

PDE曲面的Bézier逼近*

徐 岗⁺, 汪国昭

(浙江大学 数学系 计算机图像图形研究所, 浙江 杭州 310027)

Bézier Approximation of PDE Surface

XU Gang⁺, WANG Guo-Zhao

(Institute of Image Processing and Computer Graphics, Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

+ Corresponding author: E-mail: xugangzju@yahoo.com.cn, http://www.math.zju.edu.cn/cagd/

Xu G, Wang GZ. Bézier approximation of PDE surface. Journal of Software, 2007,18(11):2914–2920.
<http://www.jos.org.cn/1000-9825/18/2914.htm>

Abstract: In order to exchange data between PDE (partial differential equation) modeling technique and the conventional CAD (computer aided design) systems, this paper presents a novel algorithm for approximating PDE surface by tensor product Bézier surface based on constrained optimization. The algorithm is also improved by the subdivision property of tensor product Bézier surface. The computational examples and the results of error analysis demonstrate the validity of the algorithm.

Key words: PDE (partial differential equation) surface; least squares method; constrained optimization; subdivision of Bézier surface; CAD (computer aided design) system

摘要: 为了实现 PDE(partial differential equation)曲面造型技术与传统 CAD(computer aided design)造型系统的数据交换,基于约束优化的思想,给出了 PDE 曲面的 Bézier 逼近算法,并利用张量积 Bézier 曲面的细分性质对该算法进行了优化.所给出的计算实例及误差比较结果说明了该算法的有效性.

关键词: PDE(partial differential equation)曲面;最小二乘法;约束优化;Bézier 曲面的细分;CAD(computer aided design)系统

中图法分类号: TP391 文献标识码: A

曲面造型技术是计算机辅助几何设计(computer aided geometry design,简称 CAGD)和计算机图形学(computer graphics,简称 CG)的一项重要内容.偏微分方程(partial differential equation,简称 PDE)曲面造型方法使用一组椭圆型偏微分方程产生曲面.此类方程中的偏微分算子实际上表示了一种光滑化过程,由它所生成的曲面自然、光滑,因此被广泛应用于船体、飞机外形、螺旋桨叶片等功能曲面的设计.

PDE 曲面造型技术已成为 CAGD 研究的一个热点.文献[1]首次将 PDE 曲面引入 CAGD,并用来构造过渡曲面.由于解析解在绘制速度和物理分析方面比通常的数值解更具优势,文献[2]利用谱分析方法研究了边界曲

* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant Nos.60473130, 10371110 (国家自然科学基金); the National Basic Research Program of China under Grant No.G2004CB318000 (国家重点基础研究发展计划(973)); the Ningbo Science Foundation of China under Grant No.2007A610046 (宁波市自然基金)

Received 2006-04-01; Accepted 2006-11-10

线为封闭曲线的 PDE 曲面的解析逼近,提高了 PDE 曲面的绘制速度.文献[3-5]对文献[2]中的方法作了进一步改进,实现了四阶及六阶 PDE 曲面的交互设计.文献[6]引入特征解和多项式解使它们满足方程条件,并引入尾函数使其满足边界条件,把这 3 部分所组成的解析解作为四边域上的正则 PDE 曲面的逼近解.文献[7]对 PDE 曲面的脊线进行了深入研究.文献[8]将 PDE 曲面造型与基于物理性质的曲面造型方法相结合,实现了在一定弹性约束下的局部修改,使得设计出的 PDE 曲面满足一定的物理性质并具有动力学行为.

由于 PDE 曲面的形状完全由边界条件决定,因此它具有形状参数少、对用户的数学背景要求较低的优点.但它与传统的 CAD (computer aided design) 造型系统不兼容,而且自由度太少,形状参数均为全局参数,不便于局部控制,在实际应用中极不方便.为了克服以上缺点,文献[9]利用传统的节点配置法和有限元法研究了 PDE 曲面的 B 样条曲面逼近,我们称其为 Bloor-Wilson 算法.由于 Bézier 曲面是 B 样条曲面的特殊情况,因此也可采用该算法实现 PDE 曲面的 Bézier 曲面逼近,但其误差较大.极小曲面是一类特殊的非线性 PDE 曲面,文献[10]利用非线性约束优化方法和有限元法研究了具有给定边界的极小曲面的 B 样条曲面逼近,将极小曲面正式引入 CAGD 造型系统.文献[11,12]给出了根据四阶齐次的 PDE 方程生成 Bézier 曲面的方法,但该方法没有考虑非齐次方程及边界信息为导矢曲线的情况.本文基于约束优化的思想^[13],给出了利用 Bézier 曲面逼近 PDE 曲面的新算法,并利用 Bézier 曲面的细分性质对该算法进行了优化.本文将该算法与传统的 Bloor-Wilson 算法在逼近精度上进行了比较.实例表明,本文的算法优于 Bloor-Wilson 算法.

