

# $G^1$ 连续几何偏微分方程 Bézier 曲面的构造\*

徐国良<sup>+</sup>, 李明

(中国科学院 数学与系统科学研究院 计算数学研究所 LSEC, 北京 100190)

## Construction of Geometric PDE Bézier Surface with $G^1$ Continuity

XU Guo-Liang<sup>+</sup>, LI Ming

(LSEC, Institute of Computational Mathematics, Academy of Mathematics and System Science, The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

+ Corresponding author: E-mail: xuguo@lsec.cc.ac.cn

**Xu GL, Li M. Construction of geometric PDE Bézier surface with  $G^1$  continuity. *Journal of Software*, 2008,19(Suppl.):161-172. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/19/s161.htm>**

**Abstract:** Basing on discretizations of Laplace-Beltrami operator and Gaussian curvature over triangular and quadrilateral meshes and their convergence analyses, this paper proposes in this paper a novel approach for constructing geometric partial differential equation (PDE) Bézier surfaces, using several fourth order geometric flows. Both three-sided and four-sided Bézier surface patches are constructed with  $G^1$  boundary constraint conditions. Convergence properties of the proposed method are numerically investigated, which justify that the method is effective and mathematically correct.

**Key words:** Bézier surface; discretization; geometric partial differential equation;  $G^1$  continuity; operator

**摘要:** 基于三角形和四边形网格上 Laplace-Beltrami 算子、高斯曲率和平均曲率的离散及其收敛性分析,提出了一种使用四阶几何流构造几何偏微分方程 Bézier 曲面的方法.使用该方法构造出的 Bézier 曲面既具有几何偏微分方程曲面的最优性质,同时又满足  $G^1$  连续性.算法收敛性的数值实验表明该方法是有效的.

**关键词:** Bézier 曲面;离散化;几何偏微分方程; $G^1$  连续性;算子

所谓几何偏微分方程(partial differential equation,简称 PDE)曲面,是指满足某种几何 PDE 的曲面.由于几何 PDE 曲面有某种最优性质(如面积最小,总平均曲率极小,总高斯曲率极小等)而受到人们的喜爱.几何 PDE 一般是非线性的,构造几何 PDE 曲面不是一个平凡的问题,过去我们在构造离散(三角形网格)几何 PDE 曲面方面进行了研究,关于使用有限差分方法可参考文献[1-3],关于使用有限元方法可参考文献[4,5].

Bézier 曲线和曲面的历史可以追溯到 1959 年,当时任职于法国雪铁龙公司的一位年轻的数学家 De Casteljau 首次使用 Bernstein 多项式定义曲线和曲面,开创了曲线曲面设计的逼近方法;不久,法国雷诺公司的 Pierre Bézier 也独立地提出并发展了 Bézier 曲线和曲面(详见文献[6]).之后,Bézier 曲线曲面得到了迅速的发展并被广泛应用到工业设计中.在复杂曲面设计中,经常需要将多张 Bézier 曲面片拼接起来,并且要求拼接处达到一定的连续性.常用的有参数连续性和几何连续性.几何连续性由 Barsky<sup>[7]</sup>提出,在实践中逐步代替了参数连续性.常用的几何连续性是  $G^1$  连续性,关于相邻 Bézier 曲面的  $G^1$  连续性可参考文献[8,9].

\* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60773165 (国家自然科学基金); the National Basic Research Program of China under Grant No.2004CB318000 (国家重点基础研究发展计划(973))

Received 2008-05-03; Accepted 2008-11-14

最早用于曲面构造的 PDE 是双调和方程,并且已经被广泛应用于曲面拼接、曲面恢复和交互式曲面设计等领域中(见文献[10–13]).双调和方程是线性的,便于求解.但是双调和方程不是几何 PDE,并且一般定义在矩形区域上,具有一定的局限性.最简单的几何 PDE 是平均曲率流,已经被应用在曲面除噪和曲面光滑中(参见文献[4,14–16]).由于平均曲率流在边界处不能达到  $G^1$  连续性,于是人们开始考虑使用四阶几何流,如 Willmore 流、曲面扩散流等(见文献[1,17–19]).

由于 Bézier 曲面的良好性质,本文考虑用几何 PDE 来确定 Bézier 曲面的具体形状,产生具有某种最优性质的 Bézier 曲面片.比如 Willmore Bézier 曲面片具有总平方平均曲率最小的性质;Bézier 极小曲面片具有面积最小的性质等.我们使用四阶几何 PDE 来实现边界处的  $G^1$  连续性.在给出 Bézier 曲面片的边界控制点(边界曲线的控制点)和次边界控制点(与边界控制点相邻的控制点)的条件下,用插值确定初始内部控制点,接着用四阶几何流对内部控制点进行演化,最终得到最优的 Bézier 曲面片.

本文第 1 节介绍建立几何 PDE 方法所必须的基础知识,包括微分几何方面的基础和所使用的几何 PDE 等.第 2 节详细阐述几何 PDE Bézier 曲面的构造方法,内容包括微分算子的离散化、Bézier 曲面控制点的确定和演化方法等.第 3 节对所提出的方法进行收敛性数值实验并给出若干几何 PDE Bézier 曲面的例子.第 4 节说明使用 Bézier 曲面一些固有限制.最后一节总结全文.

## 1 预备知识

本节概述下文中用到符号和基本知识,其中包括一些微分几何的基础知识、微分算子和 Bézier 曲面的定义,以及本文所使用的几何 PDE 等方面的内容.

### 1.1 参数曲面的微分几何

为简单起见,假设我们所考虑的是一个充分光滑的、正则可定向的参数曲面:

$$S := x(u^1, u^2) \in R^3, (u^1, u^2) \in D \subset R^2.$$

设  $g_{\alpha\beta} = \langle x_{u^\alpha}, x_{u^\beta} \rangle, b_{\alpha\beta} = \langle n, x_{u^\alpha u^\beta} \rangle$  分别表示曲面  $S$  的第一、第二基本形式的系数,其中

$$x_{u^\alpha} = \frac{\partial x}{\partial u^\alpha}, x_{u^\alpha u^\beta} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}, \alpha, \beta = 1, 2, n = (x_u \times x_v) / \|x_u \times x_v\|, (u, v) = (u^1, u^2),$$

符号  $\langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|$  和  $\cdot \times \cdot$  分别表示欧几里德空间中的标准内积、范数和外积.令

$$[g^{\alpha\beta}] = [g_{\alpha\beta}]^{-1}, [b^{\alpha\beta}] = [b_{\alpha\beta}]^{-1}, g = \det[g_{\alpha\beta}], b = \det[b_{\alpha\beta}],$$

使用这些记号,可以引入曲面  $S$  的平均曲率  $H$  和高斯曲率  $K$ :

$$H = \frac{1}{2} [g^{\alpha\beta}] : [b_{\alpha\beta}], K = \frac{b}{g} \quad (1)$$

其中符号  $A:B$  表示  $A^T B$  的迹.令  $H = Hn, K = Kn$ , 它们分别称为平均曲率法向和高斯曲率法向.

