ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
Journal of Software, Vol.18, No.11, November 2007, pp.2712−2718
DOI: 10.1360/jos182712

E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel/Fax: +86-10-62562563

基于支持度理论的广义 Modus Ponens 问题的最优解*

李 骏[1,2+], 王国俊[1]

[1](陕西师范大学 数学与信息科学学院,陕西 西安 710062)
[2](兰州理工大学 理学院,甘肃 兰州 730050)

Optimal Solutions Based on Sustentation Degree for Problems of Generalized Modus Ponens

LI Jun[1,2+], WANG Guo-Jun[1]

[1](College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)
[2](School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)
+ Corresponding author: Phn: +86-29-85314523, E-mail:lijun@stu.snnu.edu.cn

Li J, Wang GJ. Optimal solutions based on sustentation degree for problems of generalized modus ponens. *Journal of Software*, 2007,18(11):2712−2718. http://www.jos.org.cn/1000-9825/18/2712.htm

Abstract: In order to put fuzzy reasoning into the framework of logic and lays a solid logical foundation for fuzzy reasoning both syntactically and semantically, this paper transforms FMP (fuzzy modus ponens) into GMP (generalized modus ponens) by formalizing fuzzy reasoning and transplanting it into the classical propositional logic. Base on the concept of truth degrees of formulas, the sustentation degrees between formulas are put forward and a new kind of optimal solving mechanism is established for GMP and CGMP (collective generalized modus ponens). Existence theorems of optimal solutions are proved both for GMP and CGMP, and it is pointed out that there exists a completely similar reasoning mechanism between the classical propositional logic and the fuzzy logic. The graded method presented in this paper makes the algorithmic realization of solution procedure possible and serves as a guideline for the graded reasoning about knowledge.
Key words: GMP (generalized modus ponens) problem; CGMP (collective generalized modus ponens) problem; truth degree; sustentation degree; optimal solution

摘 要: 为了将模糊推理纳入逻辑的框架并从语构和语义两个方面为模糊推理奠定严格的逻辑基础,通过将模糊推理形式化的方法移植到经典命题逻辑系统中,把 FMP(fuzzy modus ponens)问题转化为 GMP(generalized modus ponens)问题,并基于公式的真度概念提出了公式之间的支持度,进一步利用支持度的思想引入了 GMP 问题以及 CGMP(collective generalized modus ponens)问题的一种新型最优求解机制.证明了最优解的存在性,同时指出,在经典命题逻辑系统中存在着与模糊逻辑完全相似的推理机制.该方法是一种程度化的方法,这就使得求解过程从算法上实现成为可能,并对知识的程度化推理有所启示.
关键词: GMP(generalized modus ponens)问题;CGMP(collective generalized modus ponens)问题;真度;支持度;最

---

* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.10331010 (国家自然科学基金); the Innovation Foundation for Doctors of Shaanxi Normal University of China (陕西师范大学博士创新基金); the Outstanding Youth Foundation of Lanzhou University of Technology of China (兰州理工大学优秀青年基金)

Received 2006-04-19; Accepted 2006-11-03

优解
中图法分类号: TP18 文献标识码: A

经典命题逻辑学中最基本的推理规则是 MP(modus ponens)规则,即

$$\text{由 } A\to B \text{ 和 } A \text{ 可推得 } B \tag{1}$$

但在实际中经常会碰到如下更一般的推理形式:

$$\begin{array}{c} A\to B \\ \underline{A^*\qquad} \\ B^* \end{array} \tag{2}$$

这一推理形式称为广义 MP 规则[1](简称 GMP(generalized modus ponens)规则),即已知 $A\to B$ 且给定一个与 A 相接近的命题 A^*,定义与 B 相接近的命题 B^*.显然,GMP 规则比 MP 规则有更大的灵活性,因为这里 A^*可以取许多与 A 不同的命题,从而使得推理可用于更加广泛的情形.

