

不规则网格上的曲面设计方法*

何军¹, 张彩明^{1,2+}, 杨兴强¹

¹(山东大学 计算机科学与技术学院, 山东 济南 250101)

²(山东经济学院 计算机科学与技术学院, 山东 济南 250014)

Constructing Surface on Irregular Meshes

HE Jun¹, ZHANG Cai-Ming^{1,2+}, YANG Xing-Qiang¹

¹(School of Computer Science and Technology, Shandong University, Ji'nan 250101, China)

²(School of Computer Science and Technology, Shandong Economic University, Ji'nan 250014, China)

+ Corresponding author: E-mail: czhang@sdu.edu.cn

He J, Zhang CM, Yang XQ. Constructing surface on irregular meshes. Journal of Software, 2009,20(6): 1673-1684. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/3393.htm>

Abstract: A method is presented for constructing surfaces on irregular meshes. The basic idea is to extend the B-spline method to irregular meshes through the decomposition and classification of uniform bi-cubic B-spline basis function. Given a quad mesh of control points, a basis function is constructed for each control point. Then the surface is defined by the weighted combination of all the control points using their associated basis functions. This surface is a piecewise bi-cubic rational parametric polynomial surface. It is an extension to uniform B-spline surfaces in the sense that its definition is an analogy of the B-spline surface, and it produces a uniform bi-cubic B-spline surface if the control mesh is a regular quad mesh. Examples are also included to show that the new method can be used to construct surface on irregular meshes effectively.

Key words: irregular mesh; B-spline surface; basis function; piecewise bi-cubic rational parametric polynomial surface

摘要: 提出一种在不规则网格上构造曲面的方法.其基本思想是,通过均匀双三次 B 样条基函数的分解和子基函数的分类,将 B 样条曲面方法推广到任意四边形网格.给定一个任意四边形控制网格,首先对每个控制点构造一个基函数;所有控制点加权组合形成整体曲面.构造的曲面是分片双三次有理参数多项式曲面.此方法可以看成是均匀 B 样条曲面构造方法的扩展,如果控制网格是规则四边形网格,那么构造得到的曲面与均匀双三次 B 样条曲面是一致的.最后,实例证明此方法能够有效地构造曲面.

关键词: 不规则网格; B 样条曲面; 基函数; 分片双三次有理参数多项式曲面

中图法分类号: TP391 文献标识码: A

在 CAGD、自由曲面建模和计算机图形学等领域中,非均匀有理 B 样条(NURBS)曲面得到了广泛的应用,

* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant Nos.60603077, 60633030 (国家自然科学基金); the National Basic Research Program of China under Grant No.2006CB303102 (国家重点基础研究发展计划(973))

Received 2008-01-01; Revised 2008-03-14; Accepted 2008-05-19

并成为表示产品几何形状的工业标准.NURBS 曲面可以通过控制点和权因子方便灵活地控制曲面形状.但是,NURBS 曲面仍然存在局限性,其控制网格是规则四边形网格,不能用于不规则网格,因此不能用于构造任意拓扑结构的曲面,这对动画、游戏和广告设计等应用领域很不方便.

细分曲面为任意拓扑曲面的设计、表示和处理提供了一种有效途径.细分曲面的基本思想可以追溯到 Chaikin 的切角算法^[1].对一个控制多边形反复使用切角算法细化至极限情况,可以得到一条均匀二次 B 样条曲线.随后,Doo-Sabin^[2]和 Catmull-Clark^[3]将该算法推广至曲面,从一个任意拓扑的初始控制网格,使用细分规则进行反复的细化就可以得到曲面.对规则四边形控制网格,Doo-Sabin 细分可以得到均匀双二次 B 样条曲面,而 Catmull-Clark 细分可以得到均匀双三次 B 样条曲面.因此,Doo-Sabin 曲面是双二次 B 样条曲面的扩展,而 Catmull-Clark 则是双三次 B 样条曲面的扩展.

在几何设计和计算机图形学、动画、多分辨率建模以及其他一些工程应用中^[4-7],细分曲面得到了广泛的应用,主要包括经典模式^[8-19]和统一组合模式^[20-26].文献[8,9,27-29]对细分规则进行了理论分析.细分曲面不仅具有 B 样条曲面的各项重要特性,而且还可以应用于任意拓扑网格,描述诸如尖点、折痕、镖形过渡点等不连续的特征,从而成为 NURBS 曲面的有益补充.文献[30,31]对细分曲面作了详细的综述.

但在工业应用中,最常用的表示形式是多项式或者有理多项式,细分曲面的问题就在于通常没有整体解析表示形式,对其分析研究难度较大.Peters^[32]对这个问题作了讨论,使用 Catmull-Clark 细分到某一层次,然后利用一个简单的变换在每个网格上得到 NURBS 面片表示.除了不规则控制点的附近部分,其余面片间满足 C^2 连续,并且与 Catmull-Clark 细分曲面是一致的.

本文提出一种在不规则控制网格上构造有理双三次曲面的方法.通过均匀双三次 B 样条基函数的分解和子基函数的分类,使用类似于 B 样条曲面的方法在不规则控制网格上构造曲面:首先对每一个控制点构造基函数,基函数具有局部性,在其控制区域内取非负值,区域外为 0,然后对控制点作加权组合即可得到曲面.该曲面是分片有理双三次参数多项式曲面.从构造方式来看,新方法是 B 样条曲面方法在任意四边形网格上的推广,具有 NURBS 曲面可灵活控制形状的优点.如果控制网格为规则四边形网格,那么构造的曲面与均匀双三次 B 样条曲面是一致的,从而满足 C^2 连续.为讨论方便,假设给定控制点形成的多边形是四边形网格,反之,可以对原始网格进行一次 Catmull-Clark 细分从而得到四边形网格.

与文献[32]相比,该方法的特色和优点在于,提出了一种均匀双三次 B 样条基函数的分解方法,将 B 样条曲面方法推广到不规则网格,通过对每个控制点构造基函数来构造曲面.思想简单直观,构造过程也更为简化:只需对控制点作加权组合即可.但是,新方法还有许多问题需要进一步研究.

本文第 1 节介绍不规则控制网格上构造新样条曲面的基本思想.基函数的构造将在第 2 节中进行详细讨论.新方法得到的例子在第 3 节中给出.结论和将来的工作在第 4 节中讨论.

1 基本思想

为了方便地将双三次 B 样条基函数推广到任意四边形网格,本节首先对均匀 B 样条基函数进行分解,并对分解后的子基函数的性质进行讨论,然后给出推广的基本思想.