1 问题描述

在 PDE 曲面造型中,偏微分方程的阶数一般为偶数,且最多为六阶,故首先定义偏微分算子:

$$L = L \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}, \frac{\partial^2}{\partial v^2}, \frac{\partial^4}{\partial u^4}, \frac{\partial^4}{\partial u^2 \partial v^2}, \frac{\partial^4}{\partial v^4}, \frac{\partial^6}{\partial u^6}, \frac{\partial^6}{\partial u^4 \partial v^2}, \frac{\partial^6}{\partial u^2 \partial v^4}, \frac{\partial^6}{\partial v^6} \right).$$

本文的主要结果就是用张量积 Bézier 曲面来逼近由下列形式的 k 阶偏微分方程得出的 PDE 曲面 $X(u, v)$:

$$\begin{cases} LX(u, v) = F(u, v), \\ \frac{\partial^i X(0, v)}{\partial u^i} = f_i(v), \quad \frac{\partial^i X(1, v)}{\partial u^i} = g_i(v), \\ \frac{\partial^i X(u, 0)}{\partial v^i} = r_j(u), \quad \frac{\partial^i X(u, 1)}{\partial v^i} = s_j(u), \quad i, j = 0, \dots, \frac{k}{2} - 1 \end{cases} \quad (1)$$

其中 $F(u, v)$ 为二元代数多项式.

2 PDE 曲面的 Bézier 逼近算法

在 PDE 曲面造型中,边界(跨界导矢)曲线常为圆弧曲线或多项式曲线.但圆弧曲线无法由 Bézier 曲线精确表示.因此,对于边界(跨界导矢)曲线为圆弧曲线的情况,需要构造 Bézier 曲线来逼近该边界曲线.本文采用文献[14]中的方法进行逼近.对于边界曲线为其他非多项式曲线的情况,可以采用文献[15]中的方法,利用最小二乘法对该边界曲线进行 Bézier 曲线拟和.

为了便于表示,我们规定:

$\deg^u(F(u, v))$ 表示 $F(u, v)$ 中 u 的最高次数;

$\deg^v(F(u, v))$ 表示 $F(u, v)$ 中 v 的最高次数;

$\deg(f_0(v)), \deg(g_0(v)), \deg(r_0(u)), \deg(s_0(u))$ 分别表示边界曲线(或拟和边界曲线) $f_0(v), g_0(v), r_0(u)$ 和 $s_0(u)$ 的次数.

算法. PDE 曲面的 Bézier 逼近算法.

1. 令 $n = \max\{k+1, \deg(r_0(u)), \deg(s_0(u)), \deg^u(F(u, v))\}$, $m = \max\{\deg(f_0(v)), \deg(g_0(v)), \deg^v(F(u, v))\}$,

设 Bézier 形式的逼近解为

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(u) B_j^m(v) a_{ij} \tag{2}$$

其中, a_{ij} 为未知控制顶点.

2. 将 $P(u, v)$ 代入公式(1), 便得到余函数 $R(u, v) = LP(u, v) - F(u, v)$, 其中,
 $\deg^u(R(u, v)) = \max\{n-k, \deg^u(F(u, v))\}$,
 $\deg^v(R(u, v)) = \max\{m-k, \deg^v(F(u, v))\}$.

令 $l = \deg^u(R(u, v)), r = \deg^v(R(u, v))$, 则 $R(u, v)$ 一定可以表示为

$$R(u, v) = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^r B_i^l(u) B_j^r(v) b_{ij} \tag{3}$$

显然, b_{ij} 为 a_{ij} 的线性函数, 因为它可由张量积 Bézier 曲面的升阶和求导公式得到.