下面引入几个本文要用到的曲面上的微分算子.

**切梯度算子.** 假设  $f \in C^1(S)$ , 作用到  $f$  上的梯度算子  $\nabla_S$  定义为

$$\nabla_S f = [x_u, x_v] [g^{\alpha\beta}] [f_u, f_v]^T \in R^3 \quad (2)$$

**切散度算子.** 假设  $v$  是曲面  $S$  上的一个光滑向量场, 作用到  $v$  的切散度算子定义为

$$\operatorname{div}_S(v) = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[ \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right] \left[ \sqrt{g} [g^{\alpha\beta}] [x_u, x_v]^T v \right] \quad (3)$$

**Laplace-Beltrami 算子(LBO).** 假设  $f \in C^2(S)$  作用到  $f$  上的 Laplace-Beltrami 算子  $\Delta_S$  定义为(见文献[20])

$$\Delta_S f = \operatorname{div}_S(\nabla_S f).$$

由式(2)和式(3)可推知:

$$\Delta_S f = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[ \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right] \left[ \sqrt{g} [g^{\alpha\beta}] [f_u, f_v]^T \right] \quad (4)$$

$$\Delta_S f = g_u^\Delta f_u + g_v^\Delta f_v + g_{uu}^\Delta f_{uu} + g_{uv}^\Delta f_{uv} + g_{vv}^\Delta f_{vv} \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} g_u^\Delta &= -(\mathfrak{g}_{11}(\mathfrak{g}_{22}\mathfrak{g}_{122} - \mathfrak{g}_{12}\mathfrak{g}_{222}) + 2\mathfrak{g}_{12}(\mathfrak{g}_{12}\mathfrak{g}_{212} - \mathfrak{g}_{22}\mathfrak{g}_{112}) + \mathfrak{g}_{22}(\mathfrak{g}_{22}\mathfrak{g}_{111} - \mathfrak{g}_{12}\mathfrak{g}_{211}))/g^2, \\ g_v^\Delta &= -(\mathfrak{g}_{11}(\mathfrak{g}_{11}\mathfrak{g}_{222} - \mathfrak{g}_{12}\mathfrak{g}_{122}) + 2\mathfrak{g}_{12}(\mathfrak{g}_{12}\mathfrak{g}_{112} - \mathfrak{g}_{11}\mathfrak{g}_{212}) + \mathfrak{g}_{22}(\mathfrak{g}_{11}\mathfrak{g}_{211} - \mathfrak{g}_{12}\mathfrak{g}_{111}))/g^2, \\ g_{uu}^\Delta &= \mathfrak{g}_{22}/g, \quad g_{vv}^\Delta = \mathfrak{g}_{11}/g, \quad g_{uv}^\Delta = -2\mathfrak{g}_{12}/g. \end{aligned}$$

显然,  $\Delta_S$  是一个二阶微分算子. LBO 与平均曲率法向之间有如下关系  $\Delta_S x = 2H$ .

## 1.2 Bézier 曲面

**四边 Bézier 曲面.** 对于给定的非负整数  $n$ , 设

$$B_i^n(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i}, \quad t \in [0, 1], \quad i = 0, \dots, n$$

为  $n$  次 Bernstein 多项式的基函数, 那么  $(m, n)$  次四边 Bézier 曲面定义为

$$x(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v), \quad (u, v) \in \Omega := [0, 1]^2,$$

其中,  $P_{ij} \in \mathbb{R}^3$  称为曲面  $x(u, v)$  的控制点. 当  $i=0$  或  $m, j=0$  或  $n$  时,  $P_{ij}$  称为边界控制点, 与边界控制点相邻的控制点, 称为次边界控制点.

**三边 Bézier 曲面.** 对于给定的非负整数  $n$ , 设

$$B_{ijk}^n(t) = \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k, \quad (u, v, w) \in [0, 1]^3, \quad u + v + w = 1, \quad i + j + k = n$$

为  $n$  次 Bernstein-Bézier 多项式的基函数, 那么  $n$  次三边 Bézier 曲面定义为

$$x(u, v, w) = \sum_{i+j+k=n} P_{ijk} B_{ijk}^n(u, v, w), \quad (u, v, w) \in \Omega^3 := [0, 1]^3,$$

其中,  $P_{ijk}$  称为曲面  $x(u, v, w)$  的控制点. 当  $i=0$  或  $j=0$  或  $k=0$  时,  $P_{ijk}$  称为边界控制点, 类似地, 与边界控制点相邻的控制点, 称为次边界控制点.

## 1.3 所用的几何 PDE

为了构造  $G^1$  连续的曲面片, 我们使用四阶几何 PDE. 下面引入 3 个本文使用的四阶几何 PDE.

**曲面扩散流(SDF).** 设  $S_0$  是  $\mathbb{R}^3$  中的紧的可定向的曲面. 曲面扩散流(见文献[18, 19])就是寻找  $\mathbb{R}^3$  中一族光滑可定向曲面  $\{S(t); t \geq 0\}$ , 使其满足下面的方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = -2[\Delta_S H]n, & S(0) = S_0 \\ \partial S(t) = \Gamma \end{cases} \quad (6)$$

**Willmore 流(WF).** Willmore 流定义为如下的方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = -[\Delta_S H + 2H(H^2 - K)]n, & S(0) = S_0 \\ \partial S(t) = \Gamma \end{cases} \quad (7)$$

满足方程  $\Delta_S H + 2H(H^2 - K) = 0$  的曲面被称为 Willmore 曲面, 它是如下泛函的临界点(见文献[21]):

$$E(s) := \int_S H^2 dA.$$

Willmore 流演化时导致总平方平均曲率减少.

**拟曲面扩散流(QSDF).** 拟曲面扩散流(见文献[1])定义如下:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = -\Delta_S^2 x, & S(0) = S_0 \\ \partial S(t) = \Gamma \end{cases} \quad (8)$$

拟曲面扩散流是面积缩减的.

## 2 几何 PDE Bézier 曲面的构造

问题的描述:给定三边或四边 Bézier 曲面的边界曲线以及边界上的切方向,构造三边或四边 Bézier 曲面片,使其插值给定的边界条件且满足指定的几何偏微分方程.

几何 PDE Bézier 曲面的构造步骤.

现在我们描述几何 PDE Bézier 曲面的构造步骤,每一步的具体实现在下几小节中给出.

(i) 离散所用的微分几何算子:分别在三角形和四边形网格上离散 Laplace-Beltrami 算子和高斯曲率(详见第 2.1 节和第 2.2 节).

(ii) 构造次边界控制点:从给定的边界处的切向量,计算次边界控制点(详见第 2.3 节).如果给定边界条件已经含有次边界控制点,那么这一步可以省略.