1.1 均匀 B 样条基函数的分解

给定控制点为 $P_{i,j}, 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n$, 均匀双三次 B 样条曲面 $P(u, v)$ 可以表示为

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{i,j} N_{i,3}(u) N_{j,3}(v), \quad u_3 \leq u \leq u_{m+1}, \quad v_3 \leq v \leq v_{n+1} \quad (1)$$

其中, $N_{i,3}(u)$ 是关于参数 u 的均匀三次 B 样条基函数,其节点序列为 $\{u_s = s\}_{s=0}^{s=m+4}, \{v_t = t\}_{t=0}^{t=n+4}$.

$N_{i,3}(u)$ 可以分解为如下 3 个函数: $B_{i,3}^{-1}(u), B_{i,3}^0(u)$ 和 $B_{i,3}^1(u)$, 分别定义如下(如图 1 所示):

$$\begin{aligned}
 B_{i,3}^{-1}(u) &= \begin{cases} \frac{1}{6}(u-i+2)^3, & \text{if } i-2 \leq u \leq i-1 \\ \frac{5}{6}(u-i)^3 + (u-i)^2, & \text{if } i-1 \leq u \leq i \\ 0, & \text{else} \end{cases} \\
 B_{i,3}^0(u) &= \begin{cases} -\frac{4}{3}(u-i)^3 - 2(u-i)^2 + \frac{2}{3}, & \text{if } i-1 \leq u \leq i \\ \frac{4}{3}(u-i)^3 - 2(u-i)^2 + \frac{2}{3}, & \text{if } i \leq u \leq i+1 \\ 0, & \text{else} \end{cases} \\
 B_{i,3}^1(u) &= \begin{cases} -\frac{5}{6}(u-i)^3 + (u-i)^2, & \text{if } i \leq u \leq i+1 \\ \frac{1}{6}(i+2-u)^3, & \text{if } i+1 \leq u \leq i+2 \\ 0, & \text{else} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2}$$

其中, $B_{i,3}^{-1}(u), B_{i,3}^0(u)$ 和 $B_{i,3}^1(u)$ 具有如下性质:

- 局部性,在区间 $(i+l-1, i+l+1)$ 上 $B_{i,3}^l(u) > 0$, 否则 $B_{i,3}^l(u) = 0$;
- 满足 C^1 连续;
- 对 $l=0,1$ 有

$$B_{i,3}^{-1}(i-1) = \frac{1}{6}, \frac{dB_{i,3}^{-1}(i-1)}{du} = \frac{1}{2}, \frac{d^l B_{i,3}^{-1}(i-2)}{du^l} = \frac{d^l B_{i,3}^{-1}(i)}{du^l} = 0 \tag{3}$$

$$B_{i,3}^0(i) = \frac{2}{3}, \frac{dB_{i,3}^0(i)}{du} = 0, \frac{d^l B_{i,3}^0(i-1)}{du^l} = \frac{d^l B_{i,3}^0(i+1)}{du^l} = 0 \tag{4}$$

$$B_{i,3}^1(i+1) = \frac{1}{6}, \frac{dB_{i,3}^1(i+1)}{du} = -\frac{1}{2}, \frac{d^l B_{i,3}^1(i)}{du^l} = \frac{d^l B_{i,3}^1(i+2)}{du^l} = 0 \tag{5}$$

因此,公式(1)可以改写为

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{i,j} W_{i,j}(u, v), \quad u_3 \leq u \leq u_{m+1}, \quad v_3 \leq v \leq v_{n+1} \tag{6}$$

其中, $W_{i,j}(u, v)$ 由公式(7)定义:

$$\begin{aligned}
 W_{i,j}(u, v) &= N_{i,3}(u)N_{j,3}(v) = (B_{i,3}^{-1}(u) + B_{i,3}^0(u) + B_{i,3}^1(u)) (B_{j,3}^{-1}(v) + B_{j,3}^0(v) + B_{j,3}^1(v)) \\
 &= w_{i,j}^{-1,-1}(u, v) + w_{i,j}^{-1,0}(u, v) + w_{i,j}^{-1,1}(u, v) + w_{i,j}^{0,-1}(u, v) + w_{i,j}^{0,0}(u, v) + w_{i,j}^{0,1}(u, v) + w_{i,j}^{1,-1}(u, v) + w_{i,j}^{1,0}(u, v) + w_{i,j}^{1,1}(u, v)
 \end{aligned} \tag{7}$$

其中,

$$\begin{aligned}
 w_{i,j}^{-1,-1}(u, v) &= B_{i,3}^{-1}(u)B_{j,3}^{-1}(v), & w_{i,j}^{-1,0}(u, v) &= B_{i,3}^{-1}(u)B_{j,3}^0(v), & w_{i,j}^{-1,1}(u, v) &= B_{i,3}^{-1}(u)B_{j,3}^1(v) \\
 w_{i,j}^{0,-1}(u, v) &= B_{i,3}^0(u)B_{j,3}^{-1}(v), & w_{i,j}^{0,0}(u, v) &= B_{i,3}^0(u)B_{j,3}^0(v), & w_{i,j}^{0,1}(u, v) &= B_{i,3}^0(u)B_{j,3}^1(v) \\
 w_{i,j}^{1,-1}(u, v) &= B_{i,3}^1(u)B_{j,3}^{-1}(v), & w_{i,j}^{1,0}(u, v) &= B_{i,3}^1(u)B_{j,3}^0(v), & w_{i,j}^{1,1}(u, v) &= B_{i,3}^1(u)B_{j,3}^1(v)
 \end{aligned} \tag{8}$$

分解得到的 9 个函数 $w_{i,j}^{l,k}(u, v), l, k = -1, 0, 1$ 称为子基函数.

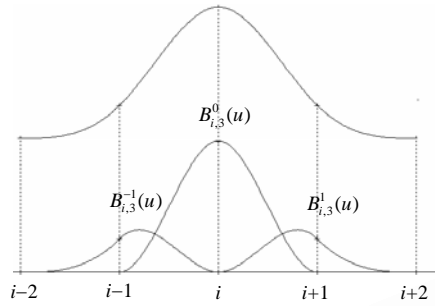


Fig.1 $N_{i,3}(u)$ is decomposed as $B_{i,3}^{-1}(u), B_{i,3}^0(u)$ and $B_{i,3}^1(u)$

图 1 $N_{i,3}(u)$ 分解为 $B_{i,3}^{-1}(u), B_{i,3}^0(u)$ 和 $B_{i,3}^1(u)$

1.2 子基函数 $w_{i,j}^{l,k}(u,v)$ 的分类和性质

根据上一节所述,均匀双三次B样条基函数 $W_{i,j}(u,v)$ 的参数域为 4×4 的正方形网格,其 9 个子基函数 $w_{i,j}^{l,k}(u,v), l,k=-1,0,1$ 都定义在 2×2 的网格上.为了便于推广,根据其插值特性的不同可以分为 3 类: $W_{i,j}(u,v)$ 参数域中心的 $w_{i,j}^{0,0}(u,v)$ 是第 1 类子基函数;4 条边中的 $w_{i,j}^{l,0}(u,v)$ 和 $w_{i,j}^{0,k}(u,v), l,k=-1,1$ 是第 2 类子基函数;4 个角点的 $w_{i,j}^{l,k}(u,v), l,k=-1,1$ 是第 3 类子基函数.图 2 所示为 3 类子基函数的相应控制区域.其中,点区域为第 1 类 $w_{i,j}^{0,0}(u,v)$,横线区域为一个第 2 类子基函数($w_{i,j}^{0,-1}(u,v)$),竖线区域为一个第 3 类子基函数($w_{i,j}^{-1,-1}(u,v)$).

