model and Xu's model are proved to be two extremes of the new one, and they can be used in some special cases of unary covering. These results provide foundation for the application of covering based generalized rough fuzzy set models to fuzzy decisions.
Key words:　covering approximation space; rough set; fuzzy set; rough fuzzy set; confidence

摘　要:　粗糙集扩展模型的研究是粗糙集理论研究的一个重要问题.其中,基于覆盖的粗糙集模型扩展是粗糙集扩展模型中的重要一类.覆盖近似空间中的概念近似是从覆盖近似空间中获取知识的关键.目前,研究者对覆盖近似

* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant Nos.60573068, 60773113 (国家自然科学基金); the Science & Technology Research Program of Chongqing Education Committee of China under Grant Nos.KJ060517, KJ090512 (重庆市教委科学技术研究项目); the Natural Science Foundation of Chongqing of China under Grant No.2008BA2017 (重庆市自然科学基金重点项目); the Science Fund for Distinguished Young Scholars of Chongqing of China under Grant No.2008BA2041 (重庆市杰出青年科学基金)

Received 2008-09-27; Revised 2009-02-13; Accepted 2009-03-31; Published online 2009-11-13

空间中经典集合的近似进行了较多的研究.针对覆盖近似空间中模糊集合的近似,虽然不同的覆盖粗糙模糊集模型被提了出来,但它们都存在不合理性.从规则的置信度出发,提出了一种新的覆盖粗糙模糊集模型.该模型修正了已有模型中存在对象在下近似中不确定可分和上近似中不近似可分的问题.分析了具有偏序关系的两个覆盖近似空间中上、下近似之间的关系,发现两个不同覆盖生成相同覆盖粗糙模糊集的充要条件是这两个覆盖的约简恒等.分析了新模型与 Wei 模型、Xu 模型之间的关系,发现这两种模型是新模型的两种极端情况,且其应用前提是覆盖为一元覆盖.这些结论将为覆盖粗糙模糊集模型应用于决策为模糊的情形提供理论基础.
关键词: 覆盖近似空间;粗糙集;模糊集;粗糙模糊集;置信度
中图法分类号: TP181 **文献标识码**: A

模糊集理论是由美国科学家 Zadeh 教授于 1965 年提出的刻画模糊现象和模糊概念的重要方法[1].粗糙集理论是由波兰科学家 Pawlak 教授于 1982 年提出的处理不精确、不完备和不相容信息的数学方法[2].近年来,模糊集理论和粗糙集理论在知识获取、模式识别、机器学习等领域取得了很大的成功.这两种理论尽管都主要用于不确定信息的处理,但彼此的出发点和侧重点却不尽相同,具有很强的互补性.于是,Dubois 创造性地将这两种理论结合起来,提出了粗糙模糊集和模糊粗糙集[3,4].其中,粗糙模糊集将目标集合泛化为模糊集,而模糊粗糙集将论域上的等价关系泛化为模糊等价关系.此后,这两种理论的结合得到了研究者广泛的关注.Morsi 等人对模糊粗糙集的公理化进行了研究,但其研究仅限于模糊相似关系[5].Wu 等人对一般模糊关系下的对偶模糊粗糙近似算子的构造与公理化进行了研究,得到了刻画各种模糊关系所对应的模糊粗糙近似算子的最小公理集[6].Yeung 等人研究了任意模糊关系下模糊粗糙集的格和拓扑结构[7].Mi 等人进一步对 T-模模糊粗糙近似算子进行了公理化刻画,并采用信息熵对 T-模模糊粗糙集的不确定性进行了度量[8].这两种理论的结合,为处理更加复杂的问题提供了理论工具,比如连续值属性信息系统以及符号值和连续值属性混合信息系统的处理[9−14].

我们知道,经典粗糙集理论是基于不可分辨关系的,即它的知识为论域上的划分,也就是说知识中的概念之间不存在交集[2].而在实际应用当中,知识中的概念之间往往存在交叉,并且所有的概念构成论域上的覆盖,比如由一般二元关系或者邻域系统所构成的知识系统就属于此类.因此,有必要将粗糙集理论扩展到更一般的情形——覆盖近似空间.针对上述问题,研究者做了大量的工作,这些研究工作主要分为以下 3 个方面:(1) 覆盖近似空间中的概念近似.自 Zakowski 最早将经典粗糙集模型扩展到覆盖近似空间以后[15],其他学者又提出了多种不同的基于覆盖近似空间的概念近似方法[16−21],它们的主要区别在于对上近似的不同理解;(2) 覆盖近似空间的约简.Zhu 研究了两个覆盖生成相同的上、下近似的充要条件,并提出了覆盖约简,为覆盖近似空间的简化提供了理论基础[22].为了从覆盖近似空间中获取最简规则,Hu 提出了覆盖近似空间的相对约简,并结合 Zhu 所提出的覆盖约简又提出了覆盖近似空间的知识约简框架[23];(3) 覆盖粗糙集的不确定性度量.Huang 通过引入信息熵,定义了覆盖粗糙集的粗糙熵,为定量研究覆盖近似空间知识粗糙性提供了理论工具[24].基于等域关系,Hu 将覆盖近似空间转化为 Pawlak 近似空间,并研究了两个空间中不确定性度量之间的性质保持关系,为覆盖近似空间知识粗糙性的度量提供了另外一条途径[25].上述研究基本上建立了基于覆盖近似空间的知识获取的理论基础和框架,但这些研究的目标集合还仅仅停留在经典集合的范畴.

粗糙集理论的一个主要应用就是属性约简.由于基于粗糙集理论的属性约简具有不依赖于领域先验知识的特点,因而得到了广泛的应用.然而,经典粗糙集理论要求给定的知识必须为论域上的划分.对于知识为论域上的覆盖,经典粗糙集理论不能进行直接处理,必须进行知识的转化,但转化可能造成知识的改变或损失. Chen 基于覆盖粗糙集模型对该问题进行了研究,并得到了比经典粗糙集理论更好的实验结果[26].但 Chen 只研究了决策是清晰的情况,即决策的类与类之间是分离的.但在现实问题中,有可能存在决策的类与类之间并不完全分离、而是存在部分交叉的情况.比如我们将信用卡申请者按收入水平分为高、中、低 3 类,显然,这 3 类不是严格分离的.因此,对于决策并不清晰的问题还有待进一步加以研究.