(iii) 构造初始内部控制点:初始内部控制点可以是任意给定的.但为了使下一步的演化效率更高,好的初始内部控制点的选取是非常重要的.我们知道,当次数趋于无穷大时,Bézier 曲面的控制多边形收敛于 Bézier 曲面,所以 Bézier 曲面的控制多边形可以视为 Bézier 曲面的逼近.因此,为了得到几何 PDE 曲面的初始逼近,我们用相应的几何 PDE 来构造初始内部控制点(详见第 2.4 节).

(iv) 演化初始内部控制点:用指定的几何 PDE 演化初始内部控制点,直到稳定状态.我们用时间方向半隐式、空间方向半离散的数值方法来求解相应的几何 PDE(详见第 2.5 节).

### 2.1 Laplace-Beltrami算子的离散化

为了在三边和四边曲面片上数值求解几何 PDE,需在三角形和四边形网格上离散 Laplace-Beltrami 算子.下面就三角形网格和四边形网格各引入一种离散格式.它们形式简洁,容易计算,而且具有我们所需要的逼近性质.

三角形网格上 Laplace-Beltrami 算子的离散化.关于三角形网格上 Laplace-Beltrami 算子的离散化,我们采用由 Desbrun 等人提出的格式(见文献[15,22]):

$$\Delta_s f(x_i) \approx \frac{3}{A(x_i)} \sum_{j \in N(i)} \frac{\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}}{2} [f(x_j) - f(x_i)] \tag{9}$$

其中, $N(i)$ 是顶点  $x_i$  的一环邻居顶点的指标集, $\alpha_{ij}$  和  $\beta_{ij}$  如图 1(a)所示, $A(x_i)$ 是包围顶点  $x_i$  的全部三角形的面积和.

我们使用此离散格式的原因是在“某些”条件下,该离散格式是二阶收敛的.而在本文中,我们的 Bézier 曲面离散化恰好满足所谓的“某些”条件.下面引述我们曾经证明的结果(详见文献[23]).

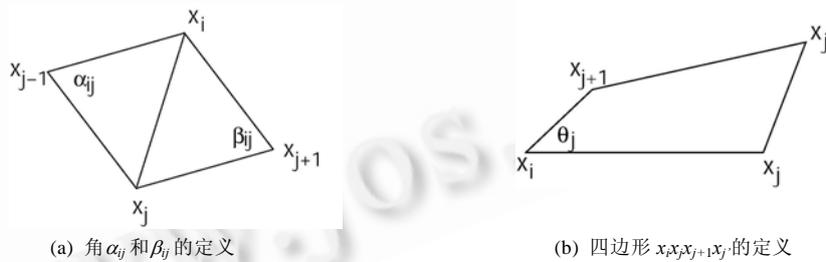


图 1

**定理 2.1.** 设  $x_i$  是三角形网格  $M$  的一个价为 6 的顶点, $x_1, \dots, x_6$  是它的 6 个邻居点.假设  $x_i$  和  $x_j (j=1, \dots, 6)$  位于一个充分光滑的参数曲面  $F(u, v) \in \mathbb{R}^3$  上, $f(x)$  是  $F(u, v)$  上充分光滑的函数,并且存在  $q_i, q_1, \dots, q_6 \in \mathbb{R}^2$  使得

$$x_i = F(q_i), x_j = F(q_j), \text{ 且 } q_j = q_{j-1} + q_{j+1} - q_i, \quad j = 1, \dots, 6 \tag{10}$$

那么,

$$\frac{3}{A(x_i, h)} \sum_{j=1}^6 \frac{\cot \alpha_j(h) + \cot \beta_j(h)}{2} [f(x_j(h)) - f(x_i)] = \Delta_S f(x_i) + O(h^2) \quad (11)$$

其中,

$$x_j(h) = F(q_j(h)), \quad q_j(h) = q_i + h(q_j - q_i), \quad j = 1, \dots, 6 \quad (12)$$

$A(x_i, h)$  是三角形  $[x_1, x_j(h), x_{1+1}(h)]$  的面积的和,  $\alpha_j(h)$  和  $\beta_j(h)$  如公式(9)中那样由顶点  $x_j(h)$  定义.

**四边形网格上 Laplace-Beltrami 算子的离散化.**

设  $x_i$  为一个四边形网格的顶点,  $[x_i, x_j, x_{j+1}, x_{j'}]$  为与  $x_i$  相邻的四边形, 那么在文献[24]中我们提出如下离散格式:

$$\Delta_S f(x_i) \approx \frac{4}{A(x_i)} \sum_j [\gamma_j [f(x_{j'}) - f(x_i)] + \alpha_j [f(x_j) - f(x_i)] + \beta_{j+1} [f(x_{j+1}) - f(x_i)]] \quad (13)$$

其中,

$$A(x_i) = \sum_j A_j, \quad A_j = \sqrt{\|S_u\|^2 \|S_v\|^2 - \langle S_u, S_v \rangle^2}, \quad \alpha_j = \frac{\|S_u\|^2 - \|S_v\|^2}{4A_j}, \quad \beta_{j+1} = \frac{\|S_v\|^2 - \|S_u\|^2}{4A_j}, \quad \gamma_{j'} = \frac{\|S_u - S_v\|^2}{4A_j},$$

$$S_u = \frac{1}{2}(x_{j+1} - x_i) + \frac{1}{2}(x_{j'} - x_j), \quad S_v = \frac{1}{2}(x_j - x_i) + \frac{1}{2}(x_{j'} - x_{j+1}).$$

关于此离散格式, 我们在文献[24]中证明了如下结果:

**定理 2.2.** 设  $x_i$  是四边形网格  $M$  的一个价为 4 的顶点,  $x_1, \dots, x_4$  是它的 4 个邻居点,  $x_{j'} (j'=1, \dots, 4)$  是四边形  $[x_i, x_j, x_{j+1}, x_{j'}]$  中与  $x_i$  相对的点. 假设  $x_i, x_j$  和  $x_{j'} (j'=1, \dots, 4)$  位于一个充分光滑的参数曲面  $F(u, v) \in \mathbb{R}^3$  上,  $f(x)$  是  $F(u, v)$  上充分光滑的函数, 且存在  $q_i, q_1, \dots, q_4, q_1', \dots, q_4' \in \mathbb{R}^2$  使得

$$x_i = F(q_i), \quad x_j = F(q_j), \quad x_{j'} = F(q_{j'}), \quad q_{j'} = q_j + q_{j+1} - q_i, \quad j = 1, \dots, 4, \quad q_{j+2} - q_j = -(q_j - q_i), \quad j = 1, 2 \quad (14)$$

那么,

$$\frac{4}{A(x_i, h)} \sum_j [\gamma_{j'}(h) [f(x_{j'}(h)) - f(x_i)] + \alpha_j(h) [f(x_j(h)) - f(x_i)] + \beta_{j+1}(h) [f(x_{j+1}(h)) - f(x_i)]]$$

$$= \Delta_S f(x_i) + O(h^2), \text{ 当 } h \rightarrow 0 \quad (15)$$

其中,

$$x_j = F(q_j(h)), \quad q_j(h) = q_i + h(q_j - q_i), \quad j = 1, \dots, 4, \quad 1', \dots, 4' \quad (16)$$

$A(x_i, h), \alpha_j(h), \beta_{j+1}(h)$  和  $\gamma_{j'}(h)$  由顶点集  $x_j(h), x_{j+1}(h)$  和  $x_{j'}(h)$  按公式(13)中的定义给出.