关于 GMP 问题(2)的求解,传统的方法是先将命题 A,A^*和 B 分别转化为某论域 X 和 Y 上的模糊集,此时,GMP 问题(2)就是众所周知的 FMP(fuzzy modus ponens)问题了.针对 FMP 问题,Zadeh 教授在 1973 年提出了 CRI (compositional rule of inference)方法[2],但由于其推理机制缺乏严格的逻辑基础而受到质疑[3].文献[4]提出了一种更合理的算法——模糊推理的全蕴涵三-I 算法,并基于支持度理论将三-I 算法纳入逻辑的框架,关于三-I 算法的研究成果已有很多,参见文献[5–12].

另一方面,精确的、形式化的逻辑推理方法在诸如定理的自动证明、知识推理、逻辑程序设计等多个领域得到了广泛应用,数值计算则似乎是远离形式推理的完全不同的方法.但由于人脑的思维模式与推理方法带有不确定性,导致推理不是精确的,而是近似的.因此,近年来关于程度化推理的研究受到了广泛的关注(参见文献[13–20]).能否将程度化的推理机制和三-I 算法的思想融入 GMP 问题的求解中,并为 GMP 问题给出一种非模糊的求解算法呢?这就是本文的研究目的.本文首先在经典命题逻辑中利用命题的真度引进公式之间的支持度,基于支持度给出 GMP 问题以及集体 GMP 问题的一种新的最优求解算法,并研究 GMP 问题及集体 GMP 问题最优解的存在性,尝试将三-I 算法及程度化逻辑推理和谐地融入上述问题的求解机制.

1 公式的真度

设 $S=\{p_1,p_2,\ldots\}$,$F(S)$是由 S 生成的$(\neg,\to)$型自由代数.S 中的元称为原子命题,$F(S)$中的元称为公式(或命题).设$\Gamma\subseteq F(S)$,$A\in F(S)$,从Γ到 A 的一个推理是一个有限序列:

$$A_1,A_2,\ldots,A_m \tag{3}$$

其中,$A_m=A$,且$\forall i\le m$,或者 $A_i\in\Gamma\cup T$,或者存在 $j,k<i$,使 A_i 是由 A_j 和 A_k 运用 MP 规则而得到的结果,其中,T 代表全体定理之集,称 A 为Γ-结论,记作$\Gamma\vdash A$.若$\Gamma=\varnothing$(空集),则称 A 为定理,简记为$\vdash A$.下面以 $D(\Gamma)$来记全体Γ-结论之集.若$\vdash A\to B$ 且$\vdash B\to A$,则称 A 与 B 是可证等价的,记作 $A\sim B$.在 $L=\{0,1\}$中规定:

$$\neg 0=1,\neg 1=0,a\to b=0 \text{ 当且仅当 } a=1 \text{ 且 } b=0 \tag{4}$$

则$\{0,1\}$成为一个$(\neg,\to)$型代数.称$(\neg,\to)$型同态 $v:F(S)\to\{0,1\}$为 $F(S)$的一个赋值.以Ω记 $F(S)$上全体赋值之集.在经典命题逻辑中演绎定理和完备性定理成立[21].若 $A\to B$ 和 $B\to A$ 都是重言式,则称 A 与 B 是逻辑等价的,记作 $A\approx B$.设 $A(p_1,p_2,\ldots,p_m)$是 $F(S)$中含有 m 个原子公式的逻辑公式,则 A 可以自然地诱导一个 m 元 Boole 函数: $\overline{A}:\{0,1\}^m\to\{0,1\}$.下面是文献[18]中已经给出的本文要用到的几个定义和命题.

定义 1.1[18]. 设 $A(p_1,p_2,\ldots,p_m)$是 $F(S)$中含有 m 个原子公式的逻辑公式,则 A 的真度$\tau(A)$定义如下:

$$\tau(A)=\frac{1}{2^m}\cdot|\overline{A}^{-1}(1)| \tag{5}$$

命题 1.1[18]. 设 $A,B\in F(S)$,则

(i) A 是重言式当且仅当$\tau(A)=1$,A 是矛盾式当且仅当$\tau(A)=0$;

(ii) 若 $A\approx B$(或 $A\sim B$),则 $\tau(A)=\tau(B)$.