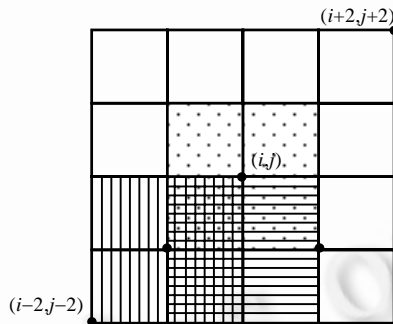


Fig.2 Three regions for $w_{i,j}^{-1,-1}(u,v), w_{i,j}^{0,-1}(u,v)$ and $w_{i,j}^{0,0}(u,v)$

图 2 $w_{i,j}^{-1,-1}(u,v), w_{i,j}^{0,-1}(u,v)$ 和 $w_{i,j}^{0,0}(u,v)$ 的 3 个区域

子基函数 $w_{i,j}^{l,k}(u,v), l,k=-1,0,1$ 的性质如下:

- 1) $w_{i,j}^{l,k}(u,v)$ 具有局部性,在区域 $[i+l-1, i+l+1] \times [j+k-1, j+k+1]$ 上取正值;
- 2) $w_{i,j}^{l,k}(u,v)$ 在整个参数域 $(-\infty, +\infty)^2$ 上 C^1 连续;
- 3) $w_{i,j}^{l,k}(u,v)$ 在其参数域中心点处的值和导数值如下:

a) 对第 1 类子基函数

$$w_{i,j}^{0,0}(i,j) = \frac{4}{9}, \quad \frac{\partial w_{i,j}^{0,0}(i,j)}{\partial u} = \frac{\partial w_{i,j}^{0,0}(i,j)}{\partial v} = 0 \tag{9}$$

b) 对第 2 类子基函数

$$\begin{aligned}
 w_{i,j}^{l,0}(i+l,j) &= w_{i,j}^{0,k}(i,j+k) = \frac{1}{9}, \quad k,l = -1,1 \\
 \frac{\partial w_{i,j}^{l,0}(i+l,j)}{\partial u} &= -\text{sign}(l)\frac{1}{3}, \quad l = -1,1 \\
 \frac{\partial w_{i,j}^{l,0}(i+l,j)}{\partial v} &= 0, \quad l = -1,1 \\
 \frac{\partial w_{i,j}^{0,k}(i,j+k)}{\partial u} &= 0, \quad k = -1,1 \\
 \frac{\partial w_{i,j}^{0,k}(i,j+k)}{\partial v} &= -\text{sign}(k)\frac{1}{3}, \quad k = -1,1
 \end{aligned} \tag{10}$$

c) 对第 3 类子基函数

$$\begin{aligned}
 w_{i,j}^{l,k}(i+l,j+k) &= \frac{1}{36}, \quad l,k = -1,1 \\
 \frac{\partial w_{i,j}^{l,k}(i+l,j+k)}{\partial u} &= -\text{sign}(l)\frac{1}{12}, \quad l,k = -1,1 \\
 \frac{\partial w_{i,j}^{l,k}(i+l,j+k)}{\partial v} &= -\text{sign}(k)\frac{1}{12}, \quad l,k = -1,1
 \end{aligned} \tag{11}$$

1.3 将子基函数推广到任意四边形网格的基本思想

如图 2 所示,在一个规则四边形网格中,每一个内部控制点的度为 4,周围有 8 个控制点,因此,其基函数由 9 个子基函数组成 $w_{i,j}^{l,k}(u,v)$, $l,k = -1,0,1$,而且,每个子基函数的参数域为一个 2×2 的正方形网格.其详细定义可参见公式(8).进一步地,我们可以将这 9 个子基函数分为 3 类.在任意四边形网格中,内部网格点的度不一定等于 4.图 3 给出了四边形网格的一个例子,其中, P_i 点的度为 3,其控制区域如图 3 中点区域对应的参数域所示. P_i 点周围有 $P_{i,j}, j=1,2, \dots, 6$ 这 6 个控制点,那么 P_i 点的基函数(记为 $W_i(u,v)$)应该由 7 个子基函数组成,其中:第 1 类子基函数记为 $w_{i,0}(u,v)$,其对应区域是 P_i 的 1-邻域(本文中,网格顶点的 1-邻域即是与该顶点邻接的四边形组成的区域);第 2 类子基函数记为 $w_{i,j}(u,v), j=1,3,5$,其对应区域分别是 $P_{i,j}, j=1,3,5$ 的 1-邻域;第 3 类子基函数记为 $w_{i,j}(u,v), j=2,4,6$,其对应区域分别是 $P_{i,j}, j=2,4,6$ 的 1-邻域.

同理,推广到任意四边形网格,假定控制点 P_i 的度为 n ,其周围有 n 个四边形和 $2n$ 个控制点 $P_{i,j}, j=1,2, \dots, 2n$,则其基函数 $W_i(u,v)$ 由 $2n+1$ 个子基函数组成,记为 $w_{i,j}(u,v), j=0,1,2, \dots, 2n$.

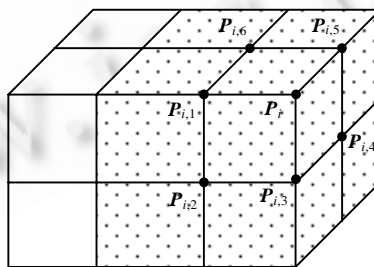


Fig.3 P_i has influence on the dotted region

图 3 P_i 点区域为 P_i 的局部控制区域

2 任意四边形网格上样条曲面的构造

本节中,我们将公式(6)推广到任意四边形网格上样条曲面的构造.给定 $P_i, i=1,2, \dots, m$ 为三维空间中的控制点.不失一般性,假定给定控制点组成四边形网格;否则,对原始控制网格通过一次 Catmull-Clark 细分可以得到四边形网格.图 3 给出了四边形网格的一个例子.