由等式  $\Delta_S x = 2Hn$  我们容易从 Laplace-Beltrami 算子的离散格式得到平均曲率的逼近格式.

## 2.2 高斯曲率的离散化

为了在三边和四边曲面片上数值求解几何 PDE, 需分别计算三角形和四边形网格的近似高斯曲率. 下面就三角形网格和四边形网格各引入一种离散格式. 它们也形式简洁, 容易计算, 具有我们所需要的逼近性质.

**三角形网格上高斯曲率的估计.** 使用高斯-Bonnet 定理, 容易得到高斯曲率的下述离散逼近(见文献[22]):

$$K(x_i) = \frac{3(2\pi - \sum \theta_j)}{A(x_i)} \quad (17)$$

其中,  $A(x_i)$  是三角形  $[x_i, x_j, x_{j+1}]$  的面积的和,  $\theta_j$  是角  $\angle x_i x_j x_{j+1}$ . 关于该离散格式的收敛性, 我们在文献[26]中曾证明了如下结果:

**定理 2.3.** 设  $x_i$  是三角形网格  $M$  的一个价为 6 的顶点,  $x_1, \dots, x_6$  是它的 6 个邻居点. 那么在定理 2.1 的条件下, 我们有:

$$\frac{3}{A(x_i, h)} [2\pi - \sum_{j=1}^6 \theta_j(h)] = K(x_i) + O(h^2), \text{ 当 } h \rightarrow 0 \quad (18)$$

**四边形网格上高斯曲率的估计.** 现在我们考虑基于高斯-Bonnet 定理的高斯曲率  $K$  的离散化. 设  $M$  是参数曲面  $F(u, v) \in \mathbb{R}^3$  的一个四边形网格,  $\{x_i\}$  是  $M$  的顶点集. 令  $N(i) = \{1, 2, \dots, n\}$  表示顶点  $x_i$  的一环邻居点的指标集.  $[x_i, x_j, x_{j+1}, x_{j+n}]$  是  $M$  中与顶点  $x_i$  相邻的四边形,  $x_{j+n}$  是  $[x_i, x_j, x_{j+1}, x_{j+n}]$  中与顶点  $x_i$  相对的点. 在文献[26]中, 我们提出了如

下的离散格式:

$$K(x_i) = \frac{4}{A(x_i)} \left[ 2\pi - \sum_{j=1}^n \frac{\theta_j + \alpha_j + \beta_j}{2} \right] \quad (19)$$

其中,

$$\theta_j = \angle x_j x_i x_{j+1}, \quad \alpha_j = \angle x_{j+1} x_i x_{j+n}, \quad \beta_j = \angle x_{j+n} x_i x_j.$$

如图 2 所示.

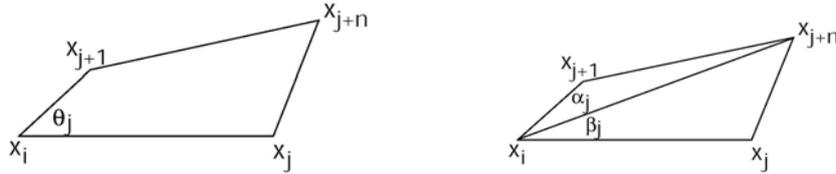


图 2 角  $\theta_j, \alpha_j(h)$  和  $\beta_j(h)$  的定义

关于该格式的收敛性,我们在文献[26]中证明了如下结果:

**定理 2.4.** 在定理 2.2 的条件下,我们有,

$$\frac{4}{A(x_i, h)} \left[ 2\pi - \sum_{j=1}^n \frac{\theta_j(h) + \alpha_j(h) + \beta_j(h)}{2} \right] = K(x_i) + O(h^2), \text{ 当 } h \rightarrow 0 \quad (20)$$

上述 4 个定理中的收敛性条件是相同的.即与离散曲面对应的参数域上的离散点满足平行四边形条件(见公式(10)和公式(14)).在稍后关于三边和四边 Bézier 曲面片的离散化中,该平行四边形条件恰好满足.这是十分令人欣慰的.因为人们通常认为加于网格本身的收敛性条件或许比加于参数域上的收敛性条件更容易使用.本文的研究表明,实际情况可能恰好相反.

### 2.3 次边界控制点的构造

因为要构造的曲面片为指定次数的 Bézier 曲面,所以给定的边界曲线也是相应次数的 Bézier 曲线.对于四边 Bézier 曲面,要给定边界控制点为

$$P_{0j}, P_{mj}, P_{i0}, P_{in}, i = 0, \dots, m, j = 0, \dots, n.$$

除此之外,还要给定 4 条边上的切向量.它们也是  $n$  次 Bézier 曲线形式.设与边  $u=0$  和  $u=1$  对应的  $v$ -方向的切向量 Bézier 曲线分别为

$$V^0(v) = \sum_{j=0}^n v_j^0 B_j^n(v), \quad V^1(v) = \sum_{j=0}^n v_j^1 B_j^n(v),$$

与边  $v=0$  和  $v=1$  对应  $u$ -方向的切向量 Bézier 曲线分别为

$$U^0(u) = \sum_{i=0}^m u_i^0 B_i^m(u), \quad U^1(u) = \sum_{i=0}^m u_i^1 B_i^m(u).$$

为了与给定的 4 条边界曲线相容,它们的系数要满足:

$$\begin{aligned} v_0^{(0)} &= m(P_{10} - P_{00}), & u_0^{(0)} &= n(P_{01} - P_{00}), \\ v_0^{(1)} &= m(P_{m0} - P_{m-1,0}), & u_m^{(0)} &= n(P_{m1} - P_{m0}), \\ v_n^{(0)} &= m(P_{1n} - P_{0n}), & u_0^{(1)} &= n(P_{0n} - P_{0,n-1}), \\ v_n^{(1)} &= m(P_{mn} - P_{m-1,n}), & u_m^{(1)} &= n(P_{mn} - P_{m,n-1}). \end{aligned}$$

即这 8 个系数由边界曲线确定.由

$$\frac{\partial x(u, v)}{\partial u} \Big|_{u=0} = m \sum_{j=0}^n (P_{1j} - P_{0j}) B_j^n(v) = V^{(0)}(v),$$

我们立刻可以确定次边界控点  $P_{1j}$ :

$$P_{1j} = \frac{1}{m} v_j^{(0)} + P_{0j}, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