命题 1.2[18]. 设 $A,B,C\in F(S),\alpha,\beta\in[0,1]$,

(i) 若 $\tau(A)\geq\alpha,\tau(A\to B)\geq\beta$,则 $\tau(B)\geq(\alpha+\beta-1)\vee 0$;

(ii) 若 $\tau(A\to B)\geq\alpha,\tau(B\to C)\geq\beta$,则 $\tau(A\to C)\geq(\alpha+\beta-1)\vee 0$;

(iii) 若 $\vdash A\to B$,则 $\tau(A)\leq\tau(B)$.

定义 1.2[18]. 设 $A,B\in F(S)$,令

$$\xi(A,B)=\tau((A\to B)\wedge(B\to A)),$$

称 $\xi(A,B)$ 为 A 与 B 的相似度.特别地,当 $\xi(A,B)=1$ 时,称 A 与 B 相似,记作 $A\backsim B$.

命题 1.3[18]. 设 $A,B\in F(S)$,则

(i) $\xi(A,B)=1$ 当且仅当 $A\approx B$(或 $A\sim B$);

(ii) $\xi(A,A)=1$;

(iii) $\xi(A,B)=\xi(B,A)$.

下面我们将给出公式真度进一步的一些性质,其证明比较简单,故略去.

命题 1.4. 设 $A_i\in F(S),i\in I$(I 为有限集),则

(i) $\tau(\bigvee_{i\in I} A_i)\geq\bigvee_{i\in I}\tau(A_i)$;

(ii) $\tau(\bigwedge_{i\in I} A_i)\leq\bigwedge_{i\in I}\tau(A_i)$.

命题 1.5. 设 $A,B,A_i,B_i\in F(S),i\in I$($I$ 为有限集),则

(i) $\tau(A\to\bigwedge_{i\in I} B_i)=\tau(\bigwedge_{i\in I}(A\to B_i))$;

(ii) $\tau(\bigvee_{i\in I} A_i\to B)=\tau(\bigwedge_{i\in I}(A_i\to B))$;

(iii) $\tau(\bigwedge_{i\in I} A_i\to B)=\tau(\bigvee_{i\in I}(A_i\to B))$;

(iv) $\tau(A\to\bigvee_{i\in I} B_i)=\tau(\bigvee_{i\in I}(A\to B_i))$.

命题 1.6. $A,B\in F(S)$,且 B 是重言式,则

(i) $\tau(A\wedge B)=\tau(A)$;

(ii) $\tau(A\vee B)=1$.

2 基于公式真度的支持度

定义 2.1. 设 $A,B\in F(S)$,把 $A\to B$ 的真度称为 A 对 B 的支持度,记作 $sust(A,B)$,即

$$sust(A,B)=\tau(A\to B) \tag{6}$$

显然,$0\leq sust(A,B)\leq 1$.

注:由定义 1.1 可以看出,$A\to B$ 的真度值 $\tau(A\to B)$ 等于使得 $v(A\to B)=1$ 的那些赋值 v 在整个赋值空间 Ω 中所占的份额,而 $v(A\to B)=1$ 则可理解为在该赋值 v 下,公式 A 全力支持 B,因此把使得 A 全力支持 B 的赋值 v 在整个赋值空间 Ω 中所占的份额定义为 A 对 B 的支持度是自然的、也是合理的.

命题 2.1. 设 $A,B\in F(S)$,则

(i) $sust(A,B)=1$ 当且仅当 $A\to B$ 是重言式.

(ii) $sust(A,B)=0$ 当且仅当 $A\to B$ 是矛盾式,当且仅当 A 是重言式且 B 是矛盾式.