解决上述问题的关键是覆盖近似空间下模糊概念(模糊集合)的近似.针对该问题,已有研究者作了一些尝试[27−30].其中,魏莱和徐忠印分别基于全邻域和近邻域对覆盖粗糙集模型进行了扩展,定义了覆盖近似空间中模

糊概念的粗糙近似[27,28].Feng 基于α截集定义了覆盖近似空间中模糊概念的上、下近似,但其物理含义不够明确[29].另外,当覆盖中存在全集时,Zhu 所提出的模型近似精度较差[30].本文从规则的置信度出发,对文献[27,28]所构造的两种不同的覆盖粗糙模糊集模型进行了研究,分析了这两种模型中存在的不合理性,并提出了一种新的覆盖粗糙模糊集模型,该模型修正了已有模型中存在的不合理性.

1 两种已有的覆盖粗糙模糊集模型及其局限性

为了进行比较研究,我们首先对覆盖近似空间的相关概念和文献[27,28]所提出的两种覆盖粗糙集模型加以简要介绍.

设 U 为非空有限论域,C 为 U 上的一个覆盖,则称有序对(U,C)为覆盖近似空间(covering approximation space,简称 CAS).

定义 1.1. 设(U,C)为覆盖近似空间,x 为 U 中的一个对象,则 x 在该近似空间中的全描述为 $Ad_C(x)=\{K\in C|x\in K\}$,简记为 $Ad(x)$.

定义 1.2[21]. 设(U,C)为覆盖近似空间,x 为 U 中的一个对象,则 x 在该近似空间中的最小描述为 $Md_C(x)=\{K\in C|x\in K\wedge\forall_{S\in C}(x\in S\wedge S\subseteq K\Rightarrow K=S)\}$,简记为 $Md(x)$.

定义 1.3. 设(U,C)为覆盖近似空间,$x\in U$,任意 $K\in C$,如果 $K\in Md(x)$,则称 K 为 x 的一个邻域.$\cup\{K|K\in Md(x)\}$称为 x 的全邻域,记为 $AN(x)$.$\cap\{K|K\in Md(x)\}$称为 x 的近邻域,记为 $CN(x)$.

下面为了论述方便,将文献[27,28]所提出的覆盖粗糙模糊集模型分别称为I型覆盖粗糙模糊集模型和II型覆盖粗糙模糊集模型.

定义 1.4[27]. 设(U,C)为覆盖近似空间,$A\in F(U)$,则 A 在(U,C)上的 I 型粗糙模糊集是一对模糊集 $(\underline{CF}(A),\overline{CF}(A))$,其隶属函数定义如下:

$$u_{\underline{CF}(A)}(x)=\inf\{u_A(y)\mid y\in\cup K,K\in Md(x)\}=\inf\{u_A(y)\mid y\in AN(x)\} \tag{1}$$

$$u_{\overline{CF}(A)}(x)=\sup\{u_A(y)\mid y\in\cup K,K\in Md(x)\}=\sup\{u_A(y)\mid y\in AN(x)\} \tag{2}$$

根据以上定义,任何模糊集 A 在覆盖近似空间中可以用两个模糊集来逼近,即上近似 $\overline{CF}(A)$ 和下近似 $\underline{CF}(A)$.对于论域上的任何对象 x,由于知识 C 的不可分辨性,其属于模糊集 A 的隶属程度介于 $u_{\underline{CF}(A)}(x)$ 和 $u_{\overline{CF}(A)}(x)$ 之间.其中,$u_{\underline{CF}(A)}(x)$ 是 x 的全邻域中对象隶属度的最小值,而 $u_{\overline{CF}(A)}(x)$ 是 x 的全邻域中对象隶属度的最大值,也就是说,全邻域中对象隶属度的最小值和最大值确定了该对象隶属于该模糊概念的两个边界.

例 1:设 $U=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$,$C=\{\{x_1,x_2\},\{x_2,x_3\},\{x_3,x_4\}\}$为 U 上的一个覆盖,$A=\left\{\frac{0.3}{x_1},\frac{0.5}{x_2},\frac{0.8}{x_3},\frac{0.1}{x_4}\right\}$,则根据定义有

$$\overline{CF}(A)=\left\{\frac{0.5}{x_1},\frac{0.8}{x_2},\frac{0.8}{x_3},\frac{0.8}{x_4}\right\},\overline{CF}(\overline{CF}(A))=\left\{\frac{0.8}{x_1},\frac{0.8}{x_2},\frac{0.8}{x_3},\frac{0.8}{x_4}\right\},$$

$$\underline{CF}(A)=\left\{\frac{0.3}{x_1},\frac{0.3}{x_2},\frac{0.1}{x_3},\frac{0.1}{x_4}\right\},\underline{CF}(\underline{CF}(A))=\left\{\frac{0.3}{x_1},\frac{0.1}{x_2},\frac{0.1}{x_3},\frac{0.1}{x_4}\right\}.$$

显然,$\overline{CF}(A)\neq\overline{CF}(\overline{CF}(A)),\underline{CF}(A)\neq\underline{CF}(\underline{CF}(A))$.因此,文献[27]中所定义的覆盖粗糙模糊集模型并不满足其所给出的幂等性.

定义 1.5[28]. 设(U,C)为覆盖近似空间,$A\in F(U)$,则 A 在(U,C)上的 II 型粗糙模糊集是一对模糊集 $(\underline{CS}(A),\overline{CS}(A))$,其隶属函数定义如下:

$$u_{\underline{CS}(A)}(x)=\inf\{u_A(y)\mid y\in\cap K,K\in Md(x)\}=\inf\{u_A(y)\mid y\in CN(x)\} \tag{3}$$

$$u_{\overline{CS}(A)}(x)=\sup\{u_A(y)\mid y\in\cap K,K\in Md(x)\}=\sup\{u_A(y)\mid y\in CN(x)\} \tag{4}$$

与I型覆盖粗糙模糊集模型相比,II型覆盖粗糙模糊集模型缩小了对象不可分辨的集合,即只考察对象近邻域中的元素.显然,任何对象 x 的近邻域包含于它的全邻域.因此,$\underline{CF}(A)\subseteq\underline{CS}(A)\subseteq A\subseteq\overline{CS}(A)\subseteq\overline{CF}(A)$.