其他 3 组次边界控制点类似地确定,但是不难看出,与四角点相邻的 4 个次边界控制点分别被确定两次.为了使这两次所定的次边界控制点是相同的,与四角点相邻的切向量曲线的控制点要满足如下的条件:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} v_1^{(0)} + P_{01} &= \frac{1}{n} u_1^{(0)} + P_{10}, & -\frac{1}{m} v_1^{(1)} + P_{m1} &= \frac{1}{n} u_{m-1}^{(0)} + P_{m-1,0}, \\ \frac{1}{m} v_{n-1}^{(0)} + P_{0,n-1} &= -\frac{1}{n} u_1^{(1)} + P_{1n}, & -\frac{1}{m} v_{n-1}^{(1)} + P_{m,n-1} &= -\frac{1}{n} u_{m-1}^{(1)} + P_{m-1,n}. \end{aligned}$$

如果所给的切向量曲线的控制点不满足这些条件,说明它们不是适当给定的.此时,我们把角点附近的 4 个次边界控制点分别取为两次确定的值的平均值.即

$$\begin{aligned} P_{11} &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{m} v_1^{(0)} + P_{01} \right) + \left( \frac{1}{n} u_1^{(0)} + P_{10} \right) \right], \\ P_{m-1,1} &= \frac{1}{2} \left[ \left( -\frac{1}{m} v_1^{(1)} + P_{m1} \right) + \left( \frac{1}{n} u_{m-1}^{(0)} + P_{m-1,0} \right) \right], \\ P_{1,n-1} &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{m} v_{n-1}^{(0)} + P_{0,n-1} \right) + \left( -\frac{1}{n} u_1^{(1)} + P_{1n} \right) \right], \\ P_{m-1,n-1} &= \frac{1}{2} \left[ \left( -\frac{1}{m} v_{n-1}^{(1)} + P_{m,n-1} \right) + \left( -\frac{1}{n} u_{m-1}^{(1)} + P_{m-1,n} \right) \right]. \end{aligned}$$

#### 2.4 初始内部控制点的构造

构造初始内部控制点的初始值.为了用相应的几何 PDE 来构造初始内部控制点,我们还需要给出初始内部控制点的初始值.对于四边 Bézier 曲面,该初始值可由已有的边界控制点以及次边界控制点在  $u$  和  $v$  方向分别作 3 次插值,再平均得到.即

$$P_{ij}^{(0)} = \frac{1}{2} (P_{ij}^{(u)} + P_{ij}^{(v)}), \quad i = 2, \dots, m-2, \quad j = 2, \dots, n-2.$$

其中,

$$\begin{aligned} P_{ij}^{(u)} &= \frac{(i-1)(i-m+1)}{m-1} \left( \frac{m-i}{m} P_{0j} + \frac{i}{m} P_{mj} \right) + \frac{i(m-i)}{m-1} \left( \frac{m-i-1}{m-2} P_{1j} + \frac{i-1}{m-2} P_{m-1,j} \right), \\ P_{ij}^{(v)} &= \frac{(j-1)(j-n+1)}{n-1} \left( \frac{n-j}{n} P_{i0} + \frac{j}{n} P_{in} \right) + \frac{j(n-j)}{n-1} \left( \frac{n-j-1}{n-2} P_{i1} + \frac{j-1}{n-2} P_{i,n-1} \right), \end{aligned}$$

或者只用边界控制点作线性插值再平均得到.

对于三边 Bézier 曲面,初始内部控制点的初始值可由已有的边界控制点以及次边界控制点在  $u, v$  和  $w$  三个方向分别作 3 次插值,再平均得到(具体细节略).

演化初始内部控制点的初始值.为了用几何 PDE 演化初始内部控制点,我们离散所用的几何 PDE,对于每一个初始内部控制点构造一个线性方程.具体如下:设  $P_{ij}^{(k)}$  为在时刻  $t=k\tau$  时的方程的离散解,现在要获得在时刻  $t=(k+1)\tau$  时的方程的离散解  $P_{ij}^{(k+1)}$ .现在在四边形网格上离散 Willmore 流的离散化为例进行说明.首先,对于控制点的二维排序法,我们把公式(13)重新写为

$$\Delta_S f(P_{ij}) \approx \sum_{\mu=-1,1} \sum_{\nu=-1,1} [\gamma_{i+\mu, j+\nu} [f(P_{i+\mu, j+\nu}) - f(P_{ij})] + \alpha_{i+\mu, j} [f(P_{i+\mu, j}) - f(P_{ij})] + \beta_{i, j+\nu} [f(P_{i, j+\nu}) - f(P_{ij})]] \quad (21)$$

于是方程(7)的左端逼近如下:

$$\frac{\partial P}{\partial t} \approx \frac{P_{ij}^{(k+1)} - P_{ij}^{(k)}}{\tau} \quad (22)$$

方程(7)的右端的第 1 项逼近为

$$\Delta_S Hn \approx \sum_{\mu=-1,1} \sum_{\nu=-1,1} n(P_{ij}^{(k)}) [\gamma_{i+\mu, j+\nu} [H(P_{i+\mu, j+\nu}^{(k+1)}) - H(P_{ij}^{(k+1)})] + \alpha_{i+\mu, j} [H(P_{i+\mu, j}^{(k+1)}) - H(P_{ij}^{(k+1)})] + \beta_{i, j+\nu} [H(P_{i, j+\nu}^{(k+1)}) - H(P_{ij}^{(k+1)})]] \quad (23)$$

其中  $n(P_{ij}^{(k)})H(P_{qr}^{(k+1)})$  进一步离散为

$$n(P_{ij}^{(k)})H(P_{qr}^{(k+1)}) \approx \frac{1}{2} n(P_{ij}^{(k)}) n(P_{qr}^{(k)})^T \Delta_S P_{qr}^{(k+1)} \quad (24)$$

而  $\Delta_S P_{ij}^{(k+1)}$  再用公式(21)逼近:

$$\Delta_S P_{ij}^{(k+1)} \approx \sum_{\mu=-1,1} \sum_{\nu=-1,1} [\gamma_{i+\mu, j+\nu} [P_{i+\mu, j+\nu}^{(k+1)} - P_{ij}^{(k+1)}] + \alpha_{i+\mu, j} [P_{i+\mu, j}^{(k+1)} - P_{ij}^{(k+1)}] + \beta_{i, j+\nu} [P_{i, j+\nu}^{(k+1)} - P_{ij}^{(k+1)}]] \quad (25)$$

公式(24)中的法向量由曲面  $S^{(k)}(u, v)$  计算. 这里  $S^{(k)}(u, v)$  为由控制点  $\{P_{ij}^{(k)}\}$  所定义的曲面. 此时, 这些控制点是已知的. 方程(7)的右端的第 2 项逼近为

$$2H(H^2 - K)n \approx [H^2(P_{ij}^{(k)}) - K(P_{ij}^{(k)})] \Delta_S P_{ij}^{(k+1)} \quad (26)$$

而  $\Delta_S P_{qr}^{(k+1)}$  再由式(25)的右端逼近. 式(26)右端的平均曲率及高斯曲率分别由公式(13)和式(19)计算. 将这些逼近式代入到方程(7)中, 我们得到一个关于未知量  $P_{ij}^{(k+1)}$  的线性系统. 求解该系统便得到诸  $P_{ij}^{(k+1)}$ . 重复这一过程, 我们得到  $P_{ij}^{(k+2)}, P_{ij}^{(k+3)}, \dots, P_{ij}^{(l)}$ , 使得

$$\max_{ij} \|p_{ij}^{(l-1)} - p_{ij}^{(l)}\| < \tau \varepsilon,$$

$\varepsilon$  是一指定的精度控制常数. 因为初始内部控制点仅仅是为下一步准备初始值, 没有必要非常精确. 所以  $\varepsilon$  没有必要取得很小, 我们取  $\varepsilon=0.01$ .