命题 2.2. 设 $A,B,C\in F(S),\alpha,\beta\in[0,1]$,若 $sust(A,B)\geq\alpha,sust(B,C)\geq\beta$,则

$$sust(A,C)\geq(\alpha+\beta-1)\vee 0.$$

命题 2.3. 设 $A,B,C\in F(S)$,则

(i) $sust(A,B\to C)=sust(B,A\to C)$;

(ii) $sust(A,B\to C)=sust(A,\neg C\to\neg B)$.

命题 2.4. 设 $A,B\in F(S)$,则 $sust(A,B)\geq\tau(B)$.

命题 2.5. 设 $A,B,A_i,B_i\in F(S),i\in I,I$ 为有限集,则

(i) $sust(\bigwedge_{i\in I} A_i, B)\ge \bigvee_{i\in I} sust(A_i,B)$;

(ii) $sust(A,\bigvee_{i\in I} B_i)\ge \bigvee_{i\in I} sust(A,B_i)$.

命题 2.6. 设 $A,B,C\in F(S)$,且 B 是重言式,则

(i) $sust(B,A)=\tau(A)$;

(ii) $sust(A,B)=1$.

命题 2.7. 设 $A,B,C\in F(S)$,

(i) 若 $B\sim C$(或 $B\approx C$),则 $sust(A,B)=sust(A,C)$;

(ii) 若 B 是重言式,则 $sust(A,B\wedge C)=sust(A,C)$.

3 基于支持度理论的 GMP 问题的最优解

我们知道,由公式 $A\to B$ 和 A^*从形式上可以推出很多公式,究竟哪些公式作为结论更为合理,有没有一个评价标准呢?本节我们将从语义的角度为 GMP 问题给出一种基于支持度理论的最优求解机制,并证明最优解的存在性.

定义 3.1. GMP 问题(2)的最优解 B^*是 $D(\Gamma)$中满足下式:

$$sust(A\to B,A^*\to B^*)=1 \tag{7}$$

并且使得 $A\to B$ 和 $A^*\to B^*$的相似度$\xi(A\to B,A^*\to B^*)$取值最大的公式,其中,$\Gamma=\{A\to B,A^*\}$.

注:定义 3.1 给出的最优解 B^*需要满足 3 个条件:首先要求 $sust(A\to B,A^*\to B^*)=1$,即要求 $A\to B$ 全力支持 $A^*\to B^*$;其次,B^*还要使$\xi(A\to B,A^*\to B^*)$取值最大,即要求 $A^*\to B^*$和 $A\to B$ 最大程度地相似;最后,还要求 B^*是 $D(\Gamma)$中的公式,这是因为我们是在给定 $A\to B$ 和 A^*,即给定了$\Gamma=\{A\to B,A^*\}$的前提下来求 B^*的,因此,从 $D(\Gamma)$中来求 B^*(即把 B^*作为Γ-结论)是非常自然的,也是合理的.

下面我们对定义 3.1 作进一步的分析.在 B^*满足式(7)中的条件时,由命题 2.1(i)可知,$(A\to B)\to(A^*\to B^*)$是重言式,此时,由定义 1.2 及命题 1.6(i)容易得出

$$\xi(A\to B,A^*\to B^*)=sust(A^*\to B^*,A\to B) \tag{8}$$

上面的事实告诉我们,定义 3.1 可等价地描述如下:

命题 3.1. GMP 问题(2)的最优解 B^*是满足下式:

$$sust(A\to B,A^*\to B^*)=1,$$

并且使得 $sust(A^*\to B^*,A\to B)$取值最大的 $D(\Gamma)$中的公式,其中,$\Gamma=\{A\to B,A^*\}$.

从命题 3.1 可以看出,GMP 问题(2)的最优解 B^*除了要求 $A\to B$ 全力支持 $A^*\to B^*$以外,还要求 $A^*\to B^*$也最大可能地支持 $A\to B$.