以上两种模型虽然给出了两种不同的方法来刻画论域中的模糊概念,但是它们都存在一定的不合理性.在

经典粗糙集理论中,若论域中的一个对象 x 属于目标概念 X 的下近似,则在知识 P 中存在知识粒 $p\in P$,有 $p\subseteq X$,即规则 $p\to X$ 的置信度为 1.另外,若论域中的一个对象 x 属于目标概念 X 的上近似,则在知识 P 中存在知识粒 p,有 $p\cap X\neq\varnothing$,即规则 $p\to X$ 的置信度不为 0.下面我们通过一个例子来分析以上两种模型存在的不合理性:

例 2:设(U,C)为覆盖近似空间,$U=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$,$C=\{K_1,K_2,K_3\}$,其中,$K_1=\{x_1,x_2\}$,$K_2=\{x_2,x_3\}$,$K_3=\{x_3,x_4\}$.令

$$A=\left\{\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\frac{0}{x_3},\frac{0}{x_4}\right\},B=\left\{\frac{1}{x_1},\frac{0}{x_2},\frac{1}{x_3},\frac{0}{x_4}\right\}.$$

根据定义,$\underline{CF}(A)=\left\{\frac{1}{x_1},\frac{0}{x_2},\frac{0}{x_3},\frac{0}{x_4}\right\}$,$\overline{CS}(B)=\left\{\frac{1}{x_1},\frac{0}{x_2},\frac{1}{x_3},\frac{1}{x_4}\right\}$.从规则的置信度来看,规则 $K_1\to A$ 的置信度为 1.由于 $x_2\in K_1$,则 x_2 在给定知识 C 下对概念 A 是确定可分的,即 x_2 属于 A 的下近似的隶属程度应该为 1,这与 $\underline{CF}(A)$ 中 x_2 的隶属度为 0 相矛盾.另外,规则 $K_1\to B$,$K_2\to B$ 和 $K_3\to B$ 的置信度都为 0.5,则 K_1,K_2 和 K_3 中的对象在给定知识 C 下对概念 B 应该都是近似可分的,即 x_1,x_2,x_3 和 x_4 隶属于 B 的程度相等且不为 0.但是,x_1,x_3 和 x_4 都属于 B 的上近似,x_2 却不属于 B 的上近似,这不符合直观的理解.

通过例 2 我们可以发现,以上两种定义都不尽合理,有必要定义一种新的覆盖粗糙模糊集模型.

2 一种新的覆盖粗糙模糊集模型

为了与前文的论述保持一致,将本文提出的覆盖粗糙模糊集模型称为 III 型覆盖粗糙模糊集模型.

2.1 III型覆盖粗糙模糊集模型

定义 2.1. 设(U,C)为覆盖近似空间,$A\in F(U)$,则 A 在(U,C)上的 III 型粗糙模糊集是一对模糊集 $(\underline{CT}_C(A),\overline{CT}_C(A))$,在不引起混淆的情况下,简记为 $(\underline{CT}(A),\overline{CT}(A))$.其隶属函数定义如下:

$$u_{\underline{CT}(A)}(x)=\sup_{K\in Ad(x)}\{\inf_{y\in K}\{u_A(y)\}\} \tag{5}$$

$$u_{\overline{CT}(A)}(x)=\inf_{K\in Ad(x)}\{\sup_{y\in K}\{u_A(y)\}\} \tag{6}$$

设 $x\in U$.若 $K\in Ad(x)\wedge K\notin Md(x)$,则 $\exists_{L\in Md(x)}(L\subseteq K)$.由于 $L\subseteq K$,则 $\inf_{y\in L}\{u_A(y)\}\geq\inf_{y\in K}\{u_A(y)\}$.根据定义(5),$u_{\underline{CT}(A)}(x)\geq\inf_{y\in L}\{u_A(y)\}$,即去掉 K 不影响下近似的最终计算结果.同理,由于 $L\subseteq K$,则 $\sup_{y\in L}\{u_A(y)\}\leq\sup_{y\in K}\{u_A(y)\}$.根据定义(6),$u_{\overline{CT}(A)}(x)\leq\sup_{y\in L}\{u_A(y)\}$,即去掉 K 也不影响上近似的最终计算结果.这也就是说,最小描述和全描述具有相同的近似能力.所以,上述定义也可以等价地写成如下形式:

$$u_{\underline{CT}(A)}(x)=\sup_{K\in Md(x)}\{\inf_{y\in K}\{u_A(y)\}\} \tag{7}$$

$$u_{\overline{CT}(A)}(x)=\inf_{K\in Md(x)}\{\sup_{y\in K}\{u_A(y)\}\} \tag{8}$$

续例 2,根据定义 2.1,有 $\underline{CT}(A)=\left\{\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\frac{0}{x_3},\frac{0}{x_4}\right\}$,$\overline{CT}(B)=\left\{\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\frac{1}{x_3},\frac{1}{x_4}\right\}$.因此,与 I 型覆盖粗糙模糊集相比,该模型修正了 x_2 在给定知识 C 下对概念 A 不确定可分的问题.与 II 型覆盖粗糙模糊集相比,该模型修正了 x_2 在给定知识 C 下对概念 B 不近似可分的问题.

定理 2.1. 设(U,C)为覆盖近似空间,$\varnothing$为空集,$A,B\subseteq F(U)$,$\sim A$ 为 A 的补集,则 III 型覆盖粗糙模糊近似具有以下性质:

(1) 余正规性: $\underline{CT}(U)=\overline{CT}(U)=U$;

(2) 正规性: $\underline{CT}(\varnothing)=\overline{CT}(\varnothing)=\varnothing$;

(3) 下近似的收缩性与上近似的扩张性: $\underline{CT}(A)\subseteq A\subseteq\overline{CT}(A)$;

(4) 对偶性: $\underline{CT}(\sim A)=\sim\overline{CT}(A)$,$\overline{CT}(\sim A)=\sim\underline{CT}(A)$;

(5) 单调性: $A\subseteq B\Rightarrow\underline{CT}(A)\subseteq\underline{CT}(B)$,$A\subseteq B\Rightarrow\overline{CT}(A)\subseteq\overline{CT}(B)$;

(6) 幂等性: $\underline{CT}(A)=\underline{CT}(\underline{CT}(A)),\overline{CT}(A)=\overline{CT}(\overline{CT}(A))$.