对于三边曲面片, 情况是类似的, 但是所使用的四边形网格上的 Laplace-Beltrami 算子的离散格式以及高斯曲率的计算格式要换成三角形网格上的相应的离散格式. 为了节省篇幅, 我们略去细节.

### 2.5 内部控制的构造

我们先考虑四边曲面片的构造. 首先我们把参数域  $\Omega=[0,1]^2$  进行均匀剖分. 记剖分点为

$$(u_i, v_j) = \left( \frac{i}{M}, \frac{j}{N} \right), i = 0, 1, \dots, M, j = 0, 1, \dots, N,$$

我们假定

$$M \geq m, N \geq n. \text{ 记 } x_{ij} = S(u_i, v_j),$$

其中  $x(u, v)$  是要确定的 Bézier 曲面片. 对于参数域上的每一剖分点

$$(u_i, v_j), i = 2, 3, \dots, M - 2, j = 2, 3, \dots, N - 2,$$

离散所用的几何 PDE, 以构造一个以  $x(u, v)$  的内部控制点为未知量的线性系统. 现以方程(7)为例予以说明. 设

$$S^{(k)}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n p_{ij}^{(k)} B_i^m(u) B_j^n(v)$$

为在时刻  $t=k\tau$  时几何 PDE 的解, 我们要构造下一时刻  $t=(k+1)\tau$  的解  $S^{(k+1)}(u, v)$ . 记  $x_{ij}^{(k)} = S^{(k)}(u_i, v_j)$ , 那么在  $(u_i, v_j)$  处, 方程(7)的左端逼近如下:

$$\frac{\partial x}{\partial t} \approx \frac{x_{ij}^{(k+1)} - x_{ij}^{(k)}}{\tau} \quad (27)$$

方程(7)的右端的第 1 项逼近为

$$\Delta_S Hn \approx \sum_{\mu=-1,1} \sum_{\nu=-1,1} n(x_{ij}^{(k)}) [\gamma_{i+\mu, j+\nu} [H(x_{i+\mu, j+\nu}^{(k+1)}) - H(x_{ij}^{(k+1)})] + \alpha_{i+\mu, j} [H(x_{i+\mu, j}^{(k+1)}) - H(x_{ij}^{(k+1)})] + \beta_{i, j+\nu} [H(x_{i, j+\nu}^{(k+1)}) - H(x_{ij}^{(k+1)})]] \quad (28)$$

其中的  $\alpha, \beta$  和  $\gamma$  分别为式(13)中相应的系数乘以和符号前的系数,  $n(x_{ij}^{(k)})H(x_{qr}^{(k+1)})$  进一步逼近为

$$n(x_{ij}^{(k)})H(x_{qr}^{(k+1)}) \approx \frac{1}{2} n(x_{ij}^{(k)}) n(x_{qr}^{(k)})^T \Delta_S x_{qr}^{(k+1)} \quad (29)$$

而  $\Delta_S x_{qr}^{(k+1)}$  再用它的精确表达式计算(见文献[3]).需指出的是,此时需计算:

$$S_u^{(k+1)}(u_q, v_r), S_v^{(k+1)}(u_q, v_r), S_{uu}^{(k+1)}(u_q, v_r), S_{uv}^{(k+1)}(u_q, v_r), S_{vv}^{(k+1)}(u_q, v_r),$$

这些量以及式(27)中的  $x_{ij}^{(k+1)} := S^{(k+1)}(u_i, v_j)$  均是  $P_{ij}^{(k+1)}$  的线性组合.  $\Delta_S x_{qr}^{(k+1)}$  中的组合系数  $g_u^\Delta, g_v^\Delta, g_{uu}^\Delta, g_{uv}^\Delta$  和  $g_{vv}^\Delta$  利用已知的  $S^{(k)}(u_i, v_j)$  计算(见文献[3]).方程(7)的右端的第 2 项逼近为

$$2H(H^2 - K)n \approx [H^2(x_{ij}^{(k)}) - K(x_{ij}^{(k)})] \Delta_S x_{ij}^{(k+1)} \quad (30)$$

而  $\Delta_S x_{ij}^{(k+1)}$  同样由它的精确表达式计算.上式右端的平均曲率及高斯曲率分别由它们的精确公式从曲面  $S^{(k)}$  计算.将这些逼近式代入到方程(7),我们得到一个关于  $P_{ij}^{(k+1)}$  的线性系统.再把与边界控制点和次边界控制点有关的项移到方程的右端,则得到一个关于未知量  $P_{ij}^{(k+1)}$  ( $i=2, \dots, m-2, j=2, \dots, n-2$ ) 的线性系统.如果  $M>0$  或  $N>0$ , 该系统的方程的个数大于未知量的个数,故系统是超定的.此时我们求它的最小二乘解.即求解超定系统的法方程.这样便得到诸  $P_{ij}^{(k+1)}$ .重复这一过程,我们得到  $P_{ij}^{(k+2)}, P_{ij}^{(k+3)}, \dots, P_{ij}^{(l)}$ , 使得

$$\max_{ij} \|p_{ij}^{(l-1)} - p_{ij}^{(l)}\| < \tau \varepsilon,$$

其中,  $\varepsilon$  是一指定的精度控制常数,我们取  $\varepsilon=10^{-5}$ .所导出的线性系统的系数矩阵是非稀疏的,我们用直接法求解.

注意,在上述离散化中,某些量的计算使用了前一时间步的解,故该离散是半隐式的.再注意到,关于  $\Delta_S x$  计算没有使用离散格式,而是使用了  $\Delta_S x$  的解析表示,这样的离散化方法我们称之为半离散.对于三边曲面片,情况是完全平行的,只是所使用的四边形网格上的 Laplace-Beltrami 算子的离散格式以及高斯曲率的计算格式要换成相应的三角形网格上的离散格式.为了节省篇幅,我们略去细节.

### 3 收敛性的数值实验与图例

因为所使用的几何 PDE 是高度非线性的,理论上证明我们的数值求解方法的收敛性是极端困难的.本节通过数值计算说明,所提出的方法确实是收敛的.为达此目的,我们需选用精确满足几何 PDE 的模型作为逼近的对象.我们计算当  $n=4, 6, \dots$  离散解与精确解之间的最大误差,以考察它们的渐进性质.