我们的目标是由给定控制点 $P_i, i=1, 2, \dots, m$ 加权组合构造曲面 $P(u, v)$,即对每一个控制点 $P_i, i=1, 2, \dots, m$ 构造类似于公式(7)的基函数.当四边形网格不规则时,由此构造得到的基函数不满足权性,因此,需按下式进行规范化:

$$\varpi_i(u, v) = \frac{W_i(u, v)}{\sum_{j=1}^m W_j(u, v)}$$

从而,曲面可以表示为

$$P(u, v) = \sum_{i=1}^m \varpi_i(u, v) P_i \tag{12}$$

因此,现在问题的关键是基函数 $W_i(u, v)$ 的构造.下面讨论如何构造 $W_i(u, v)$.由第 1.3 节可知,基函数 $W_i(u, v)$ 由 $2n+1$ 个子基函数组成,记为 $w_{i,j}(u, v), j=0, 1, 2, \dots, 2n$.因此在构造 $W_i(u, v)$ 时,本文将在其子基函数参数域上分别构造其 3 类子基函数 $w_{i,j}(u, v)$.

2.1 P_i 处的局部参数化

为了构造子基函数,需要先确定其参数域.由第 1.2 节可知,对于规则的四边形网格,子基函数的参数域为 2×2 的正方形网格,那么推广至任意网格顶点(度等于 n),子基函数的参数域为与该节点邻接的 n 个单位边长的平行四边形.因此,我们对一个网格顶点及其 1-邻域采用局部参数化方法,具体方法是:对一个控制点 P_i ,根据子基函数种类,以该顶点为原点建立 uv 局部坐标系,然后将该控制点的邻接点 $P_{i,j}, j=1, 2, \dots, n$ 均匀映射到局部坐标系中,使得每一个与 P_i 邻接的四边形映射到 uv 参数平面上一个单位边长的平行四边形,从而得到局部参数域.例如,把图 4 所示的子基函数域看成是图 3 中控制点 $P_{i,4}$ 的一个第 3 类子基函数域,建立 uv 坐标系后,把 $P_{i,j}, j=1, 2, \dots, 6$ 均匀映射到该 uv 坐标系时,需要注意的是与 $P_{i,4}$ 对应的 $V_{i,4}$ 应该在 u 轴上(也就是说,以 $V_i, V_{i,4}$ 为 u 轴),此例中 $V_{i,4}$ 在局部坐标系中坐标应为 $(1, 0)$;然后,要使每一个与 P_i 邻接的四边形映射到 uv 参数平面上一个单位边长的平行四边形,从而易得其余控制点的参数坐标.当然,图 4 所示子基函数域也可以看成是其他顶点的某类子基函数域,这时,也可以按照类似方法处理.具体来说,若该子基函数域是第 1 类子基函数域,则以 $V_i, V_{i,1}$ 为 u 轴;若是 $P_{i,j}, j=1, 3, 5$ 的一个第 2 类子基函数域,则以 $V_i, V_{i,j}, j=1, 3, 5$ 为 u 轴.注意,图 4 中参数域中节点 V_i 和 $V_{i,j}$ 分别对应图 3 中网格的顶点 P_i 和 $P_{i,j}, j=1, 2, \dots, 6$. V_i 的度为 3,其邻接的 3 个平行四边形形状相同,且均为单位边长.

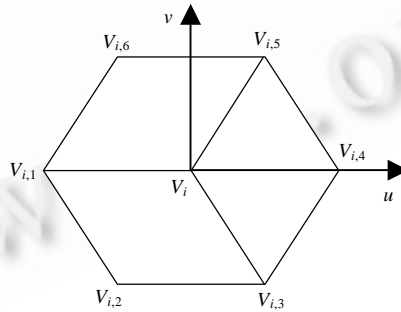


Fig.4 Domain of local parameterization at P_i

图 4 P_i 的局部参数域

2.2 子基函数 $w_{i,j}(u, v)$ 的构造

在一个子基函数参数域上,需要构造相关的多个子基函数.例如,图 4 所示的参数域可以用来构造 P_i 的第 1 类子基函数、 $P_{i,j}, j=1, 3, 5$ 的第 2 类子基函数以及 $P_{i,j}, j=2, 4, 6$ 的第 3 类子基函数.3 类子基函数 $w_{i,j}(u, v), j=0, 1, 2, \dots, 2n$ 的表示形式相同,所以其构造过程和方法也相同.为了表示简单,下文中 3 类子基函数 $w_{i,j}(u, v), j=0, 1, 2, \dots, 2n$ 简记为 $w_i(u, v)$.

注意,如果相应网格顶点的度等于 n ,那么子基函数 $w_i(u, v)$ 定义在由 n 个平行四边形组成的参数域上,当 $n=4$

时(即规则四边形网格的情况,如图 5 所示),子基函数 $w_i(u,v)$ 可由公式(8)给定;当 $n \neq 4$ 时(不规则网格点),本文在其参数域的每个平行四边形上构造分片双三次Hermite插值多项式面片,其插值条件为平行四边形 4 个顶点处的函数值、分别沿两边方向的一阶偏导和混合偏导值,然后, n 个平行四边形上的面片拼接起来即可得到子基函数 $w_i(u,v)$.因此,本节只需要考虑不规则网格点处的子基函数的构造,这时,参数域由 $n, n=3,5,6,7, \dots$ 个平行四边形组成.

其中,不同类型子基函数的区别在于其插值条件的区别.下面以图 6 为例,给出构造该参数域上一个子基函数面片(记为 $\bar{w}_{i,l}(u,v)$)的构造方法,在 $\square V_i V_{i,l} V_{i,l+1} V_{i,l+2}$ 上构造一个双三次 Hermite 插值多项式面片.

(1) 双三次 Hermite 插值多项式面片的定义

令 V 是 $\square V_i V_{i,l} V_{i,l+1} V_{i,l+2}$ 中任意一点(如图 6 所示), S 为 $\square V_i V_{i,l} V_{i,l+1} V_{i,l+2}$ 的面积, α_l 和 β_l 可定义如下:

$$\begin{aligned} \alpha_l &= \frac{2\bar{\alpha}_l}{S} = \frac{1}{S}((v_{i,j} - v_{i,l})u + (u_{i,l} - u_{i,j})v + u_{i,j}v_{i,l} - u_{i,l}v_{i,j}) \\ \beta_l &= \frac{2\bar{\beta}_l}{S} = \frac{1}{S}((v_{i,l+2} - v_{i,j})u + (u_{i,j} - u_{i,l+2})v + u_{i,l+2}v_{i,j} - u_{i,j}v_{i,l+2}) \end{aligned} \tag{13}$$

其中, $\bar{\alpha}_l$ 和 $\bar{\beta}_l$ 分别表示 $\Delta V_i V_{i,l} V$ 和 $\Delta V_i V V_{i,l+2}$ 的面积.