3. 构造目标函数 $M = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^r b_{ij}^2(a_{00}, a_{01}, \dots, a_{mn})$, 解以下约束优化问题:

$$\min M = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^r b_{ij}^2(a_{00}, a_{01}, \dots, a_{mn}) \tag{4}$$

使得

$$\begin{cases} \frac{\partial^i P(0, v)}{\partial u^i} = f_i(v), & \frac{\partial^i P(1, v)}{\partial u^i} = g_i(v), \\ \frac{\partial^i P(u, 0)}{\partial v^i} = r_j(u), & \frac{\partial^i P(u, 1)}{\partial v^i} = s_j(u), \quad i, j = 0, \dots, \frac{k}{2} - 1 \end{cases}$$

运用拉格朗日乘法将问题(4)退化为线性方程组的求解问题, 这样就可以得出 a_{ij} .

4. 将 a_{ij} 代入公式(2), 得到 PDE 曲面 $X(u, v)$ 的近似解 $P(u, v)$.

图 1 和图 2 分别是使用该算法的两个计算实例. 该 PDE 曲面为圆与某一球面的过渡曲面, 即下列边值问题的解^[16]:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + a \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) X(u, v) = 0 \\ x(0, v) = \sqrt{r^2 - (H - z_0)^2} \cos v, \quad y(0, v) = \sqrt{r^2 - (H - z_0)^2} \sin v, \quad z(0, v) = H \\ x(1, v) = R \cos v, \quad y(1, v) = R \sin v, \quad z(1, v) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

图 1(a) 中的光滑曲面为该边值问题的精确解, 其中, $a=1, r=2, R=3, z_0=4, H=3$; 图 1(b) 为双五次 Bézier 曲面逼近解. 图 2(a) 中的光滑曲面为 $a=3$ 时的精确解; 图 2(b) 为逼近曲面.

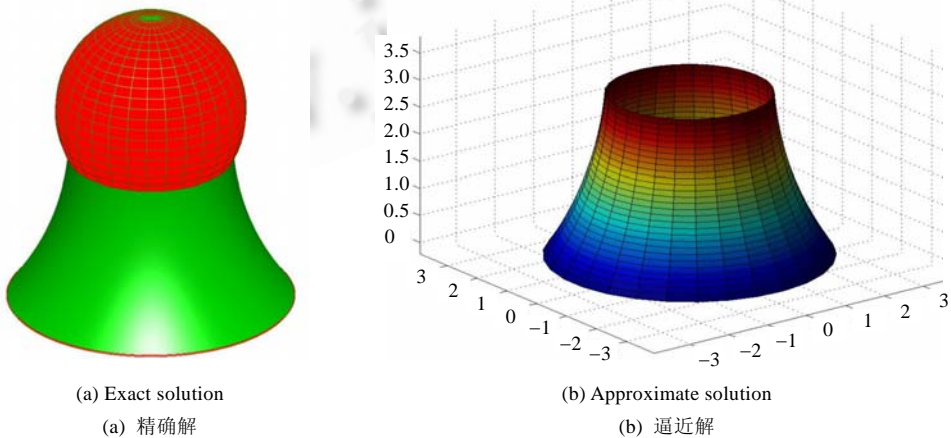


Fig.1 The exact solution and Bézier surface approximation of boundary value problem (5) with $a=1$
 图 1 边值问题(5)当 $a=1$ 时的精确解及其 Bézier 曲面逼近

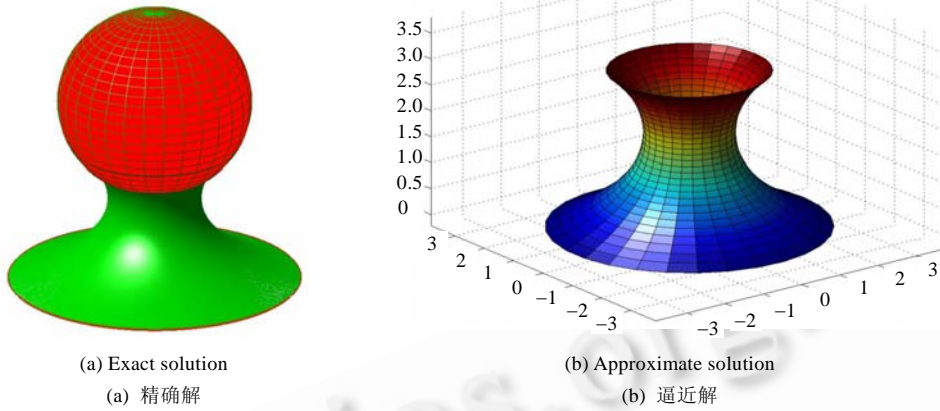


Fig.2 The exact solution and Bézier surface approximation of boundary value problem (5) with $a=3$

