

## 三角形域上的超限插值方法\*

徐琳

(国家自然科学基金委员会,北京 100085)

### Infinite Interpolation on Triangles

XU Lin

(National Natural Science Foundation of China, Beijing 100085, China)

+ Corresponding author: Phn: +86-10-62327141, E-mail: xulin@mail.nsf.gov.cn, http://www.nsf.gov.cn

**Xu L. Infinite interpolation on triangles. Journal of Software, 2007,18(2):430-441.** <http://www.jos.org.cn/1000-9825/18/430.htm>

**Abstract:** Constructing triangle surface which interpolates the boundary curve and cross-boundary slopes on a triangle is the basic problem in computer aided geometric design, computer graphics and so on. This problem is called infinite interpolation on triangle. In this paper, a survey on the existing methods of constructing infinite interpolation surfaces on triangles is given, and a comparison is made between the methods by using examples. The open problems in the existing methods of infinite interpolation on triangles are discussed.

**Key words:** triangular patch; infinite interpolation; polynomial; Boolean sum; surface parametrization

**摘要:** 在三角形域上构造对边界曲线和跨界导数插值的三角曲面是计算机辅助几何设计和计算机图形学等领域中的基本问题.此类问题称为三角形域上的超限插值问题.对现有三角形域上的超限插值方法进行了综述,并对现有三角形域上的超限插值方法以具体实例进行了比较.最后讨论了现有三角形域上的超限插值方法中有待进一步解决的问题.

**关键词:** 三角曲面片;超限插值;多项式;布尔和;曲面参数化

中图法分类号: TP391 文献标识码: A

在 CAGD(computer aided geometry design),CG(computer graphics)和自由曲面造型中,三角曲面片的构造占有重要的地位.在曲面造型过程中,构造一张曲面,光滑地连接三张曲面,从而形成整体曲面是经常遇到的一个问题.由于所连接的曲面可以是任意曲面,因此所要构造的曲面的边界是任意形式的曲线.这种对任意边界条件的插值称为超限插值.本文对现有三角形域上的超限插值方法进行综述.一种插值方法被称为具有  $n$  次多项式的插值精度,如果给定的插值条件取自一张  $n$  次多项式曲面,插值方法构造的插值曲面就是该  $n$  次多项式曲面.

1964 年,美国工程师 Coons 提出了在矩形域上由边界曲线构造插值曲面的方法,称为 Coons 曲面方法.该方法和 Bezier 曲线曲面方法一起为 CAGD 和 CG 的形成和发展奠定了坚实的基础.Barnhill,Birkhoff 和 Gordon<sup>[1]</sup> 推广了 Coons 曲面构造方法的思想,提出了在三角形域上由边界曲线构造插值三角曲面片的方法.该方法和 Coons 曲面构造方法一样,采用布尔和算子构造三角曲面片,并且要求给定的插值条件满足相容性.如果给定的

\* Received 2006-05-18; Accepted 2007-01-19

插值条件不满足相容性,则所构造的三角曲面片上还需加上一个修整项,以去掉不相容性<sup>[2,3]</sup>.

Gregory<sup>[4,5]</sup>使用凸组合的方法构造三角曲面片,所构造的三角曲面片由3个插值算子的凸组合构成,每个插值算子均满足三角形两条边上的插值条件.文献[4,5]中的思想在文献[6,7]中进行了推广,并得到了构造四边形和五边形曲面的方法.文献[8-10]给出了构造五边形曲面的方法.文献[11-13]给出了  $n$  边形曲面的构造方法.Nielson<sup>[14]</sup>提出的点-边插值方法也使用3个插值算子的组合构造三角曲面片,每个算子满足一个点及其对边上的插值条件.文献[4,5,12]中提出的方法都具有三次多项式插值精度.Hagen<sup>[15]</sup>进一步发展了点-边插值方法,提出了构造几何三角曲面片的方法,但该方法没有讨论在一般情况下如何确定跨界切矢长度.文献[14,15]中的结果已被一般化为构造具有一阶或二阶几何连续的三角曲面片的方法<sup>[16,17]</sup>.文献[18]中的方法将三角形细分为两个子三角形,在每个子三角形上各构造一张曲面片,两张曲面在公共边界上满足  $C^1$  连续,所生成的三角曲面片具有四次多项式插值精度.文献[19-25]也对构造三角曲面片问题进行了研究,但其中提出的方法不是对任意边界曲线插值,而是由在三角形顶点处给定的插值条件构造边界曲线,然后构造对边界曲线插值的曲面.