令 $w_i, \partial w_i / \partial u$ 和 $\partial w_i / \partial v$ 分别表示子基函数 $w_i(u,v)$ 在 V_i 点处的函数值、沿 u 和 v 方向的偏导值; σ_l 表示从 V_i 到 $V_{i,l}$ 的方向; τ_l 表示垂直于 σ_l 的方向.其中, $l=1,3, \dots, 2n-1$.那么, $\bar{w}_{i,l}(u,v)$ 可由双三次Hermite多项式表示,具体构造方法如下:

$\square V_i V_{i,l} V_{i,l+1} V_{i,l+2}$ 上的双三次 Hermite 多项式可由平行四边形 4 个顶点处共 16 个插值条件来确定.每个顶点处的条件有:函数值、分别沿两条边方向(σ_l 和 σ_{l+2})的一阶偏导和扭矢.令 $\partial w_i / \partial \sigma_l$ 表示 $w_i(u,v)$ 在 V_i 点处沿 σ_l 方向的一阶导数, A_l 表示该点处的扭矢.由第 1.2 节子基函数的性质(3)可知, $w_i(u,v)$ 在平行四边形两边 $V_{i,l} V_{i,l+1}$ 和 $V_{i,l+1} V_{i,l+2}$ 上的函数值和沿两边方向的方向导数为 0,那么,在 3 个顶点 $V_{i,l} V_{i,l+1}$ 和 $V_{i,l+2}$ 处的函数值、沿两条边的两个一阶导数和扭矢都是 0.因此, $\square V_i V_{i,l} V_{i,l+1} V_{i,l+2}$ 上的双三次 Hermite 插值多项式面片 $\bar{w}_{i,l}(u,v)$ 可定义如下:

$$\bar{w}_{i,l}(u,v) = h_0(\beta_l)h_0(\alpha_l)w_i + h_1(\beta_l)h_0(\alpha_l)\frac{\partial w_i}{\partial \sigma_l} + h_0(\beta_l)h_1(\alpha_l)\frac{\partial w_i}{\partial \sigma_{l+2}} + h_1(\beta_l)h_1(\alpha_l)A_l \tag{14}$$

其中, $l=1,3, \dots, 2n-1$,并且 $h_0(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1, h_1(t) = t^3 - 2t^2 + t$ 是 $[0,1]$ 上的三次Hermite基函数, $w_i, \partial w_i / \partial \sigma_l, \partial w_i / \partial \sigma_{l+2}$ 和 A_l 是待确定的未知量.本文首先在如下步骤(2)、步骤(3)中将 $\partial w_i / \partial \sigma_l, \partial w_i / \partial \sigma_{l+2}$ 和 A_l 的确定归结到 $w_i, \partial w_i / \partial u$ 和 $\partial w_i / \partial v$,然后在第 2.3 节讨论 $w_i, \partial w_i / \partial u$ 和 $\partial w_i / \partial v$ 的确定.

(2) $\partial w_i / \partial \sigma_l, \partial w_i / \partial \sigma_{l+2}$ 的确定

因为 $\bar{w}_{i,l}(u,v)$ 满足 $\partial w_i / \partial u$ 和 $\partial w_i / \partial v$ 在 V_i 点处(这时 $(\alpha_l, \beta_l) = (0,0)$)的边界条件,从而有:

$$\frac{\partial \beta_l}{\partial u} \frac{\partial w_i}{\partial \sigma_l} + \frac{\partial \alpha_l}{\partial u} \frac{\partial w_i}{\partial \sigma_{l+2}} = S \frac{\partial w_i}{\partial u}, \quad \frac{\partial \beta_l}{\partial v} \frac{\partial w_i}{\partial \sigma_l} + \frac{\partial \alpha_l}{\partial v} \frac{\partial w_i}{\partial \sigma_{l+2}} = S \frac{\partial w_i}{\partial v} \tag{15}$$

由公式(13),将 α_l, β_l 代入公式(15),整理得:

$$(v_{i,l+2} - v_i) \frac{\partial w_i}{\partial \sigma_l} + (v_i - v_{i,l}) \frac{\partial w_i}{\partial \sigma_{l+2}} = S \frac{\partial w_i}{\partial u}, \quad (u_i - u_{i,l+2}) \frac{\partial w_i}{\partial \sigma_l} + (u_{i,l} - u_i) \frac{\partial w_i}{\partial \sigma_{l+2}} = S \frac{\partial w_i}{\partial v} \tag{16}$$

解方程组(16)可以得到:

$$\frac{\partial w_i}{\partial \sigma_l} = (u_{i,l} - u_i) \frac{\partial w_i}{\partial u} + (v_{i,l} - v_i) \frac{\partial w_i}{\partial v}, \quad \frac{\partial w_i}{\partial \sigma_{l+2}} = (u_{i,l+2} - u_i) \frac{\partial w_i}{\partial u} + (v_{i,l+2} - v_i) \frac{\partial w_i}{\partial v} \tag{17}$$

从而, $\partial w_i / \partial \sigma_l, \partial w_i / \partial \sigma_{l+2}$ 可由 $\partial w_i / \partial u, \partial w_i / \partial v$ 得到.

(3) A_l 的确定

对于 A_l 的确定,考虑两个邻接的双三次多项式面片 $\bar{w}_{i,l-2}(u,v)$ 和 $\bar{w}_{i,l}(u,v), l=1,3, \dots, 2n-1$ (其中, $\bar{w}_{i,2n+1}(u,v) = \bar{w}_{i,l}(u,v)$)满足如下条件:

$$\frac{\partial \bar{w}_{i,l-2}(u,v)}{\partial \tau_l} \Big|_{\substack{\alpha_{l-2}=1/2 \\ \beta_{l-2}=0}} = \frac{\partial \bar{w}_{i,l}(u,v)}{\partial \tau_l} \Big|_{\substack{\alpha_l=0 \\ \beta_l=1/2}} \tag{18}$$

其中, $\frac{\partial \alpha_{l-2}}{\partial \tau_l} = -\frac{\partial \beta_l}{\partial \tau_l} = -\frac{\cos \theta}{S}$, $\frac{\partial \alpha_l}{\partial \tau_l} = -\frac{\partial \beta_{l-2}}{\partial \tau_l} = -\frac{1}{S}$.