定理 3.1(解的存在性定理). 由定义 3.1 给出的 GMP 问题(2)的最优解 B^*一定存在,并且 $B^*=A^*\wedge(A\to B)$就是它的一个解.

证明:只需验证 $B^*=A^*\wedge(A\to B)$是 GMP 问题(2)的最优解即可.首先,$B^*\in D(\Gamma)$是显然的.其次,容易证明下面的可证等价式:

$$A^*\to((A\to B)\wedge A^*)\sim(A^*\to(A\to B))\wedge(A^*\to A^*).$$

再注意到 $A^*\to A^*$是重言式(定理),则由命题 2.7 可得

$$\begin{aligned}sust(A\to B,A^*\to B^*)&=sust(A\to B,A^*\to(A\to B)\wedge A^*)\\&=sust(A\to B,A^*\to(A\to B))=\tau((A\to B)\to(A^*\to(A\to B)))=1.\end{aligned}$$

最后,我们来证明在所有满足式(7)的公式中,$B^*=A^*\wedge(A\to B)$使得$\xi(A\to B,A^*\to B^*)$的取值最大.设 C^*是 $D(\Gamma)$中满足 $sust(A\to B,A^*\to C^*)=1$ 的任一公式,下证$\xi(A\to B,A^*\to B^*)\ge\xi(A\to B,A^*\to C^*)$,由式(8)可知,只需证明

$$sust(A^*\to B^*,A\to B)\ge sust(A^*\to C^*,A\to B).$$

事实上,$sust(A^*\to C^*,A\to B)=\tau((A^*\to C^*)\to(A\to B))$,再由定义 2.1、命题 1.1 以及 $A^*\to A^*\wedge(A\to B)\approx(A^*\to(A\to B))$

易得

$$sust(A^*\to B^*,A\to B)=\tau((A^*\to A^*\wedge(A\to B))\to(A\to B))=\tau((A^*\to(A\to B))\to(A\to B)) \tag{9}$$

因为 $C^*\in D(\Gamma)$,其中$\Gamma=\{A\to B,A^*\}$,即$\Gamma\vdash C^*$,由演绎定理不难证明$\vdash A^*\wedge(A\to B)\to C^*$成立,从而 $A^*\wedge(A\to B)\to C^*$是重言式,又 $A^*\wedge(A\to B)\to C^*\approx(A^*\to C^*)\vee((A\to B)\to C^*)$,从而对任意的 $v\in\Omega$,恒有

$$\max\{v(A^*\to C^*),v((A\to B)\to C^*)\}=1 \tag{10}$$

下面证明一个重要事实:$\forall v\in\Omega$,

$$v((A^*\to(A\to B))\to(A\to B))\geq v((A^*\to C^*)\to(A\to B)) \tag{11}$$

若 $v(A\to B)\leq v(C^*)$,则

$$v((A^*\to(A\to B))\to(A\to B))=v(A^*\to(A\to B))\to v(A\to B)\geq v(A^*\to C^*)\to v(A\to B)=v((A^*\to C^*)\to(A\to B)) \tag{12}$$

若 $v(A\to B)>v(C^*)$,则由式(10)可知,只能有 $v(A^*\to C^*)=1$,从而仍然有

$$v((A^*\to(A\to B))\to(A\to B))\geq v(A^*\to C^*)\to v(A\to B)).$$

即式(11)对$\forall v\in\Omega$都成立,由式(11)及定义 1.1 直接可得

$$\tau((A^*\to(A\to B))\to(A\to B))\geq\tau((A^*\to C^*)\to(A\to B)).$$

定理得证. □

定理 3.2. 在 GMP 问题(2)中,若 $A^*=A$,则 $B^*=B$ 就是它的一个最优解.