证明:性质(1)~性质(5)的证明较为直观,此处从略.这里仅对性质(6)进行证明.设 $x\in U,Md(x)=\{K_1,K_2,\ldots,K_m\}$,

$$\begin{aligned}u_{\underline{CT}(A)}(x)&=\sup_{K\in Md(x)}\{\inf_{y\in K}\{u_A(y)\}\}\\&=\sup\{\inf_{y_1\in K_1}\{u_A(y_1)\},\inf_{y_2\in K_2}\{u_A(y_2)\},\ldots,\inf_{y_m\in K_m}\{u_A(y_m)\}\},\end{aligned}$$

不妨设 $K_i\in Md(x),u_{\underline{CT}(A)}(x)=\inf_{y_i\in K_i}\{u_A(y_i)\}$,则 $\inf_{y_i\in K_i}\{u_A(y_i)\}\ge\inf_{y_j\in K_j}\{u_A(y_j)\},j\ne i$.设 $y_i\in K_i$,根据定义

$$u_{\underline{CT}(A)}(y_i)=\sup_{K\in Ad(y_i)}\{\inf_{y\in K}\{u_A(y)\}\}\ge\inf_{y_i\in K_i}\{u_A(y_i)\}=u_{\underline{CT}(A)}(x),$$

因 $\forall_{y_i\in K_i}(u_{\underline{CT}(A)}(y_i)\ge u_{\underline{CT}(A)}(x))$,故 $\inf_{y_i\in K_i}\{u_{\underline{CT}(A)}(y_i)\}=u_{\underline{CT}(A)}(x)$.设 $y_j\in K_j,j\ne i$, $\inf_{y_j\in K_j}\{u_{\underline{CT}(A)}(y_j)\}\le u_{\underline{CT}(A)}(x)$ 成立.故

$$\begin{aligned}u_{\underline{CT}(\underline{CT}(A))}(x)&=\sup_{K\in Md(x)}\{\inf_{y\in K}\{u_{\underline{CT}(A)}(y)\}\}\\&=\sup\{\inf_{y_1\in K_1}\{u_{\underline{CT}(A)}(y_1)\},\inf_{y_2\in K_2}\{u_{\underline{CT}(A)}(y_2)\},\ldots,\inf_{y_m\in K_m}\{u_{\underline{CT}(A)}(y_m)\}\}\\&=u_{\underline{CT}(A)}(x).\end{aligned}$$

所以, $\underline{CT}(A)=\underline{CT}(\underline{CT}(A))$.由对偶性可得 $\overline{CT}(A)=\overline{CT}(\overline{CT}(A))$.证毕. □

2.2 实例分析

在信用卡审批过程中,审批者需要根据申请者的个人信息进行判断,进而对是否同意其申请以及给申请者多少的信用额度做出决策.上述问题的解决如果完全依赖于审批者的个人经验,显然不是一个很好的解决方法.能否用计算机来帮助审批者做出决策?下面我们将借助本文所提出的理论模型对该问题进行探讨.在审批过程中,申请者的收入水平对于审批者非常重要,但是申请者一般都不愿意公开自己的工资.为了解决上述矛盾,我们可以根据申请者的其他信息来预测用户的收入水平.为了简化问题,这里仅把申请者的受教育程度作为决策因素来加以预测.假设有 9 个信用卡申请者 $U=\{x_1,x_2,\ldots,x_9\}$,3 个专家 E_1,E_2 和 E_3 分别对他们的受教育程度评价如下:

E_1:*good*=$\{x_1,x_2,x_3\}$,*average*=$\{x_4,x_5,x_6\}$,*poor*=$\{x_7,x_8,x_9\}$;

E_2:*good*=$\{x_1,x_2\}$,*average*=$\{x_3,x_4,x_5\}$,*poor*=$\{x_6,x_7,x_8,x_9\}$;

E_3:*good*=$\{x_1,x_2\}$,*average*=$\{x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}$,*poor*=$\{x_8,x_9\}$.

根据申请者的受教育程度,可以得到论域 U 上的一个覆盖 C={*good*,*average*,*poor*}.其中,*good*=$\{x_1,x_2,x_3\}$,*average*=$\{x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}$,*poor*=$\{x_6,x_7,x_8,x_9\}$.

若 9 个申请者的收入情况如表 1 所示,则根据如图 1 所示的模糊隶属函数可以得到论域上的 3 个模糊集 *high*,*middle* 和 *low*.其中, $high=\left\{\frac{1}{x_1},\frac{0.8}{x_2},\frac{0.5}{x_3},\frac{0.3}{x_4},\frac{0}{x_5},\frac{0}{x_6},\frac{0}{x_7},\frac{0}{x_8},\frac{0}{x_9}\right\}$, $middle=\left\{\frac{0}{x_1},\frac{0.2}{x_2},\frac{0.5}{x_3},\frac{0.7}{x_4},\frac{1}{x_5},\frac{1}{x_6},\frac{0.6}{x_7},\frac{0.3}{x_8},\frac{0}{x_9}\right\}$, $low=\left\{\frac{0}{x_1},\frac{0}{x_2},\frac{0}{x_3},\frac{0}{x_4},\frac{0}{x_5},\frac{0}{x_6},\frac{0.4}{x_7},\frac{0.7}{x_8},\frac{1}{x_9}\right\}$.

以模糊集 *high* 为例,根据本文所提出的模型可以计算出它的上、下近似分别是

$$\underline{CT}(high)=\left\{\frac{0.5}{x_1},\frac{0.5}{x_2},\frac{0.5}{x_3},\frac{0}{x_4},\frac{0}{x_5},\frac{0}{x_6},\frac{0}{x_7},\frac{0}{x_8},\frac{0}{x_9}\right\},$$

$$\overline{CT}(high)=\left\{\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\frac{0.5}{x_3},\frac{0.5}{x_4},\frac{0.5}{x_5},\frac{0}{x_6},\frac{0}{x_7},\frac{0}{x_8},\frac{0}{x_9}\right\}.$$

记 *good* 隶属于 *high* 的最大、最小隶属度分别为 $u_{\overline{C}(high)}(good),u_{\underline{C}(high)}(good)$,则

$$u_{\overline{C}(high)}(good)=\sup\{u_{high}(x)\mid x\in good\}=1,$$

$$u_{\underline{C}(high)}(good)=\inf\{u_{high}(x)\mid x\in good\}=0.5.$$

也就是说,当已知申请者的受教育水平是 *good* 时,则可推测该申请者的收入水平为 *high* 的程度在[0.5,1]之间.同理可得:

$u_{\overline{C}(middle)}(good)=0.5,\ u_{\underline{C}(middle)}(good)=0,\ u_{\overline{C}(low)}(good)=u_{\underline{C}(low)}(good)=0,$

$u_{\overline{C}(high)}(average)=0.5,\ u_{\underline{C}(high)}(average)=0,\ u_{\overline{C}(middle)}(average)=1,\ u_{\underline{C}(middle)}(average)=0.5,$

$u_{\overline{C}(low)}(average)=0.4,\ u_{\underline{C}(low)}(average)=0,\ u_{\overline{C}(high)}(poor)=u_{\underline{C}(high)}(poor)=0,$