文献[26]提出了移动三角形的插值方法,该方法具有三次多项式插值精度.文献[27]提出了一种由4个插值算子的组合构造插值三角曲面片的方法,其中包括1个内部插值算子和3个点边算子<sup>[14]</sup>.内部插值算子和传统的插值算子的区别是,它不仅考虑了三角形边界,而且考虑了三角形内部的曲面形状,所生成的三角曲面片具有四次多项式插值精度.文献[28]对文献[27]中的方法作了改进,把点边算子<sup>[14]</sup>改成四次插值曲线,从而提高了曲面的插值精度.文献[29]提出了一种构造三角曲面片的新方法,三角曲面片由基本逼近算子加上附加算子形成.该曲面也可以看作是由基本逼近算子和 Neilson 算子的布尔和生成,其中基本算子是一个五次多项式曲面,而 Neilson 算子是由点-边插值方法产生的.基本算子使得三角曲面片具有五次多项式的逼近精度,Neilson 算子使三角曲面片满足给定的插值条件,从而使构造的三角曲面片在满足给定的  $C^1$  边界条件下具有五次多项式插值精度.

本文第1节给出问题的描述和面积坐标.第2节~第4节对现有的在三角形域上构造对边界曲线插值的曲面的方法进行综述.第5节以实例对现有方法进行比较.第6节讨论现有方法中有待解决的问题.

### 1 问题的描述和面积坐标

设  $T$  是在  $xy$  平面上有顶点  $v_i = (x_i, y_i)(i=1,2,3)$  的一个三角形,  $s_i$  表示  $v_i$  的对边,  $n_i$  是边  $s_i$  上的单位外法向量,如图1所示.在三角形  $T$  的边界上给定的插值条件是边界曲线  $F(s_i)$  和跨界导数曲线  $\frac{\partial F(s_i)}{\partial n_i}, i=1,2,3$ , 目标是在  $T$  上构造一张三角曲面片  $P_T(x, y)$ , 满足给定的边界曲线  $F(s_i)$  和跨界导数曲线  $\frac{\partial F(s_i)}{\partial n_i}, i=1,2,3$ . 不失一般性,假设给定的边界曲线和跨界导数曲线取自  $T$  上定义的  $C^1$  函数  $F(x, y)$ .

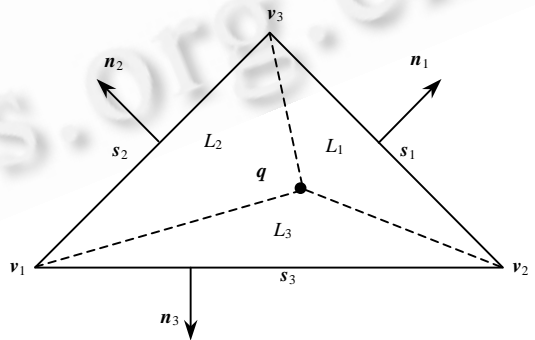


Fig.1 Area cooperate of point  $q$

图1 点  $q$  的面积坐标

本文将采用面积坐标描述各类构造三角曲面片  $P_T(x, y)$  的方法.给定  $T$  中的一个点  $q, q$  关于  $T$  的面积坐标记为  $(L_1, L_2, L_3)$ .  $(L_1, L_2, L_3)$  具有下述性质:(1)  $L_i$  是一个线性函数,在点  $v_i$  处的值为1,在边  $s_i$  上的值为0,  $i=1,2,3$ ; (2)  $q = L_1v_1 + L_2v_2 + L_3v_3$ .