图 2 边值问题(5)当 $a=3$ 时的精确解及其 Bézier 曲面逼近

3 优化算法

由问题(4)可以看出,目标函数 M 实际上是余函数 $R(u,v)$ 的控制顶点的欧几里德范数,或者可以利用 Bézier 曲面的凸包性得到 $R(u,v)$ 的上界,即

$$R(u,v) \leq \max_i \{ \max_j \{ |b_{ij}| \} \}, u,v \in [0,1].$$

因此,我们可以通过上述指标来衡量由该算法所得到的解的逼近精度,也即如果上述两项指标值不够小,则说明得到的解不满足精度要求.在这种情况下,我们可以利用 Bézier 曲面的细分性质来提高解的逼近精度,即将区域 $[0,1] \times [0,1]$ 划分为若干个子区域,然后用定义在这些子区域上的 Bézier 样条曲面来逼近精确解. Bézier 样条曲面的求解方法与前面的算法基本相同,只是对目标函数的构造作了修改.

为简单起见,我们将区域 $[0,1] \times [0,1]$ 均匀划分为 $n \times m$ 个子区域 $[c_{i-1}, c_i] \times [d_{j-1}, d_j]$, 其中, $c_i = i/n, d_j = j/m, i=0,1,\dots,n, j=0,1,\dots,m$. 令定义在区域 $[c_{i-1}, c_i] \times [d_{j-1}, d_j]$ 上的 Bézier 曲面片为

$$P_{ij}(u,v) = \sum_{h=0}^n \sum_{s=0}^m B_h^n \left(\frac{u-c_{i-1}}{c_i-c_{i-1}} \right) B_s^m \left(\frac{v-d_{j-1}}{d_j-d_{j-1}} \right) a_{hs}^{ij}, u \in [c_{i-1}, c_i], v \in [d_{j-1}, d_j].$$

同样地,将 $P_{ij}(u,v)$ 代入到公式(1)中,可以得到余函数:

$$R_{ij}(u,v) = LP_{ij}(u,v) - F(u,v) = \sum_{h=0}^l \sum_{s=0}^r B_h^l \left(\frac{u-c_{i-1}}{c_i-c_{i-1}} \right) B_s^r \left(\frac{v-d_{j-1}}{d_j-d_{j-1}} \right) b_{hs}^{ij}, u \in [c_{i-1}, c_i], v \in [d_{j-1}, d_j],$$

其中, $l = \deg^u(R_{ij}(u,v)), r = \deg^v(R_{ij}(u,v))$.

我们构造目标函数如下:

$$F = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (c_i - c_{i-1}) \times (d_j - d_{j-1}) \sum_{h=0}^l \sum_{s=0}^r (b_{hs}^{ij})^2.$$

此时,逼近解所满足的边界条件应改为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^i P_{ij}(0,v)}{\partial u^i} &= f_i(v), & \frac{\partial^i P_{ij}(1,v)}{\partial u^i} &= g_i(v), \\ \frac{\partial^i P_{ij}(u,0)}{\partial v^i} &= r_j(u), & \frac{\partial^i P_{ij}(u,1)}{\partial v^i} &= s_j(u), \\ i, j &= 0, \dots, \frac{k}{2} - 1, & l &= 0, 1, \dots, n, & s &= 0, 1, \dots, m. \end{aligned}$$

为了使逼近曲面看起来比较光滑,除了边界条件以外,相邻的Bézier曲面片之间还应满足 C^r 连续条件, $r=0,1,2,\dots,k$,即

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{ns}^{ij} &= \mathbf{b}_{0s}^{i+1,j}, \\ \Delta^p \mathbf{b}_{n-p,s}^{ij} &= \Delta^p \mathbf{b}_{0,s}^{i+1,j}, \quad s=0,\dots,m, \quad p=0,\dots,k, \\ \mathbf{b}_{hm}^{ij} &= \mathbf{b}_{h0}^{i,j+1}, \\ \tilde{\Delta}^p \mathbf{b}_{h,m-p}^{ij} &= \tilde{\Delta}^p \mathbf{b}_{h0}^{i,j+1}, \quad h=0,\dots,n, \quad p=0,\dots,k, \end{aligned}$$

其中, $\Delta^p \mathbf{b}_{n-p,s}^{ij} = \mathbf{b}_{n-p+1,s}^{ij} - \mathbf{b}_{n-p,s}^{ij}$, $\tilde{\Delta}^p \mathbf{b}_{h,m-p}^{ij} = \mathbf{b}_{h,m-p+1}^{ij} - \mathbf{b}_{h,m-p}^{ij}$.