$u_{\overline{C}(middle)}(poor)=1,\ u_{\underline{C}(middle)}(poor)=0,\ u_{\overline{C}(low)}(poor)=1,\ u_{\underline{C}(low)}(poor)=0.$

记对象 x_3 隶属于 *high* 的最大、最小隶属度分别为 $u_{\overline{C}(high)}(x_3),u_{\underline{C}(high)}(x_3)$,由于 x_3 既属于 *good* 也属于 *average*,因此,

$$u_{\overline{C}(high)}(x_3)=\inf\{u_{\overline{C}(high)}(good),u_{\overline{C}(high)}(average)\}=0.5,$$

$$u_{\underline{C}(high)}(x_3)=\sup\{u_{\underline{C}(high)}(good),u_{\underline{C}(high)}(average)\}=0.5.$$

这正是对象 x_3 在 *high* 的上、下近似中的隶属度值.对于新的信用卡申请者,若已知专家对该申请者的受教育程度评价,则可以根据上述的推理方法对其收入水平进行预测,这便为信用卡审批者提供了一定的决策支持.

Table 1 Salary of applicants

表 1 申请者收入表

U	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
Salary	5 000	3 800	3 500	3 300	2 500	2 000	1 600	1 300	900

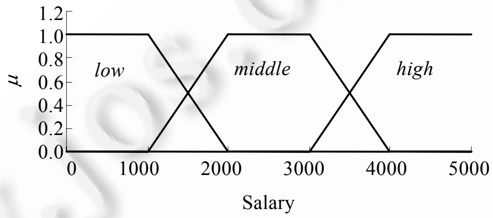

Fig.1 Membership function of salary

图 1 Salary 隶属函数

3 两个覆盖生成相同 III 型覆盖粗糙模糊集的充要条件

在文献[31]中,胡军、王国胤研究了覆盖近似空间的层次模型,给出了覆盖粗细关系的定义.下面首先对具有偏序关系的两个覆盖近似空间中 III 型覆盖粗糙模糊集的关系进行研究.

定义 3.1[31]. 设 C_1,C_2 为论域 U 上的两个覆盖,$x\in U$,若对于任意的 $K'\in Md_{C_1}(x)$,都存在 $K''\in Md_{C_2}(x)$,使得 $K''\subseteq K'$,则称 C_2 较 C_1 更细,记为 $C_2\preceq C_1$.如果 $C_1\preceq C_2$ 且 $C_2\preceq C_1$,则称 C_1 与 C_2 相等,记为 $C_1=C_2$;否则,C_1 与 C_2 不等,记为 $C_1\neq C_2$.如果 $C_2\preceq C_1$ 且 $C_2\neq C_1$,则称 C_2 较 C_1 严格细,记为 $C_2\prec C_1$.

另外,两个覆盖 C_1 和 C_2,若 $\forall_{K\subseteq U}(K\in C_1\Leftrightarrow K\in C_2)$,则称 C_1 与 C_2 恒等,记为 $C_1\equiv C_2$.

定理 3.1. 设 C_1,C_2 为论域 U 上的两个覆盖,$A\in F(U)$.若 $C_1\preceq C_2$,则

$$\underline{CT}_{C_2}(A)\subseteq\underline{CT}_{C_1}(A)\subseteq A\subseteq\overline{CT}_{C_1}(A)\subseteq\overline{CT}_{C_2}(A).$$

证明:设 $x\in U$,根据定义有

$$u_{\underline{CT}_{C_1}(A)}(x)=\sup_{K\in Md_{C_1}(x)}\{\inf_{y\in K}\{u_A(y)\}\},u_{\underline{CT}_{C_2}(A)}(x)=\sup_{K'\in Md_{C_2}(x)}\{\inf_{y\in K'}\{u_A(y)\}\}.$$

由于 $C_1\preceq C_2$,则对于任意的 $K'\in Md_{C_2}(x)$,存在 $K\in Md_{C_1}(x)$,使得 $K\subseteq K'$.所以 $\inf_{y\in K}\{u_A(y)\}\geq\inf_{y\in K'}\{u_A(y)\}$.因此 $\sup_{K\in Md_{C_1}(x)}\{\inf_{y\in K}\{u_A(y)\}\}\geq\sup_{K'\in Md_{C_2}(x)}\{\inf_{y\in K'}\{u_A(y)\}\}$,即 $u_{\underline{CT}_{C_1}(A)}(x)\geq u_{\underline{CT}_{C_2}(A)}(x)$,也即 $\underline{CT}_{C_1}(A)\supseteq\underline{CT}_{C_2}(A)$.同时,根据上、下近似的对偶性可得 $\overline{CT}_{C_1}(A)\subseteq\overline{CT}_{C_2}(A)$.所以,$\underline{CT}_{C_2}(A)\subseteq\underline{CT}_{C_1}(A)\subseteq A\subseteq\overline{CT}_{C_1}(A)\subseteq\overline{CT}_{C_2}(A)$.证毕. □

上、下近似越贴近概念本身,则说明近似空间对概念的刻画能力越强.因此,定理 3.1 说明覆盖的知识粒度越细,则其对概念的刻画能力越强.Zhu 在研究两个覆盖生成相等的覆盖粗糙近似的充要条件时提出了覆盖约

简的概念[22],其具体定义如下:

定义 3.2[22]. 假设 C 是论域 U 上的一个覆盖,$K\in C$,若存在 $c_1,c_2,\dots,c_i\in C-\{K\}$,使得 $K=\bigcup_{j=1}^{i}c_j$,则称 K 是 C 可约的,否则是不可约的.若 C 中的每个元素都是不可约的,则称 C 是不可约的,否则是可约的.任意 $K\in C$,若 K 是 C 可约的,则将 K 从 C 中去掉,直到 C 不可约,则得到一个 C 的约简,记为 $reduct(C)$.

设(U,C)为覆盖近似空间,$reduct(C)$为 C 的约简.由于任意 $x\in U$ 在 C 和 $reduct(C)$中有相同的 $Md(x)$,所以 C=$reduct(C)$.

推论 3.1. 设(U,C)为覆盖近似空间,$reduct(C)$为 C 的约简,则任意的 $A\subseteq F(U)$在(U,C)和$(U,reduct(C))$中有相同的 III 型覆盖粗糙模糊上、下近似.