### 2 三次精度插值方法

本节介绍的3种方法的插值精度均为三次多项式.

2.1 点-边插值方法

点-边插值方法<sup>[4]</sup>使用 3 个插值算子的组合来构造三角曲面片,其中每个算子满足一个点及其对边上的插值条件.该方法简述如下:对于  $T$  上任意一点  $q=(L_1, L_2, L_3)$ , 设  $q_i=(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$  是  $v_i$  和  $q$  的连线与边  $s_i$  的交点,  $i=1,2,3$ , 从  $v_i$  到  $q_i$  的单位向量记为  $\tau_i, i=1,2,3$ , 如图 2 所示.由直接计算得到,  $q_1 = \frac{L_2 v_2 + L_3 v_3}{L_2 + L_3}, q_2 = \frac{L_1 v_1 + L_3 v_3}{L_1 + L_3}, q_3 = \frac{L_1 v_1 + L_2 v_2}{L_1 + L_2}$ .

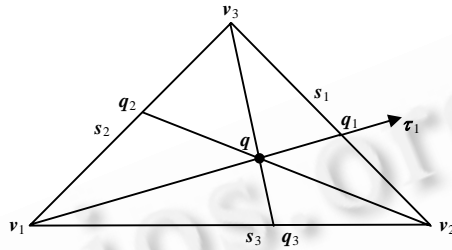


Fig.2 Intersection point  $q_i(i=1,2,3)$

图 2 交点  $q_i(i=1,2,3)$

在点  $v_i$  和  $q_i$  处给定的边界函数值以及沿着方向  $\tau_i$  的跨界导数值分别是  $F(v_i)$  和  $\frac{\partial F(v_i)}{\partial \tau_i}, F(q_i)$  和  $\frac{\partial F(q_i)}{\partial \tau_i}, i=1,2,3$ . 设  $v_i$  到  $q$  和  $q_i$  的距离分别是  $t$  和  $d_i$ . 对  $v_i$  和  $q_i$  处给定的边界函数值以及沿着方向  $\tau_i$  的跨界导数值插值的三次 Hermite 曲线  $N_i(t)$  定义如下:

$$N_i(t) = h_0\left(\frac{t}{d_i}\right)F(v_i) + h_1\left(\frac{t}{d_i}\right)d_i \frac{\partial F(v_i)}{\partial \tau_i} + g_0\left(\frac{t}{d_i}\right)F(q_i) + g_1\left(\frac{t}{d_i}\right)d_i \frac{\partial F(q_i)}{\partial \tau_i} \quad (1)$$

其中,  $h_0(t) = 1 - 3t^2 + 2t^3, h_1(t) = 3t^2 - 2t^3; g_0(t) = t - 2t^2 + t^3, g_1(t) = t^3 - t^2$ , 是  $[0,1]$  区间上的三次 Hermite 基函数.

因为  $t/d_i = 1 - L_i$ , 故  $N_i(t)$  在  $t$  处的值为

$$N_i(x, y) = h_0(1 - L_i)F(v_i) + h_1(1 - L_i)d_i \frac{\partial F(v_i)}{\partial \tau_i} + h_2(1 - L_i)F(q_i) + h_3(1 - L_i)d_i \frac{\partial F(q_i)}{\partial \tau_i}, i=1,2,3 \quad (2)$$

Neilson 的方法<sup>[6]</sup>定义的插值曲面  $P_T(x, y)$  可写成

$$P_T(x, y) = w_1 N_1(L_1, L_2, L_3) + w_2 N_2(L_1, L_2, L_3) + w_3 N_3(L_1, L_2, L_3) \quad (3)$$

其中

$$w_1 = L_2^2 L_3^2 / W, w_2 = L_3^2 L_1^2 / W, w_3 = L_1^2 L_2^2 / W, W = L_2^2 L_3^2 + L_3^2 L_1^2 + L_1^2 L_2^2 \quad (4)$$