证明:设 $A^*=A$ 成立,则此时$\Gamma=\{A\to B,A\}$,由 MP 规则可知 $B\in D(\Gamma)$,令 $B^*=B$,则显然有:$sust(A\to B,A^*\to B^*)=sust(A^*\to B^*,A\to B)=sust(A\to B,A\to B)=1$,且同时达到最大值.即 $B^*=B$ 就是 GMP 问题(2)的一个最优解. □

定理 3.3. 若 $A^*=A,B^*\in D(\Gamma)$,则 B^*是 GMP 问题(2)的最优解当且仅当

$$\xi(A\to B,A^*\to B^*)=1.$$

此定理的证明利用定理 3.2 容易给出.另外,下面的命题是显然的:

命题 3.2. 若 C^*是 GMP 问题(2)的一个最优解,$B^*\approx C^*$,则 B^*也是 GMP 问题(2)的一个最优解.

4 基于支持度理论的 CGMP(collective generalized modus ponens)问题的最优解

为了研究模糊推理的非模糊形式,文献[1]中曾给出如下的与模糊推理形式更接近的模型:

$$\begin{array}{ll} \text{已知} & A_i\to B \\ \text{给定} & \underline{\quad A_i^* \quad} \\ \text{定义} & \quad B^* \end{array},\quad i=1,2,...,n \tag{13}$$

在模型(13)中,结论 B^*是由大前提 $A_i\to B(i=1,2,\ldots,n)$和小前提 A_i^* $(i=1,2,\ldots,n)$构成的序对集$\{A_i\to B, A_i^*\}(i=1,2,\ldots,n)$集体决定的,因此我们称此推理模型为集体广义 MP 问题(简称 CGMP 问题).

定义 4.1. CGMP 问题(13)的最优解 B^*是$\bigcap_{i=1}^{n}D(\Gamma_i)$中满足下列条件:

$$sust(A_i\to B,A_i^*\to B^*)=1,\ i=1,2,\ldots,n,$$

且使得$\forall i\in\{1,2,\ldots,n\}$, $\xi(A_i^*\to B^*,A_i\to B)$ 都取值最大.其中,$\Gamma_i=\{A_i\to B, A_i^*\}$, $\bigcap_{i=1}^{n}D(\Gamma_i)$ 为$\Gamma_i=\{A_i\to B, A_i^*\}(i=1,2,\ldots,n)$的公共推论.

与命题 3.1 的推导方法类似,可以得出:

命题 4.1. CGMP 问题(13)的最优解 B^*是$\bigcap_{i=1}^{n}D(\Gamma_i)$中满足下列条件:

$$sust(A_i\to B,A_i^*\to B^*)=1,\ i=1,2,\ldots,n,$$

且使得$\forall i\in\{1,2,\ldots,n\}$, $sust(A_i^*\to B^*,A_i\to B)$ 都取值最大.其中,$\Gamma_i=\{A_i\to B, A_i^*\}(i=1,2,\ldots,n)$, $\bigcap_{i=1}^{n}D(\Gamma_i)$ 为$\Gamma_i=\{A_i\to B, A_i^*\}$的公共推论.

定理 4.1. CGMP 问题(13)的最优解 B^*一定存在.

证明:令 $I=\{i=1,2,\ldots,n\}$,由第 3 节的知识已经知道:对任意的 $i\in I$,广义 MP 问题

$$\begin{array}{ll} \text{已知} & A_i \to B \\ \text{给定} & \underline{\quad A_i^* \quad} \\ \text{定义} & \quad B_i^* \end{array}, \quad i=1,2,\ldots,n \tag{14}$$

的最优解一定存在,且 $B_i^* = A_i^* \wedge (A_i \to B)$ 就是它的一个最优解.令 $B^* = \underset{i\in I}{\vee} B_i^*$,下面证明 B^*为 CGMP 问题的一个最优解.

首先,由 $B_i^* \in D(\Gamma_i)$ $(i=1,2,\ldots,n)$,容易证明 $B^* \in \bigcap_{i=1}^{n} D(\Gamma_i)$.