在上述连续性条件和边界条件的约束下求使目标函数 F 最小的 \mathbf{a}_{hs}^{ij} ,这显然是一个约束优化问题.运用前面的初始算法中的步骤3和步骤4,就可以求得逼近解.图3给出了使用优化算法的数值结果.该PDE曲面是以下边值问题的解^[4]:

$$\begin{cases} \left(5 \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) \mathbf{X}(u, v) = 0, \\ x(0, v) = \cos 2\pi v + 0.1 \cos 18\pi v, \quad y(0, v) = \sin 2\pi v + 0.1 \sin 18\pi v, \quad z(0, v) = 10, \\ x(1, v) = 0.6 \cos 2\pi v + 0.05 \cos 18\pi v, \quad y(1, v) = 0.6 \sin 2\pi v + 0.05 \sin 18\pi v, \quad z(1, v) = 0. \end{cases}$$

图3(a)中的曲面为该边值问题的精确解,图3(b)为逼近解.该类PDE曲面常用于花瓶的设计.

本文前面所给出的实例都是零阶光滑的,并且边界曲线均为封闭曲线.图4给出了一阶光滑的例子,该PDE曲面为一个圆柱与一个倾斜平面的一阶连续过渡曲面.图5给出了边界曲线为开曲线的例子.该PDE曲面实际上为等温参数多项式极小曲面.