2.2 边-边插值方法

边-边插值方法<sup>[4]</sup>也使用 3 个插值算子的组合构造三角曲面片,但与 Neilson 方法<sup>[6]</sup>不同的是,每个算子满足相邻两条边上的插值条件.该方法简述如下:对于  $T$  上的任意一点  $q=(L_1, L_2, L_3)$ , 过点  $q$  与边  $s_i$  平行的直线记为  $e_i, e_i$  和三角形  $T$  两条边的交点分别为  $S_j^i$  和  $S_k^i$ , 如图 3 所示.则

$$S_j^i = L_i v_j + (1 - L_i) v_k, S_k^i = L_i v_i + (1 - L_i) v_j \quad (5)$$

对于顶点  $v_i$ , 记三角形  $T$  内的点  $q=(L_1, L_2, L_3)$  处的函数值为  $P(L_1, L_2, L_3)$ . 则对  $S_j^k$  和  $S_k^j$  处给定的插值条件插值的曲面定义如下:

$$P_i(L_1, L_2, L_3) = F(S_j^k) + L_j F_{n_j}(S_j^k) + F(S_k^j) + L_k F_{n_k}(S_k^j) - F(v_i) - L_j F_j(v_i) - L_k F_k(v_i) - L_j L_k F_{n_j, n_k}(v_i) \quad (6)$$

其中:  $(i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1)$ , 或者  $(3, 1, 2)$ ;  $F(s_i)$  和  $F_{n_i}(s_i)$  分别表示边  $s_i$  上给定的边界曲线和边界跨界导数.

由式(6)的凸组合可以得到如下定义的曲面<sup>[4]</sup>:

$$P_T(x, y) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i(L_1, L_2, L_3) P_i(L_1, L_2, L_3) \tag{7}$$

其中,

$$\alpha_i(L_1, L_2, L_3) = L_i^2(3 - 2L_i + 6L_jL_k),$$

$$\alpha_1(L_1, L_2, L_3) + \alpha_2(L_1, L_2, L_3) + \alpha_3(L_1, L_2, L_3) = 1.$$

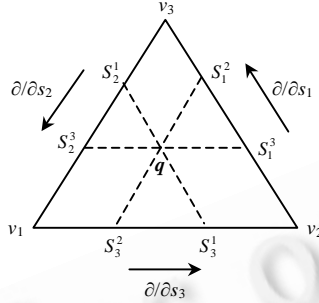


Fig.3 Triangle  $T$  (side-side interpolation)

图 3 三角形  $T$ (边-边插值)

### 2.3 移动三角形插值方法

移动三角形插值方法<sup>[26]</sup>的基本思想是:三角形上构造的曲面的精度和三角形的面积成反比,因此在构造插值曲面时,应尽可能地利用最近的插值条件来拟合未知点处的函数值.移动三角形插值方法的基本构造过程如下:对于  $T$  中的点  $q = (x, y)$ , 设点  $q$  到边  $s_i$  的最近点为  $w_i = (x'_i, y'_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , 如图 4 所示.  $T$  上的曲面由下式定义:

$$P_T(x, y) = \sum_{i=1,2,3} \left( (3 - 2L_i)F(w_i) + (x - x'_i) \frac{\partial F(w_i)}{\partial x} + (y - y'_i) \frac{\partial F(w_i)}{\partial y} \right) + A_T L_1 L_2 L_3 \tag{8}$$

其中,  $A_T$  的值通过使  $P_T(x, y)$  在最小二乘意义下逼近点  $v_j = (x_j, y_j)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) 处给定的函数值的方式来确定,即

$$A_T = \frac{\sum_{j=1,2,3} \sum_{i=1,2,3} \left( F_j - (3 - 2L_i(x_j, y_j))F(w_i) + (x_j - x'_i) \frac{\partial F(w_i)}{\partial x} + (y_j - y'_i) \frac{\partial F(w_i)}{\partial y} \right)}{\sum_{j=1,2,3} L_1(x_j, y_j) L_2(x_j, y_j) L_3(x_j, y_j)} \tag{9}$$

根据最小二乘逼近的性质,容易证明该方法的多项式插值精度为三次多项式.