分别整理公式(18)的左、右边:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}_{i,l-2}(u,v)}{\partial \tau_l} \Big|_{\substack{\alpha_{l-2}=1/2 \\ \beta_{l-2}=0}} &= -\frac{3\cos \theta}{2S} w_i - \frac{1}{2S} \frac{\partial w_i}{\partial \sigma_{l-2}} + \frac{\cos \theta}{4S} \frac{\partial w_i}{\partial \sigma_l} - \frac{A_{l-2}}{8S}, \\ \frac{\partial \bar{w}_{i,l}(u,v)}{\partial \tau_l} \Big|_{\substack{\alpha_l=0 \\ \beta_l=1/2}} &= \frac{3\cos \theta}{2S} w_i + \frac{\cos \theta}{4S} \frac{\partial w_i}{\partial \sigma_l} - \frac{1}{2S} \frac{\partial w_i}{\partial \sigma_{l+2}} - \frac{A_l}{8S}. \end{aligned}$$

从而,由公式(18)得到关于 A_l 的方程组:

$$A_{l-2} + A_l = -24\cos \theta w_i - 4 \left[\frac{\partial w_i}{\partial \sigma_{l-2}} + \cos \theta \frac{\partial w_i}{\partial \sigma_l} + \frac{\partial w_i}{\partial \sigma_{l+2}} \right], l = 1, 3, \dots, 2n - 1 \tag{19}$$

将公式(17)代入方程组(19),然后求解此方程组,可以将 A_l 表示成 $w_i, \partial w_i / \partial u$ 和 $\partial w_i / \partial v$ 的表达式.而在求解方程组(19)时,若 n 为奇数,则方程组(19)有唯一解;当 n 为偶数时,若方程组有解则解不唯一(当 $n=4$ 时,直接使用公式(8)中的子基函数).接下来,对 n 为偶数情况,本文将讨论 $n=6$ 时方程组的求解方法.类似地,可以求解 $n=2k, k \geq 4$ 的情况.

对 $n=6$ 的第1类子基函数,考虑到 $A_1=A_3=A_5=A_7=A_9=A_{11}$,因此,求解方程组(19)得到 A_l ;对第2类子基函数,考虑将 $A_5=A_7$ 加入方程组(19),因此, A_l 可唯一确定;对其第3类子基函数, $A_l(l=1,3,\dots,11)$ 可通过极小化 $A_1^2 + A_3^2 + \dots + A_{11}^2$ 来确定.

步骤(2)和步骤(3)分别将 $\partial w_i / \partial \sigma_l, \partial w_i / \partial \sigma_{l+2}$ 和 A_l 的确定归结到 $w_i, \partial w_i / \partial u$ 和 $\partial w_i / \partial v$.因此,只要确定 $w_i, \partial w_i / \partial u$ 和 $\partial w_i / \partial v$,即可由公式(14)在子基函数参数域的每个平行四边形上都构造一个双三次Hermite插值多项式面片,然后面片拼合起来得到 $w_i(u,v)$,下一节讨论如何确定 $w_i, \partial w_i / \partial u$ 和 $\partial w_i / \partial v$.

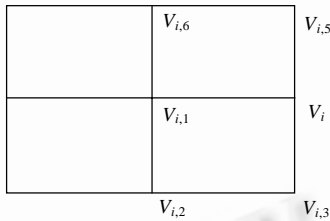


Fig.5 Parametric domain of regular control point
图5 规则控制点的参数域

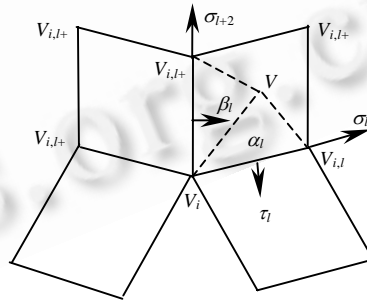


Fig.6 Parametric domain of $w_i(u,v)$
图6 $w_i(u,v)$ 的参数域

2.3 $w_i, \partial w_i / \partial u$ 和 $\partial w_i / \partial v$ 的确定

很自然地,作为B样条曲面的扩展, $w_i, \partial w_i / \partial u$ 和 $\partial w_i / \partial v$ 的值应当根据第1.2节中公式(9)~公式(11)(即均匀双三次B样条曲面子基函数的性质3(a)~性质3(c))来确定.从而得到

- 1) 对第1类子基函数,由公式(9): $w_i=4/9, \partial w_i / \partial u = \partial w_i / \partial v = 0$.
- 2) 对第2类子基函数,由公式(10): $w_i=1/9, \partial w_i / \partial u = 1/3, \partial w_i / \partial v = 0$.
- 3) 对第3类子基函数,由公式(11): $w_i=1/36, \partial w_i / \partial u = 1/(12\cos(\theta/2)), \partial w_i / \partial v = 0$.

但是作为基函数,需满足 $w_i(u,v) \geq 0$.然而当 $n \neq 4$ 时,使用上述值所确定的第2类和第3类子基函数在其参数域内可能出现负值.为了解决这个问题,本文通过调整 $\partial w_i / \partial u$ 的值使子基函数非负.附录给出了 $n=3,5,6,7$ 时第2类

和第 3 类子基函数构造时使用的 $\partial w_i / \partial u$ 值.

2.4 样条曲面的计算

根据公式(12),对控制点作加权组合即可得到曲面.计算中,从参数域上对每个四边形进行计算.每个参数域的四边形上,使用基函数对相应的控制点作加权组合得到曲面.

令任意四边形网格表示为 $M = \{V, F\}$, $V = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ 为网格顶点集合, $F = \{f_1, f_2, \dots, f_q\}$ 为网格四边形集合, $f_i = [p_1^i, p_2^i, p_3^i, p_4^i]$, $i = 1, 2, \dots, q$. 其中, m 为网格顶点数, q 为四边形数. 那么, M 上的样条曲面的计算如下:

- 1) $i = 1$.
- 2) 对 f_i , 参数域内对应一个平行四边形, 应用公式(13)将其规范化为 $[0, 1] \times [0, 1]$, 令 $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$, 在顶点 p_j^i 的第 1 类子基函数的对应面片上计算 $(u, v) = (0, 0)$ 点处的值, 记为 $w_j^1(u, v)$, $j = 1, 2, 3, 4$.
- 3) 对 f_i 的 1-邻域上的顶点(四边形的 1-邻域是与该四边形的每个顶点邻接的四边形组成的区域), 对与 p_j^i 邻接的点, 计算其对应的第 2 类子基函数面片, 记为 $w_j^2(u, v)$, $j = 1, 3, \dots$;
对与 p_j^i 不邻接的点, 计算其对应的第 3 类子基函数面片, 记为 $w_j^3(u, v)$, $j = 2, 4, \dots$
- 4) 规范化计算的基函数值, 并以此为权对相应控制点作加权组合.
- 5) If $v + step < 1$, 计算下一个点 $(u, v + step)$,
else if $u + step < 1$, 计算 $(u + step, 0)$
else 转步骤 6).
- 6) If $i < q$, 则 $i++$, 转步骤 2).
else 计算结束.