其次,由 B_i^* 的定义可知, $sust(A_i \to B, A_i^* \to B_i^*) = 1$,对每个 $i\in I$ 都成立,从而不难证明

$$sust(A_i \to B, A_i^* \to B^*) = 1, i\in I.$$

最后证明 B^*是 $\bigcap_{i=1}^{n} D(\Gamma_i)$ 中使得所有 $sust(A_i^* \to B^*, A_i \to B)$ 都取值最大的公式.

设 C^*是 $\bigcap_{i=1}^{n} D(\Gamma_i)$ 中满足 $sust(A_i \to B, A_i^* \to C^*) = 1$ 的任一公式,$i\in I$.

下面证明 $sust(A_i^* \to B^*, A_i \to B) \ge sust(A_i^* \to C^*, A_i \to B)$, $i\in I$.

因为 $sust(A_i^* \to B^*, A_i \to B) = sust(A_i^* \to \underset{i\in I}{\vee} B_i^*, A_i \to B) = \tau((A_i^* \to \underset{i\in I}{\vee} B_i^*) \to (A_i \to B))$,

且 $sust(A_i^* \to C^*, A_i \to B) = \tau((A_i^* \to C^*) \to (A_i \to B))$,又下面的事实成立:

$$\forall v\in \Omega, v((A_i^* \to \underset{i\in I}{\vee} B_i^*) \to (A_i \to B)) \ge v((A_i^* \to C^*) \to (A_i \to B)),$$

因此就有 $\tau((A_i^* \to \underset{i\in I}{\vee} B_i^*) \to (A_i \to B)) \ge \tau((A_i^* \to C^*) \to (A_i \to B))$,

即 $sust(A_i^* \to B^*, A_i \to B) \ge sust(A_i^* \to C^*, A_i \to B)$ 对每个 $i\in I$ 都成立.定理得证. □

由定理 4.1 的证明过程不难得出下面的定理:

定理 4.2. 若 $B^* \approx \overset{n}{\underset{i=1}{\vee}} (A_i^* \wedge (A_i \to B))$,则 B^*就是 CGMP 问题(13)的一个最优解.

5 结束语

本文通过将模糊推理形式化的方法将其移植到经典命题逻辑系统中,把 FMP 问题转化为 GMP 问题,并基于支持度的思想引入了 GMP 问题以及 CGMP 问题的一种新型最优求解机制,证明了最优解的存在性.文献[10]研究了模糊推理的一致形式,并基于正则蕴涵算子给出 FMP 问题统一的三-I 求解公式如下:

$$B^*(y) = \sup_{x\in X}\{A^*(x) \otimes (A(x) \to B(y))\}, y \in Y,$$

其中,A,A^*和 B,B^*分别为 X,Y 上的模糊集,$\to:[0,1]^2\to[0,1]$是某正则蕴涵算子,$\otimes:[0,1]^2\to[0,1]$是与之对应的 T-模.由于上述表达式对每个 $y\in Y$ 都一样,如果略去这个 y 不写,就有

$$B^* = \sup_{x\in X}\{A^*(x) \otimes (A(x) \to B\} \tag{15}$$

另外,设 $A,B\in F(S)$,若令 $A\otimes B=\neg(A\to\neg B)$,则容易看出:$A\otimes B=A\wedge B$,再令 $X=\{1,2,\ldots,n\}$,并把 A_i,A_i^* 分别写成 $A(X),A^*(X)$,把 $\overset{n}{\underset{i=1}{\vee}}$ 写成 $\sup\limits_{x\in X}$,则定理 4.2 中给出的 CGMP 问题的最优解可写成 $B^* \approx \sup\limits_{x\in X}\{A^*(x)\otimes(A(x)\to B\}$,与 FMP 的表达式(15)完全相同.这表明在经典命题逻辑中存在着与模糊逻辑完全相似的推理机制.由于本文为 GMP 问题提供的解法是程度化了的,这就为求解的算法实现奠定了基础.本文的方法还可推广到多重 GMP 问题以及多值命题逻辑的情形,对此我们将另文讨论.

致谢 我们衷心感谢审稿专家提供的宝贵修改意见和建议.