例 1: 设  $S$  是一球面,则

$$\Delta_S H = 0, H^2 - K = 0,$$

所以球面是曲面扩散流和 Willmore 流的稳态解.本例中,我们分别用曲面扩散流和 Willmore 流演化的 6 个四边 Bézier 曲面来逼近球面.即计算 Bézier PDE 曲面对于球面的逼近误差,以说明所提出的方法是有效的.结果见表 1 的第 2 列及第 3 列.

例 2: 设  $S$  是一环面,它是一个圆心在  $(R, 0, 0)$ , 半径为  $r$  的  $xy$ -平面上的圆周绕  $z$  轴旋转  $360^\circ$  而形成的曲面.当  $R/r = \sqrt{2}$  时,  $S$  是 Willmore 流的稳态解.现在我们用 8 个四边 Willmore Bézier 曲面来逼近  $S$ , 以考察当  $n$  增大时, Willmore Bézier 曲面逼近性质.结果见表 1 的第 4 列.

例 3: 设  $S$  是一圆柱面,它的平均曲率是非零的常数,高斯曲率为 0.所以它是曲面扩散流的稳态解,但不是 Willmore 流的稳态解.现在我们用两个四边曲面扩散流演化的 Bézier 曲面来逼近  $S$ , 结果见表 1 的第 5 列.

例 4: 设  $S$  是一由方程:

$$x(u, v) = [3u(1+v^2) - u^3, 3v(1+u^2) - v^3, 3(u^2 - v^2)]$$

定义的极小曲面.它的平均曲率是 0, 但高斯曲率不为 0.所以它是曲面扩散流、拟曲面扩散流以及 Willmore 流的稳态解.现在我们分别用曲面扩散流、Willmore 流和拟曲面扩散流演化的四边 Bézier 曲面来逼近  $S$ , 结果见表 1 的第 6~8 列.从表中的数据可以看出,当  $n$  增大时,最大逼近误差是下降的.这说明,我们所提出的数值方法是有效的,数值解渐近于精确解.

为了说明所构造的 PDE Bézier 曲面在边界处达到  $G^1$  连续性,下面再给出几个图例.

表 1 渐近最大误差

$N$	球面-SDF	球面-WF	环面-WF	柱面-SDF	极小-SDF	极小-WF	极小-QSDF
4	4.857e-02	4.849e-02	1.104e+00	1.561e+00	1.816e-01	1.881e-01	1.846e-01
6	3.401e-02	3.397e-02	7.384e-01	1.044e+00	1.253e-01	1.329e-01	1.316e-01
8	2.618e-02	2.616e-02	5.545e-01	7.841e-01	9.547e-02	1.025e-01	1.008e-01
10	2.120e-02	2.120e-02	4.438e-01	6.277e-01	7.673e-02	8.286e-02	8.120e-02
12	1.782e-02	1.781e-02	3.700e-01	5.232e-01	6.254e-02	6.934e-02	6.781e-02
14	1.537e-02	1.536e-02	3.172e-01	4.486e-01	5.333e-02	5.953e-02	5.819e-02



图 3

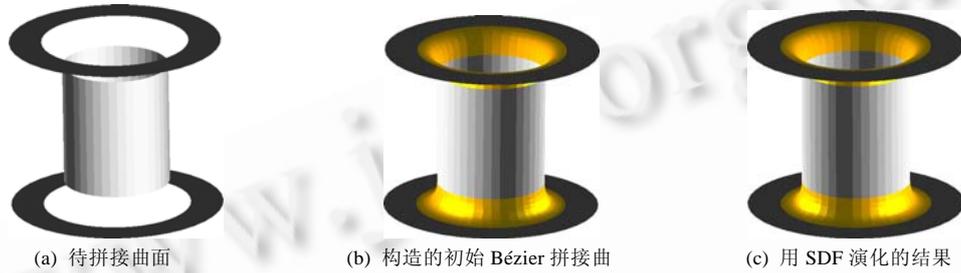


图 4

例 5: 图 3(a)和图 4(a)是输入的两个待拼接的曲面.图 3(b)是使用 4 个 Bézier 曲面片填补的初始曲面,通过插值确定的初始 Bézier 拼接曲面片内部比较平坦;图 4(b)是用 8 个 Bézier 片填补的初始曲面,效果较好.图 3(c)是由 QSDF 演化控制点得到的 Bézier 曲面片,较好地恢复了苹果的形状;图 4(c)是用 SDF 演化的结果.从中可以看出,所构造的 PDE Bézier 曲面在边界处是  $G^1$  连续的.

例 6: 图 5(b)是用 4 个 Bézier 曲面片构造的初始曲面,图 5(c)是用 WF 演化后的结果.可以看出,演化后的 Bézier 曲面片更加光滑.

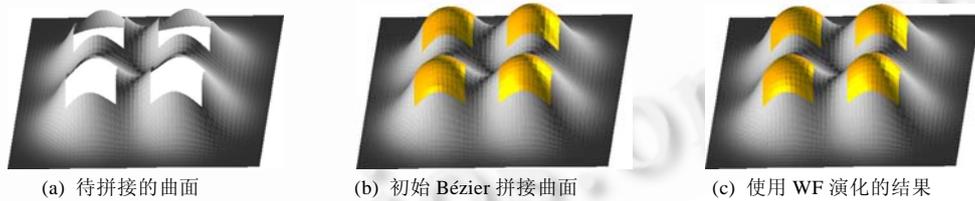


图 5

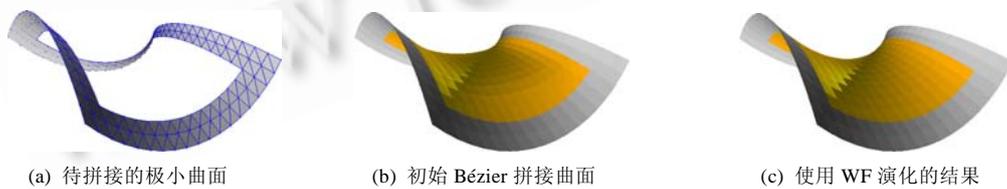


图 6

例 7: 图 6(a)由例 4 中的方程确定的极小曲面的一部分.图 6(b)是用插值构造的初始 Bézier 填补曲面片,内部比较平坦.图 6(c)用 WF 演化后的结果,可以看出演化后的 Bézier 曲面片较好地恢复了极小曲面的形状.

#### 4 使用 Bézier 曲面的限制

虽然 Bézier 曲面在 CAGD 领域非常流行,但是使用高次 Bézier 曲面存在一些限制.首先由多项式插值理论我们知道有熟知的 Runger 现象:即在等距节点上,某些函数的多项式插值函数的误差可趋于无穷大.对于我们的几何 PDE 方法,当取  $\tau=0$  时,离散化方程的求解相当于求解一个等距节点上的两元插值问题.所以可以预期,Runger 现象有可能发生.为了避免出现这种现象,我们取插值点的个数远大于多项式的次数,并在最小二乘意义下求解所导出的超定方程.即求解超定方程的法方程,这与多项式平方逼近的离散化所导出的方程相同,而平方逼近没有 Runger 现象.