其中, $step$ 为计算的参数步长, 与绘制曲面时采样密度有关. 因为对不同度数的顶点的所有子基函数都是事先构造好的, 而对参数域内一个点 (u, v) 的计算与 B 样条曲线曲面的计算相似, 因此, 曲面绘制时的计算量只与 $step$ 的取值有关.

3 实例

用本文所得的基函数可在各种网格上构造样条曲面, 图 7 为几个典型的控制网格和构造的曲面.

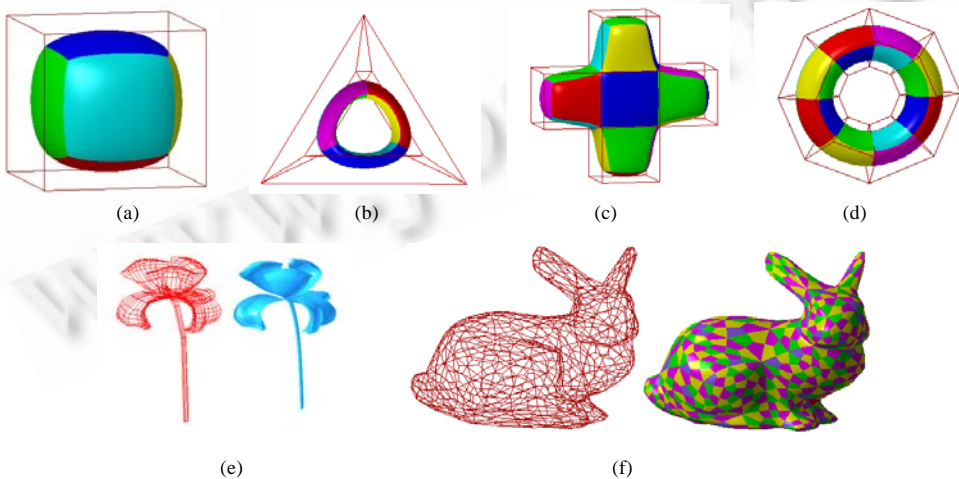


Fig.7 Examples

图 7 实例

其中, 图 7(a)~图 7(d)中网格为控制网格; 图 7(e)和图 7(f)中由于网格较为复杂, 将控制网格和曲面分开显示: 左边

为控制网格,右边为构造得到的曲面.另外,除了图 7(e)以外,在绘制曲面时,对应参数域上一个四边形的面片用一种颜色来绘制,相邻面片使用不同颜色.

图 7(b)、图 7(d)中网格点的度均为 4,是规则的四边形网格,所以,所得曲面与 B 样条曲面是一致的,从而是 C^2 连续的.而图 7(a)、图 7(c)、图 7(e)和图 7(f)中均含有不规则点(度不为 4 的点),从图中可以看出,在不规则点处构造的曲面也具有很好的形状.

图 7(a)~图 7(d)和图 7(f)是闭网格,根据新方法,在网络的每个四边形上构造曲面;而图 7(e)是开网格,在网络的边界处我们采取与 B 样条方法相同的处理方法:在子基函数定义不全的四边形上,不构造曲面.

网格图 7(e)有 722 个点、591 个四边形,图 7(f)有 842 个点、840 个四边形.可以看出,对于较为复杂的网格,新方法也能够有效地构造曲面.而且,由本文所述曲面构造方法,对不同度数的网格顶点预先构造出的子基函数可适用于所有网格,构造曲面所需要的计算与 B 样条曲面的计算方法类似,不会带来额外的复杂度.

4 结论与今后工作

将 B 样条曲面方法扩展至任意四边形网格,本文提出一种在任意四边形网格上构造样条曲面的方法.由于一次 Catmull-Clark 细分可将任意网格细分成四边形网格,因此,该方法可以在任意多边形网格上构造 B 样条曲面.如果控制网格是规则四边形网格,则该方法构造的是均匀双三次 B 样条曲面;如果是不规则四边形网格,则所构造的是分片双三次有理参数多项式曲面.由于该方法可以在任意多边形网格上构造 B 样条曲面,因此具有更好的造型灵活性.

与文献[32]一样,本文方法解决的是任意控制网格上曲面的构造问题,而且在网络的规则区域得到的都是均匀 B 样条曲面.与文献[32]相比,该方法的特色和优点在于,通过采用一种双三次 B 样条基函数的分解方法,将 B 样条曲面方法推广到不规则网格,通过构造基函数来构造曲面,思想简单直观,构造过程也更为简化,只需对控制点作加权组合即可.对不同度数的网格顶点,预先构造出的子基函数适用于所有网格,构造曲面所需要的计算与 B 样条曲面的计算方法类似,不会带来额外的复杂度.三角网格或细分曲面虽然在动画或游戏设计中已得到广泛应用,但它们不能使设计者像使用 B-样条技术一样进行设计,本文的重要目的之一是给动画或游戏等设计人员提供一个工具,可以像使用 B-样条技术那样基于任意网格进行设计.

本文对任意四边形网格上 B 样条曲面的构造问题作了初步的研究,还有许多问题需要进一步深入研究.我们下一步要研究的主要问题有:(1) 如何构造基函数,使构造曲面在非规则四边形区域上达到 C^1 连续,进一步达到 C^2 连续;(2) 如何构造基函数,使其具有更合理的形状;(3) 任意四边形 B 样条曲面的快速计算;(4) 具有二次多项式插值精度的任意四边形网格划分,即如果给定的数据点是二次曲面上的点,则网格划分时增加的点也在二次曲面上.

References:

- [1] Joy KI. Chaikin's algorithm for curves. On-Line Geometric Modeling Notes, 2000. <http://www.idav.ucdavis.edu/education/CAGDNotes/Chaikins-Algorithm/Chaikins-Algorithm.html>
- [2] Doo D, Sabin M. Behaviour of recursive division surfaces near extraordinary points. Computer Aided Design, 1978,10:356-360.
- [3] Catmull E, Clark J. Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes. Computer Aided Design, 1978,10:350-355.
- [4] DeRose T, Kass M, Truong T. Subdivision surfaces in character animation. In: Proc. of the ACM SIGGRAPH 1998. 1998. 85-94 <http://doi.acm.org/10.1145/280814.280826>
- [5] Sabin MA. Subdivision surfaces. In: Farin GE, Hoschek J, Kim MS, eds. Proc. of the Handbook of Computer Aided Geometric Design. New York: North Holland, 2002. 309-325.
- [6] Sabin MA. Recent progress in subdivision——A survey. In: Dodgson N, Floater and MS, Sabin M, eds. Advances in Multiresolution for Geometric Modelling. Berlin: Springer-Verlag, 2004.