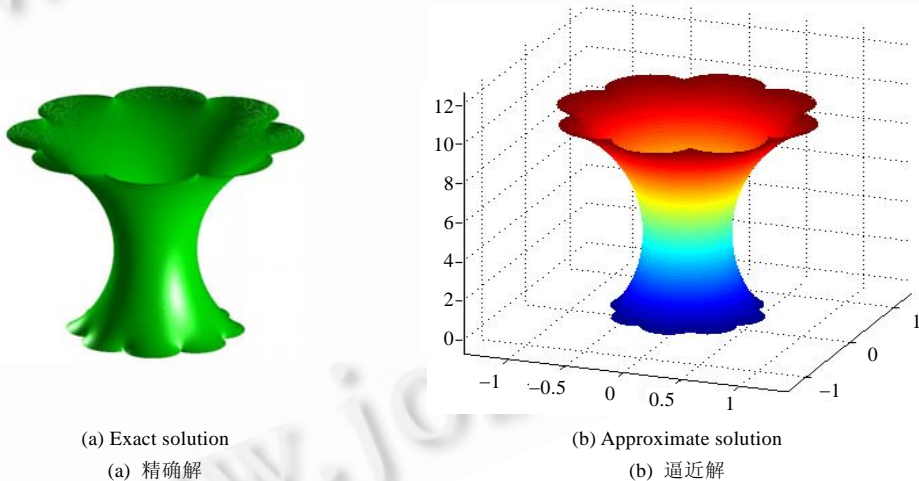


Fig.3 Computational example using the improved algorithm

图3 使用优化算法的计算实例

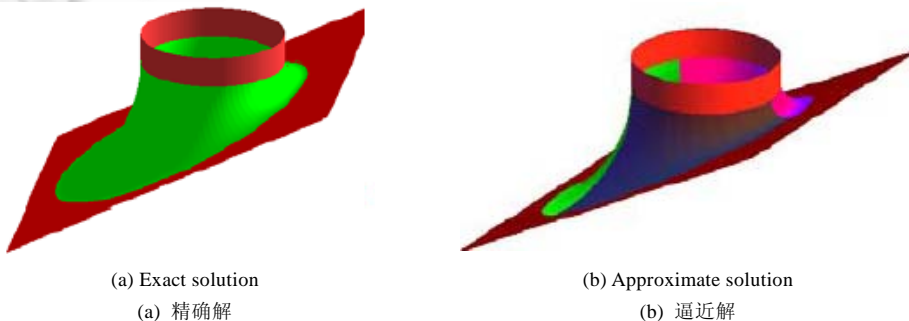


Fig.4 Computational example with 1-order continuity using the improved algorithm

图 4 使用优化算法的一阶光滑计算实例

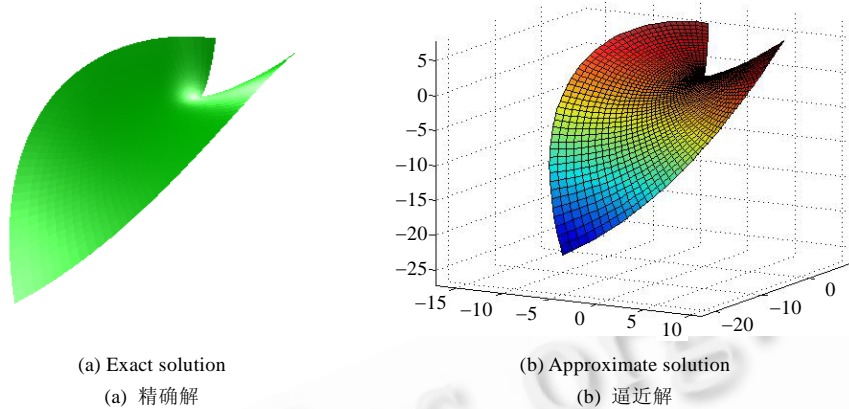


Fig.5 Computational example with open boundary curves using the improved algorithm

图 5 使用优化算法的边界曲线为开曲线的计算实例

4 实例误差比较

我们将分别采用离散 Euclidean 范数和无穷范数对本文中的 5 个计算实例进行误差计算,并与传统的 Bloor-Wilson 算法进行比较.由于 Bloor-Wilson 算法是对 PDE 曲面进行 B 样条曲面逼近,因此,我们应在采用 Bloor-Wilson 算法对 PDE 曲面进行 Bézier 曲面逼近的情况下对这两种算法进行比较.也就是说,应当使双 n 次 B 样条曲面在两个参数方向的定义域仅有 1 个非零节点区间,并且端节点重复度为 $n+1$.此时,该双 n 次 B 样条曲面实际上退化为一张双 n 次 Bézier 曲面.特别地,这两个逼近曲面还应具有相同的次数与光滑度.在上述条件下,误差比较结果见表 1、表 2.可以看出,在两种范数意义下,本文的算法均优于 Bloor-Wilson 算法.其中,离散 Euclidean 范数定义如下:

$$E = \left(\frac{1}{M} \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^r (X(i/\tau, j/\tau) - \tilde{X}(i/\tau, j/\tau))^2 \right)^{1/2},$$

其中, X 为精确解, \tilde{X} 为逼近解, $\tau=100, M=(\tau+1)^2$.相应地,离散无穷范数定义如下:

$$E = \max_{u,v \in \{0,1/r,2/r,\dots,1\}} |X(i/\tau, j/\tau) - \tilde{X}(i/\tau, j/\tau)|.$$

Table 1 Error analysis and comparison based on Euclidean norm

表 1 基于 Euclidean 范数的误差分析与比较

	Bloor-Wilson algorithm	Our algorithm
Fig.1	3.81×10^{-3}	1.67×10^{-3}
Fig.2	4.56×10^{-3}	1.75×10^{-3}
Fig.3	2.25×10^{-4}	1.23×10^{-4}
Fig.4	2.89×10^{-4}	1.54×10^{-4}
Fig.5	4.32×10^{-4}	1.96×10^{-4}

Table 2 Error analysis and comparison based on infinite norm

表 2 基于无穷范数的误差分析与比较

	Bloor-Wilson algorithm	Our algorithm
Fig.1	4.43×10^{-3}	1.93×10^{-3}
Fig.2	5.07×10^{-3}	2.09×10^{-3}
Fig.3	2.86×10^{-4}	1.74×10^{-4}
Fig.4	3.35×10^{-4}	1.79×10^{-4}
Fig.5	4.87×10^{-4}	2.83×10^{-4}

5 结论

PDE 曲面造型是 CAGD 领域中一类非常重要的曲面造型方法.基于约束优化的思想,本文给出了 PDE 曲面的 Bézier 逼近算法,并利用 Bézier 曲面的细分性质对该算法进行了优化.它实现了 PDE 曲面造型系统与传统的 CAD 造型系统之间的数据交换,因而具有重要的应用价值.