证明:已知 C=$reduct(C)$,即 $C\preceq reduct(C)$ 且 $reduct(C)\preceq C$.由于 $C\preceq reduct(C)$, 则根据定理 3.1 有 $\underline{CT}_C(A)\supseteq\underline{CT}_{reduct(C)}(A)$.又由于 $reduct(C)\preceq C$, 则根据定理 3.1 有 $\underline{CT}_{reduct(C)}(A)\supseteq\underline{CT}_C(A)$.所以,$\underline{CT}_C(A)=\underline{CT}_{reduct(C)}(A)$.根据上、下近似的对偶性有 $\overline{CT}_C(A)=\overline{CT}_{reduct(C)}(A)$.因此推论 3.1 成立.证毕. □

定理 3.2. 设 C_1,C_2 是 U 上的两个覆盖,则任意 $A\subseteq F(U)$在(U,C_1)和(U,C_2)中有相同的 III 型覆盖粗糙模糊上、下近似当且仅当 $reduct(C_1)\equiv reduct(C_2)$.

证明:($\Leftarrow$)由于 $reduct(C_1)\equiv reduct(C_2)$,则任意 $A\subseteq F(U)$在$(U,reduct(C_1))$和$(U,reduct(C_2))$中有相同的 III 型覆盖粗糙模糊上、下近似.根据推论 3.1,任意 $A\subseteq F(U)$在覆盖及其覆盖约简中有相同的 III 型覆盖粗糙模糊上、下近似,所以,任意 $A\subseteq F(U)$在(U,C_1)和(U,C_2)中也有相同的 III 型覆盖粗糙模糊上、下近似.

($\Rightarrow$)由于上、下近似具有对偶性,因此只需证明:若任意 $A\subseteq F(U)$在(U,C_1)和(U,C_2)中有相同的 III 型覆盖粗糙模糊下近似,则 $reduct(C_1)\equiv reduct(C_2)$.假设 $reduct(C_1)\equiv reduct(C_2)$不成立.令 $K\in reduct(C_1),K\notin reduct(C_2)$,则在$(U,reduct(C_1))$中有 $\underline{CT}_{reduct(C_1)}(K)=K$.根据推论 3.1,若任意 $A\subseteq F(U)$在(U,C_1)和(U,C_2)中有相同的 III 型覆盖粗糙模糊下近似,则 A 在$(U,reduct(C_1))$和$(U,reduct(C_2))$中也有相同的 III 型覆盖粗糙模糊下近似,所以在$(U,reduct(C_2))$中也有 $\underline{CT}_{reduct(C_2)}(K)=K$.由于 $K\notin reduct(C_2)$,则存在 $k_1,k_2,\dots,k_n\in reduct(C_2)$,使得 $K=\bigcup_{1\le i\le n}k_i$.反之,任意 $k_i\in reduct(C_2)$,存在 $k_{i1},k_{i2},\dots,k_{im_i}\in reduct(C_1)$ 使得 $k_i=\bigcup_{1\le j\le m_i}k_{ij}$.所以 $K=\bigcup_{1\le i\le n}\bigcup_{1\le j\le m_i}k_{ij}$,即在 $reduct(C_1)$中 K 是可约的,与 $reduct(C_1)$为 C_1 的覆盖约简矛盾.所以,若任意 $A\subseteq F(U)$在(U,C_1)和(U,C_2)中有相同的 III 型覆盖粗糙模糊下近似,则 $reduct(C_1)\equiv reduct(C_2)$.证毕. □

定理 3.2 说明,如果两个不同的覆盖对所有的 $A\subseteq F(U)$都生成相同的 III 型覆盖粗糙模糊近似当且仅当它们的约简恒等,即有相同约简的两个覆盖也有相同的知识分辨能力.这为判断两个不同覆盖近似空间的知识分辨能力是否相等提供了理论依据.

4 3 种覆盖粗糙模糊集的关系

下面我们对一般情况下 3 种覆盖粗糙模糊集的关系加以讨论.

定理 4.1. 设(U,C)为覆盖近似空间,$A\in F(U)$,则 $\underline{CF}(A)\subseteq\underline{CT}(A)\subseteq\underline{CS}(A)\subseteq A\subseteq\overline{CS}(A)\subseteq\overline{CT}(A)\subseteq\overline{CF}(A)$.

证明:设 $x\in U,\forall K\in Md(x)$,显然,$\cap Md(x)\subseteq K\subseteq\cup Md(x)$.因此,

$$\inf_{y\in\cup Md(x)}\{u_A(y)\}\le\inf_{y\in K}\{u_A(y)\}\le\inf_{y\in\cap Md(x)}\{u_A(y)\},\quad\sup_{y\in\cap Md(x)}\{u_A(y)\}\le\sup_{y\in K}\{u_A(y)\}\le\sup_{y\in\cup Md(x)}\{u_A(y)\},$$

也即 $u_{\underline{CF}(A)}(x)\le u_{\underline{CT}(A)}(x)\le u_{\underline{CS}(A)}(x),u_{\overline{CS}(A)}(x)\le u_{\overline{CT}(A)}(x)\le u_{\overline{CF}(A)}(x)$.

所以,$\underline{CF}(A)\subseteq\underline{CT}(A)\subseteq\underline{CS}(A)\subseteq A\subseteq\overline{CS}(A)\subseteq\overline{CT}(A)\subseteq\overline{CF}(A)$.证毕. □

由定理 4.1 可以发现,在一般情况下,I 型覆盖粗糙模糊近似和 II 型覆盖粗糙模糊近似分别是 III 型覆盖粗糙模糊近似的两种极端情况.

例 3:设 $U=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$,$C=\{\{x_1,x_2\},\{x_2,x_3\},\{x_3,x_4\}\}$为 U 上的一个覆盖, $A=\left\{\frac{0.3}{x_1},\frac{0.5}{x_2},\frac{0.4}{x_3},\frac{0.7}{x_4}\right\}$,则根据定义:

$$\underline{CF}(A)=\left\{\frac{0.3}{x_1},\frac{0.3}{x_2},\frac{0.4}{x_3},\frac{0.4}{x_4}\right\},\overline{CF}(A)=\left\{\frac{0.5}{x_1},\frac{0.5}{x_2},\frac{0.7}{x_3},\frac{0.7}{x_4}\right\},$$

$$\underline{CS}(A)=\left\{\frac{0.3}{x_1},\frac{0.5}{x_2},\frac{0.4}{x_3},\frac{0.4}{x_4}\right\},\overline{CS}(A)=\left\{\frac{0.5}{x_1},\frac{0.5}{x_2},\frac{0.4}{x_3},\frac{0.7}{x_4}\right\},$$

$$\underline{CT}(A)=\left\{\frac{0.3}{x_1},\frac{0.4}{x_2},\frac{0.4}{x_3},\frac{0.4}{x_4}\right\},\overline{CT}(A)=\left\{\frac{0.5}{x_1},\frac{0.5}{x_2},\frac{0.5}{x_3},\frac{0.7}{x_4}\right\}.$$

显然,$\underline{CF}(A)\subseteq\underline{CT}(A)\subseteq\underline{CS}(A)\subseteq A\subseteq\overline{CS}(A)\subseteq\overline{CT}(A)\subseteq\overline{CF}(A)$.