表 2 条件数

4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
1.75e+00	1.21e+02	8.44e+02	5.89e+03	4.13e+04	2.91e+05	2.05e+06	1.45e+07	1.03e+08	7.83e+08
1.00e+00	1.59e+04	2.44e+07	1.82e+10	9.86e+12	4.53e+15	1.89e+18	7.52e+20	2.88e+23	1.08e+26

其次使用 Bézier 曲面插值的系数矩阵的条件数随着次数的增高而变大.表 2 的第一行列出了一维插值问题系数矩阵的条件数.表 2 的第 2 行列出了曲面插值问题系数矩阵的条件数.由此我们看出,条件数随着  $n$  以指数的速度增长.在使用双精度算术运算环境下,实际计算表明,对于一维插值问题,当  $n>16$  时,插值函数的精度损失殆尽.对于曲面插值问题,当  $m=n>14$  时,插值曲面也没有精度了.克服这一困难的简单方法是提高算术运算的精度,比如使用四精度(long double)算术运算.但即使如此,对于一维插值问题, $n$  也不能超过 32,对于二维插值问题, $m=n$  不能超过 28.另外的解决办法是使用迭代法求解所得出的线性系统,但当  $n$  较大时,迭代法也收敛很慢.因此我们建议,使用 Bézier 曲面, $n$  不要超过 10.这对形状简单的几何设计问题已经够用了.对于形状复杂的曲面片,应将其分割为若干子片分别构造,或使用样条曲面.因而几何 PDE 样条曲面的构造方法是值得进一步研究的问题.

#### 5 结 论

本文所提出的使用几何流确定 Bézier 曲面片的方法能够得到具有  $G^1$  连续,同时满足某种几何 PDE 的 Bézier 曲面.数值实验表明所提出的方法是有效的,所构造的曲面是高质量的.应当指出的是,由于 Bézier 曲面的固有性质,使用高次(10 次以上)Bézier 曲面有一定的困难(所导出的线性系统病态),如何克服这种局限性是我们需要进一步研究的问题.

#### References:

- [1] Xu G, Pan Q, Bajaj C. Discrete surface modelling using partial differential equations. *Computer Aided Geometric Design*, 2006,23(2):125–145.
- [2] Xu G, Zhang Q.  $G^2$  surface modeling using minimal mean-curvature-variation flow. *Computer-Aided Design*, 2007,39(5):342–351.
- [3] Xu G, Zhang Q. A general framework for surface modeling using geometric partial differential equations. *Computer Aided Geometric Design*, 2008,25(3):181–202.
- [4] Bajaj C, Xu G. Anisotropic diffusion of surface and functions on surfaces. *ACM Trans. on Graphics*, 2003,22(1):4–32.
- [5] Xu G, Pan Q.  $G^1$  surface modelling using fourth order geometric flows. *Computer-Aided Design*, 2006,38(4):392–403.
- [6] Farin G. A history of curves and surfaces in CAGD. In: Farin G, Hoschek J, Kim MS, eds. *Handbook of CAGD*. Amsterdam: Elsevier, 2002. 1–22.
- [7] Barsky JC, Beatty BA. Local control of Bias and tension in Beta-splines. *ACM Trans. on Graphics*, 1983,2(2):109–134.
- [8] Farin G. Smooth interpolation to scattered 3D data. In: Barnhill RE, Boehm W, eds. *Surface in CAGD*. Amsterdam: North-Holland, 1983. 43–63.
- [9] Liu D, Hoschek J.  $G^1$  continuity conditions between adjacent rectangular and triangular Bézier surface patches. *Computer-Aided Design*, 1989,21(4):194–200.
- [10] Bloor MIG, Wilson MJ. Generating blend surfaces using partial differential equations. *Computer Aided Design*, 1989,21(3):165–171.

- [11] Bloor MIG, Wilson MJ. Using partial differential equations to generate free-form surfaces. *Computer Aided Design*, 1990,22(4): 202–212.
- [12] Du H, Qin H. Dynamic PDE-based surface design using geometric and physical constraint. *Graphical Models*, 2005,67(1):43–71.
- [13] Ugail H, Bloor M, Wilson M. Techniques for interactive design using the PDE method. *ACM Trans. on Graphics*, 1999,18(2): 195–212.
- [14] Clarenz U, Diewald U, Rumpf M. Anisotropic geometric diffusion in surface processing. In: *Proc. of the Viz2000, IEEE Visualization*. Salt Lake City, 2000. 397–405.
- [15] Desbrun M, Meyer M, Schroder P, Barr AH. Implicit fairing of irregular meshes using diffusion and curvature flow. In: *SIGGRAPH'99*. Los Angeles, 1999. 317–324.
- [16] Meyer M, Desbrun M, Schroder P, Barr AH. Discrete differential geometry operators for triangulated 2-manifolds. In: *Int'l Workshop on Visualization and Mathematics*. Berlin, 2002.
- [17] Clarenz U, Diewald U, Dziuk G, Rumpf M, Rusu R. A finite element method for surface restoration with smooth boundary conditions. *Computer Aided Geometric Design*, 2004,21(5):427–445.
- [18] Schneider R, Kobbelt L. Generating fair meshes with  $G^1$  boundary conditions. In: *Geometric Modeling and Processing*. Hong Kong, 2000. 251–261.
- [19] Schneider R, Kobbelt L. Geometric fairing of irregular meshes for free-form surface design. *Computer Aided Geometric Design*, 2001,18(4):359–379.
- [20] do Carmo MP. *Riemannian Geometry*. Boston: Birkhauser, 1992. 83–84.
- [21] Willmore TJ. *Riemannian Geometry*. Oxford: Clarendon Press, 1993. 283–285.
- [22] Meyer M, Desbrun M, Schroder P, Barr AH. Discrete differential-geometry operators for triangulated 2-manifolds. In: *Proc. of the Visual Mathematics 2002*. Berlin, 2002.
- [23] Xu G. Convergence of discrete Laplace-Beltrami operators over surfaces. *Computers & Mathematics with Applications*, 2004,48: 347–360.
- [24] Liu D, Xu G, Zhang Q. A discrete scheme of Laplace-Beltrami operator and its convergence over quadrilateral meshes. *Computers and Mathematics with Applications*, 2008,55(6):1081–1093.
- [25] Xu G. Convergence analysis of a discretization scheme for Gaussian curvature over triangular surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 2006,23(2):193–207.
- [26] Liu D, Xu G. Angle deficit approximation of Gaussian curvature and its convergence over quadrilateral meshes. *Computer Aided Design*, 2007,39(6):506–517.



徐国良(1953—),男,黑龙江人,博士,研究员,博士生导师,主要研究领域为计算几何.



李明(1977—),男,博士生,主要研究领域为计算几何.