与传统的 Bloor-Wilson 算法相比,该算法在逼近精度上有了较大提高,而且实现起来简便、易行.与文献[10-12]相比,该算法的适用范围更加广泛,对高阶偏微分方程、非齐次偏微分方程以及边界曲线为导矢曲线的情况同样适用.因此,该算法不仅实现了 PDE 造型系统与传统 CAD 造型系统之间的兼容性,而且提供了一种新的 Bézier 曲面约束造型方法.

如何证明该算法的收敛性与稳定性将是下一步的研究工作.另外,将该算法推广到其他曲面表示形式,如 C-Bézier 曲面,也是值得进一步研究的课题.

References:

- [1] Bloor MIG, Wilson MJ. Generating blend surfaces using partial differential equations. *Computer Aided Design*, 1989,21(3): 165-171.
- [2] Bloor MIG, Wilson MJ. Spectral approximations to PDE surfaces. *Computer Aided Design*, 1996,28(2):145-152.
- [3] Ugail H, Bloor MIG, Wilson MJ. Techniques for interactive design using the PDE method. *ACM Trans. on Graphics*, 1999,18(2): 195-212.
- [4] Zhang JJ, You LH. Surface representation using second, fourth and mixed order partial differential equations. In: *Proc. of the Int'l Conf. on Shape Modeling and Applications*. Genova: IEEE Computer Society, 2001.
- [5] Kubiesa S, Ugail H, Wilson MJ. Interactive design using higher order PDEs. *The Visual Computer*, 2004,20(10):682-693.
- [6] Bloor MIG, Wilson MJ. An analytic pseudo-spectral method to generate a regular 4-sided PDE surface patch. *Computer Aided Geometric Design*, 2005,22(3):203-219.
- [7] Ugail H. On the spine of a PDE surface. In: Wilson MJ, Martin RR, eds. *Proc. of the Mathematics of Surfaces X*. Berlin: Springer-Verlag, 2003. 366-376.
- [8] Du HX, Qin H. Dynamic PDE-based surface design using geometric and physical constraints. *Graphical Models*, 2005,67(1):43-71.
- [9] Bloor MIG, Wilson MJ. Representing PDE surface in terms of B-splines. *Computer Aided Design*, 1990,22(6):324-331.
- [10] Man JJ, Wang GZ. Approximating to nonparameterized minimal surface with B-spline surface. *Journal of Software*, 2003,14(4): 824-829 (in Chinese with English abstract). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/14/824.htm>
- [11] Monverde J, Ugail H. On harmonic and biharmonic Bézier surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 2004,21(7):697-715.
- [12] Monverde J, Ugail H. A general 4th-order PDE method to generate Bézier surfaces from the boundary. *Computer Aided Geometric Design*, 2006,23(2):208-225.
- [13] Hu SM, Li YF, Ju T, Zhu X. Modifying the shape of NURBS surfaces with geometric constraints. *Computer Aided Design*, 2001,33(12):903-912.
- [14] Zeng FL, Chen XQ, Feng YY. Approximation of quadric curves by polynomials. *Chinese Journal of Computer Aided Design and Computer Graphics*, 2003,15(5):547-551 (in Chinese with English abstract).
- [15] Shi FZ. *Computer Aided Geometric Design and Non-uniform Rational B-spline*. Beijing: Higher Education Press, 2001 (in Chinese).
- [16] Zhu XX. *Technology of Free Form Curves and Surface Modeling*. Beijing: Science Press, 2000 (in Chinese).

附中文参考文献:

- [10] 满家巨,汪国昭.B-样条函数极小曲面造型.软件学报,2003,14(4):824-829. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/14/824.htm>
- [14] 曾芳玲,陈效群,冯玉瑜.二次曲线的多项式逼近.计算机辅助设计与图形学学报,2003,15(5):547-551.
- [15] 施法中.计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条.北京:高等教育出版社,2001.
- [16] 朱心雄.自由曲线曲面造型技术.北京:科学出版社,2000.



徐岗(1981—),男,山东兖州人,博士生,主要研究领域为几何设计与计算,数字几何处理,计算机图形学.



汪国昭(1944—),男,教授,博士生导师,主要研究领域为计算机辅助几何设计,计算机图形学,医学图像三维重建.

www.jos.org.cn

www.jos.org.cn