- [7] Warren J, Weimer H. *Subdivision Methods for Geometric Design, A Constructive Approach*. Boston: Morgan Kaufmann Publishers, 2002.
- [8] Peters J, Reif U. Analysis of algorithms generalizing B-spline subdivision. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1998,35(2): 728–748.
- [9] Habib A, Warren J. Edge and vertex insertion for a class of C^1 subdivision surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 1999,16: 223–247.
- [10] Zorin D. Smoothness of subdivision on irregular meshes. *Constructive Approximation*, 2000,16(3):359–397.
- [11] Dyn N, Levin D, Gregory JA. A butterfly subdivision scheme for surface interpolation with tension control. *ACM Trans. on Graph*, 1990,9(2):160–169.
- [12] Kobbelt L. Interpolatory subdivision on open quadrilateral nets with arbitrary topology. *Computer Graphics Forum (Eurographics'96)*, 1996,15(3):409–420.
- [13] Kobbelt L. $\sqrt{3}$ -subdivision. In: *Proc. of the ACM SIGGRAPH Computer Graphics*. 2000. 103–112.
- [14] Labisk U, Greiner G. Interpolatory $\sqrt{3}$ -subdivision. *Computer Graph Forum (EUROGRAPHICS 2000)*, 2000,19(3):131–138.
- [15] Li G, Ma W, Bao H. $\sqrt{2}$ subdivision for quadrilateral meshes. *The Visual Computer*, 2004,20(2-3):180–198.
- [16] Li G, Ma W, Bao H. Interpolatory $\sqrt{2}$ -subdivision surfaces. In: *Proc. of the GMP: Geometric Modeling and Processing—Theory and Applications*. California: IEEE Computer Press, 2004. 185–194.
- [17] Loop C. Smooth subdivision surfaces based on triangles [MS. Thesis]. University of Utah, 1987.
- [18] Velho L, Zorin D. 4–8 subdivision. *Computer Aided Geometric Design, Special Issue Subdivision Technology*, 2001,18(5): 397–427.
- [19] Zorin D, Schröder P, Sweldens W. Interpolating subdivision for meshes with arbitrary topology. In: *Proc. of the ACM SIGGRAPH Computer Graphics*. 1996. 189–192.
- [20] Oswald P, Schröder P. Composite primal/dual $\sqrt{3}$ -subdivision schemes. *Computer Aided Geometric Design*, 2003,20(2):135–164.
- [21] Sederberg TW, Zheng J, Sewell D, Sabin M. Non-Uniform recursive subdivision surfaces. In: *Proc. of the ACM SIGGRAPH Computer Graphics*. 1998. 387–394.
- [22] Stam J. On subdivision schemes generalizing uniform B-spline surfaces of arbitrary degree. *Computer Aided Geometric Design*, 2001,18(5):383–396.
- [23] Stam J, Loop C. Quad/Triangle subdivision. *Computer Graph Forum*, 2003,22(1):1–7.
- [24] Warren J, Schaefer S. A factored approach to subdivision surfaces. *Computer Graph Application*, 2004,24(3):74–81.
- [25] Halstead M, Kass M, DeRose T. Efficient, fair interpolation using catmull-clark surfaces. In: *Proc. of the SIGGRAPH 1993 Conf. ACM SIGGRAPH*, 1993. 35–44.
- [26] Zorin D, Schröder P. A unified framework for primal/dual quadrilateral subdivision scheme. *Computer Aided Geometric Design*, 2001,18(5):429–454.
- [27] Reif U. A unified approach to subdivision algorithms near extraordinary points. *Computer Aided Geometric Design*, 1995,12: 153–174.
- [28] Schweitzer JE. Analysis and application of subdivision surfaces [Ph.D. Thesis]. Seattle: University of Washington, 1996.
- [29] Zorin D. A method for analysis of C^1 -continuity of subdivision surfaces. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2000,37(5): 1677–1708.
- [30] Zorin D, Schröder P. Subdivision for modeling and animation. In: *ACM SIGGRAPH Course Notes*. 2000.
- [31] Ma W. Subdivision surface for CAD—An overview. *Computer-Aided Design*, 2005,37:693–709.
- [32] Peters J. Patching Catmull-Clark meshes. In: Akeley K, ed. *Proc. of the SIGGRAPH 2000, Computer Graphics*. 2000. 255–258.

附录. $\partial w_i / \partial u$ 值的调整

对 $n=3,5,6,7$, 通过调整 $\partial w_i / \partial u$ 的值, 可以保证子基函数非负. 通过推导, 得到的部分 $\partial w_i / \partial u$ 值列出如下:

1) 当 $n=3$ 时, 第 2 类和第 3 类子基函数分别使用的 $\partial w_i / \partial u$ 值为

$$\frac{\partial w_i}{\partial u} = \frac{5}{27}, \quad \frac{\partial w_i}{\partial u} = \frac{1}{12}.$$

2) 当 $n=5$ 时,第2类和第3类子基函数分别使用的 $\partial w_i/\partial u$ 值为

$$\frac{\partial w_i}{\partial u} = \frac{8-2\sqrt{5}}{27\sqrt{5}-45}, \quad \frac{\partial w_i}{\partial u} = \frac{\sqrt{5}-4}{9\sqrt{5}-45}.$$

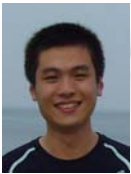
3) 当 $n=6$ 时,第2类和第3类子基函数分别使用的 $\partial w_i/\partial u$ 值为

$$\frac{\partial w_i}{\partial u} = \frac{2}{9}, \quad \frac{\partial w_i}{\partial u} = \frac{\sqrt{3}}{18}.$$

4) 当 $n=7$ 时,第2类和第3类子基函数分别使用的 $\partial w_i/\partial u$ 值为

$$\frac{\partial w_i}{\partial u} = \frac{3-4\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)}{18\left(1-2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+2\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)-\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)\right)},$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial u} = \frac{3-4\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)}{12\left(3-2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{9\pi}{7}\right)\right)}.$$



何军(1982—),男,山东莱芜人,博士生,主要研究领域为计算机辅助几何设计,计算机图形学.



杨兴强(1964—),男,博士,教授,CCF 高级会员,主要研究领域为计算机辅助几何设计,计算机图形学,医学图像处理.



张彩明(1955—),男,博士,教授,博士生导师,CCF 高级会员,主要研究领域为计算机辅助几何设计,计算机图形学,信息可视化,医学图像处理.