References:

[1] Wang GJ, Wang H. Non-Fuzzy versions of fuzzy reasoning in classical logics. Information Sciences, 2001,138(1-4):211−236.

[2] Dubois D, Prade H. Fuzzy sets in approximate reasoning. Fuzzy Sets and Systems, 1991,40(1):143−244.

[3] Li HX. To see the success of fuzzy logic from mathematical essence of fuzzy control. Fuzzy Systems and Mathematics, 1995,9(4): 1−14 (in Chinese with English abstract).

[4] Wang GJ. The full implication triple I method for fuzzy reasoning. Science in China (Series E), 1999,29(1):43−53 (in Chinese with English abstract).

[5] Pei DW, Wang GJ. The completeness and applications of the formal system L^*. Science in China (Series F), 2002,45(1):40−50.

[6] Wang GJ. On the logic foundation of fuzzy reasoning. Information Sciences, 1999,117(1):47−88.

[7] Wang GJ. Triple I method and interval valued fuzzy reasoning. Science in China (Series E), 2000,30(4):331−340 (in Chinese with English abstract).

[8] Song SJ, Wu C. Reverse triple I method of fuzzy reasoning. Science in China (Series F), 2002,45(5):344−365.

[9] Song SJ, Feng CB. Triple I method of fuzzy reasoning. Computers and Mathematics with Applications, 2002,44(12):1567−1579.

[10] Wang GJ, Fu L. Uniforms of triple I methods. Computers and Mathematics with Applications, 2005,49(5-6):923−932.

[11] Wang GJ. Non-Classical Mathematical Logic and Approximate Reasoning. Beijing: Science Press, 2000 (in Chinese).

[12] Pei DW. On optimal solution of GMP and GMT. Fuzzy Systems and Mathematics, 2003,17(2):1−9.

[13] Pavalk J. On fuzzy logic I. Zeischrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 1979,25(1):45−52.

[14] Pavalk J. On fuzzy logic II. Zeischrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 1979,25(2):119−134.

[15] Pavalk J. On fuzzy logic III. Zeischrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 1979,25(5):447−464.

[16] Ying MS. A logic for approximate reasoning. The Journal of Symbolic Logic, 1994,59(4):830−837.

[17] Xu Y, Qin KY, Liu J, Song ZM. *L*-Valued propositional logic L_{vpl}. Information Sciences, 1999,114(1):205−235.

[18] Wang GJ, Fu L, Song JS. Theory of truth degrees of propositions in two-valued logic. Science of China (Series A), 2002,45(9): 1106−1116.

[19] Li J, Li SP, Xia YF. Theory of truth degrees of propositions in Lukasiewicz *n*-valued popositional logic. Acta Mathematica Sinica, 2004,47(4):769−780 (in Chinese with English abstract).

[20] Li J, Wang GJ. Theory of truth degrees of propositions in the logic system L_n^*. Science in China (Series F), 2006,49(4):471−483.

[21] Hamilton AG. Logic for Mathematicians. London: Cambridge University Press, 1978.

附中文参考文献:

[3] 李洪兴.从模糊控制的本质看模糊逻辑的成功.模糊系统与数学,1995,9(4):1−14.

[4] 王国俊.模糊推理的全蕴涵三-I 算法.中国科学(E 辑),1999,29(1):43−53.

[7] 王国俊.三-I 方法与区间值模糊推理.中国科学(E 辑),2000,30(4):331−340.

[11] 王国俊.非经典数理逻辑与近似推理.北京:科学出版社,2000.

[19] 李骏,黎锁平,夏亚峰.Lukasiewicz *n* 值命题逻辑中命题的真度理论.数学学报,2004,47(4):769−780.

李骏(1972－),男,甘肃白银人,博士生,副教授,主要研究领域为非经典数理逻辑,不确定性推理.

王国俊(1935－),男,教授,博士生导师,CCF 高级会员,主要研究领域为不确定性推理,非经典数理逻辑.