在覆盖近似空间(U,C)中,当被近似概念 $A\in P(U)$时,即 A 为经典集合,则上述 3 种覆盖粗糙模糊集模型中的上、下近似都将退化为经典集合.更进一步地,当 C 为 U 上的划分时,这 3 种覆盖粗糙模糊集模型都将退化为 Pawlak 粗糙集模型,且有 $\underline{CF}(A)=\underline{CS}(A)=\underline{CT}(A),\overline{CF}(A)=\overline{CS}(A)=\overline{CT}(A)$.

在给定覆盖近似空间中,若两个模型对所有的 $A\in F(U)$都有相同的上、下近似,则称这两个模型等价.显然,当覆盖近似空间退化为 Pawlak 近似空间时,3 种模型等价.也就是说,已有的两种模型在 Pawlak 近似空间下不存在本文所指出的问题,或者说已有两种模型的应用是有前提条件的.

设 C 为 U 上的一个覆盖,若$\forall_{x\in U}(|Md(x)|=1)$,其中$|\cdot|$是集合的势,则称该覆盖是一元的[32].显然,论域上的划分是一元的.

定理 4.2. 设(U,C)为覆盖近似空间,3 种覆盖粗糙模糊集模型等价当且仅当覆盖 C 是一元的.

证明:($\Leftarrow$)设 $x\in U$,由于覆盖 C 是一元的,则有$|Md(x)|=1$,所以$\cup Md(x)=\cap Md(x)$.由定义可知,I 型覆盖粗糙模糊上、下近似和 II 型覆盖粗糙模糊上、下近似分别相等.又由定理 4.1 可知,III 型覆盖粗糙模糊近似介于 I 型和 II 型之间.所以对于任意 $A\subseteq F(U)$,若覆盖 C 是一元的,则 3 种覆盖粗糙模糊集有相同的上、下近似,也即 3 种模型等价.

($\Rightarrow$)首先证明,若 I 型覆盖粗糙模糊集模型和 III 型覆盖粗糙模糊集模型等价,则覆盖 C 是一元的.假设覆盖 C 不是一元的,则$\exists_{x\in U}(|Md(x)|\neq1)$,因此,$Md(x)$中至少有两个元素 K,K'且 $K\neq K'$.令 $y\in K$ 但 $y\notin K',z\in K'$但 $z\notin K$,则$\exists A\subseteq F(U)$(其中,$u_A(y)<u_A(w),w\in K-\{y\},u_A(z)<u_A(v),v\in K'-\{z\}$且 $u_A(y)<u_A(z)$),使得 $u_{\underline{CF(A)}}(x)\le u_A(y)<u_A(z)\le u_{\underline{CT(A)}}(x)$,即 $\underline{CF}(A)\neq\underline{CT}(A)$.也就是说,若覆盖 C 不是一元的,则 I 型覆盖粗糙模糊集模型和 III 型覆盖粗糙模糊集模型不等价.所以,若 I 型覆盖粗糙模糊集模型和 III 型覆盖粗糙模糊集模型等价,则覆盖 C 是一元的.

再证明,若 II 型覆盖粗糙模糊集模型和 III 型覆盖粗糙模糊集模型等价,则覆盖 C 是一元的.假设覆盖 C 不是一元的,则$\exists_{x\in U}(|Md(x)|\neq1)$.令 $K_1,K_2,\ldots,K_n\in Md(x)$,则$\exists A\subseteq F(U)$.对于 $y_i\in K_i\in Md(x)$,若 $y_i\notin CN(x)$,设 $u_A(y_i)<u_A(w)$,$w\in CN(x)$,使得$u_{\underline{CT(A)}}(x)<u_{\underline{CS(A)}}(x)$,即 $\underline{CT}(A)\neq\underline{CS}(A)$.也就是说,若覆盖 C 不是一元的,则 II 型覆盖粗糙模糊集模型和 III 型覆盖粗糙模糊集模型不等价.所以,若 II 型覆盖粗糙模糊集模型和 III 型覆盖粗糙模糊集模型等价,则覆盖 C 是一元的.

所以,3 种模型在给定覆盖近似空间(U,C)中等价,则覆盖 C 是一元的.综上,定理 4.2 成立.证毕. □

由上述分析可知,当覆盖为一元的情况下,已有的两种模型不会出现对象在下近似中不确定可分和上近似中不近似可分的问题.也就是说,已有的两种模型可以应用于某些特定的问题,即覆盖为一元的,这便为两种模型的应用提供了前提条件.而在例 2 中,由于对象 x_2 和 x_3 的最小描述的势都不为 1,即覆盖不是一元的,所以这两种模型不能应用于这种情况.

5 结 论

本文从规则的置信度出发,对覆盖近似空间中模糊概念的近似进行了研究,具体分析了两种覆盖粗糙模糊集模型在上、下近似的定义上存在的不合理性.提出了一种新的覆盖粗糙模糊集模型,修正了上、下近似定义的不合理性,并通过实例说明了本文所提模型的一个实际应用.证明了两个覆盖生成相同覆盖粗糙模糊集的充要条件是它们有相同的约简,为判断两个不同覆盖近似空间的知识分辨能力是否相等提供了理论依据.另外,我

们还讨论了 3 种模型在一般情况下的关系,发现已有两种模型分别是两种极端情况以及它们应用于实际问题的前提条件为覆盖是一元的.这些结论将为覆盖粗糙模糊集模型应用于决策为模糊的情形提供理论基础.

References:

[1] Zadeh LA. Fuzzy sets. Information and Control, 1965,8(3):338−353.

[2] Pawlak Z. Rough sets. Int'l Journal of Computer and Information Sciences, 1982,11(5):341−356.

[3] Dubois D, Prade H. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets. Int'l Journal of General Systems, 1990,17(3,4):191−208.

[4] Dubois D, Prade H. Putting rough sets and fuzzy sets together. In: Slowinski R, ed. Intelligent Decision Support: Handbook of Applications and Advances of the Rough Sets Theory. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1992. 203−222.

[5] Morsi NN, Yakout MM. Axiomatics for fuzzy rough sets. Fuzzy Sets and Systems, 1998,100(1-3):327−342.

[6] Wu WZ, Mi JS, Zhang WX. Generalized fuzzy rough sets. Information Sciences, 2003,151:263−282.

[7] Yeung DS, Chen DG, Tsang ECC, Lee JWT, Wang XZ. On the generalization of fuzzy rough sets. IEEE Trans. on Fuzzy Systems, 2005,13(3):343−361.

[8] Mi JS, Leung Y, Zhao HY, Feng T. Generalized fuzzy rough sets determined by a triangular norm. Information Sciences, 2008, 178(16):3203−3213.

[9] Kuncheva LI. Fuzzy rough sets: Application to feature selection. Fuzzy Sets and Systems, 1992,51(2):147−153.

[10] Jensen R, Shen Q. Fuzzy-Rough attribute reduction with application to Web categorization. Fuzzy Sets and Systems, 2004,141(3): 469−485.

[11] Han B, Gao XB, Ji HB. A shot boundary detection method for news video based on rough-fuzzy sets. Acta Electronica Sinica, 2006, 34(6):1085−1089 (in Chinese with English abstract).

[12] Hu QH, Xie ZX, Yu DR. Hybrid attribute reduction based on a novel fuzzy-rough model and information granulation. Pattern Recognition, 2007,40(12):3509−3521.

[13] Hu QH, Yu DR, Xie ZX. Information-Preserving hybrid data reduction based on fuzzy-rough techniques. Pattern Recognition Letters, 2006,27(5):414−423.

[14] Jensen R, Shen Q. Fuzzy-Rough sets assisted attribute selection. IEEE Trans. on Fuzzy Systems, 2007,15(1):73−89.

[15] Zakowski W. Approximation in the space (U,Π). Demonstratio Mathematica, 1983,16(3):761−769.

[16] Mordeson JN. Rough set theory applied to (fuzzy) ideal theory. Fuzzy Sets and Systems, 2001,121(2):315−324.

[17] Tsang ECC, Chen DG, Lee JWT, Yeung DS. On the upper approximations of covering generalized rough sets. In: Proc. of the 3rd Int'l Conf. on Machine Learning and Cybermetics. Shanghai, 2004. 4200−4203. http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=1384576&isnumber=30161

[18] Zhu W, Wang FY. A new type of covering rough set. In: Proc. of the 3rd Int'l IEEE Conf. on Intelligent Systems. London, 2006. 444−449. http://ieeeis06.wmin.ac.uk/

[19] Zhu W. Topological approaches to covering rough sets. Information Sciences, 2007,177(6):1499−1508.

[20] Zhu W. Relationship between generalized rough sets based on binary relation and covering. Information Sciences, 2009,179(3): 210−225.

[21] Bonikowski Z, Bryniarski E, Wybraniec U. Extensions and intentions in the rough set theory. Information Sciences, 1998,107(1-4): 149−167.

[22] Zhu W, Wang FY. Reduction and axiomization of covering generalized rough sets. Information Sciences, 2003,152:217−230.

[23] Hu J, Wang GY, Fu A. Knowledge reduction of covering approximation space. In: Zhang D, Wang YX, Kinsner W, eds. Proc. of the 6th IEEE Int'l Conf. on Cognitive Informatics (ICCI 2007). IEEE Computer Society Press, 2007. 140−144.

[24] Huang B, He X, Zhou XZ. Rough entropy based on generalized rough sets covering reduction. Journal of Software, 2004,15(2): 215−220 (in English with Chinese abstract). http://www.jos.org.cn/1000-9825/15/215.htm

[25] Hu J, Wang GY, Zhang QH. Uncertainty measure of covering generated rough set. In: Cory JB, Ngoc TN, Yasufumi T, Cheung W, Cheung YM, eds. Proc. of the 2006 IEEE/WIC/ACM Int'l Conf. on Web Intelligence and Intelligent Agent Technology (WI-IAT 2006 Workshops) (WI-IATW 2006). HongKong: IEEE Computer Society Press, 2006. 498−504.

[26] Chen DG, Wang CZ, Hu QH. A new approach to attribute reduction of consistent and inconsistent covering decision systems with covering rough sets. Information Sciences, 2007,177(17):3500−3518.

[27] Wei L, Miao DQ, Xu FF, Xia FC. Research on a covering rough fuzzy set model. Journal of Computer Research and Development, 2006,43(10):1719−1723 (in Chinese with English abstract).

[28] Xu ZY, Liao JQ. On the covering fuzzy rough sets model. Fuzzy Systems and Mathematics, 2006,20(3):141−144 (in Chinese with English abstract).

[29] Feng T, Mi JS, Wu WZ. Covering-Based generalized rough fuzzy sets. In: Wang GY, Peters JF, Skowron A, Yao YY, eds. Proc. of the 1st Int’l Conf. on Rough Sets and Knowledge Technology. Chongqing: Springer-Verlag, 2006. 208−215.

[30] Zhu W. A class of covering-based fuzzy rough sets. In: Lei JS, Yu J, Zhou SG, eds. Proc. of the 4th Int’l Conf. on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery. Haikou: IEEE Computer Society Press, 2007. 7−11.

[31] Hu J, Wang GY. Hierarchical model of covering granular space. Journal of Nanjing University (Natural Sciences), 2008,44(5): 551−558 (in Chinese with English abstract).

[32] Zhu W, Wang FY. Relationships among three types of covering rough sets. In: Zhang YQ, Lin TY, eds. Proc. of the 2006 IEEE Int’l Conf. on Granular Computing (IEEE GrC 2006). Atlanta: IEEE Computer Society Press, 2006. 43−48.

附中文参考文献:

[11] 韩冰,高新波,姬红兵.基于模糊粗糙集的新闻视频镜头边界检测方法.电子学报,2006,34(6):1085−1089.

[27] 魏莱,苗夺谦,徐菲菲,夏富春.基于覆盖的粗糙模糊集模型研究.计算机研究与发展,2006,43(10):1719−1723.

[28] 徐忠印,廖家奇.基于覆盖的模糊粗糙集模型.模糊系统与数学,2006,20(3):141−144.

[31] 胡军,王国胤.覆盖粒度空间的层次模型.南京大学学报(自然科学),2008,44(5):551−558.

胡军(1977－),男,湖北监利人,博士生,讲师,主要研究领域为粗糙集,粒计算,知识获取.

王国胤(1970－),男,博士,教授,博士生导师,CCF 高级会员,主要研究领域为粗糙集理论,粒计算,知识技术,神经网络,数据挖掘.

张清华(1974－),男,博士生,副教授,主要研究领域为粒计算,商空间理论.