如果给定的三角形不是锐角三角形,如图 5 所示,点  $q$  到 3 条边最近的点可能在三角形的外面.对于最近点不在三角形内部的情况,可取与最近点最近的三角形顶点来代替最近点.在如图 5 所示的情况下,可取  $v_1$  代替  $w_2$  点.

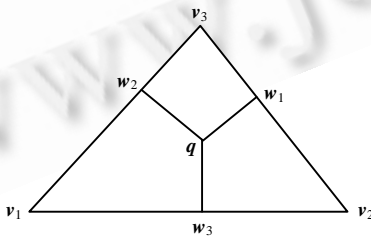


Fig.4 Three nearest points of  $q$

图 4  $q$  的 3 个最近点

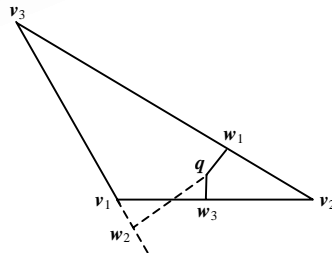


Fig.5 Special cases

图 5 特殊情况

### 3 四次精度插值方法

本节介绍的 3 种方法的插值精度均为四次多项式.

3.1 边-边四次精度方法

边-边四次精度方法<sup>[18]</sup>的基本思想与移动三角形插值方法类似,都是应尽可能地利用最近的插值条件来拟合未知点处的函数值.边-边四次精度方法构造曲面的过程如下:给定三角形  $T$ ,如图 6 所示,设  $T$  的最长边为  $v_1v_3$ ,取过顶点  $v_2$  且垂直于最长边  $v_1v_3$  的直线为  $x$  轴,边  $v_1v_3$  为  $y$  轴,令  $x_0$  表示点  $o$  到点  $v_2$  的距离.在图 6 中  $s_1, s_3$  分别表示边  $v_1v_2$  和  $v_2v_3$  的方向,边  $de$  平行于边  $ov_2$ ,设点  $d$  和  $e$  的坐标分别为  $(0, y)$  和  $(m, y)$ ,记  $F' = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}$ . 设  $q = (x, y)$  是边  $de$  上的任意一点,点  $(x, y)$  处的函数值  $P(x, y)$  由下式定义:

$$P(x, y) = h_0\left(\frac{x}{m}\right)F(0, y) + h_1\left(\frac{x}{m}\right)mF'(0, y) + g_0\left(\frac{x}{m}\right)F(m, y) + g_1\left(\frac{x}{m}\right)mF'(m, y) \quad (10)$$

其中:  $h_0(t), h_1(t), g_0(t), g_1(t)$  由式(1)定义;  $m$  为边  $de$  的长度.

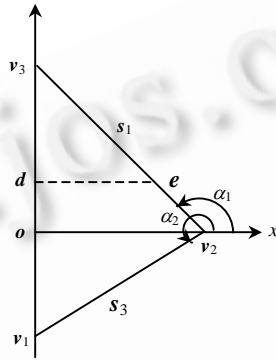


Fig.6 Triangle  $v_1v_2v_3$   
图 6 三角形  $v_1v_2v_3$

当边  $de$  位于边  $ov_2$  的上面和下面时,式(10)中的  $m$  有不同的定义,从而使得函数  $P_T(x, y)$  在边  $ov_2$  上沿  $y$  方向的导数不连续,因此式(10)定义的  $P(x, y)$  要加上一个误差函数,设该误差函数为  $C_0\phi(x, y)$ ,其中

$$\phi(x, y) = x^2(x - m)^2 \quad (11)$$

根据边界的连续性可以得到:

$$C_0 = \frac{1}{2x_0^4} (6F(x_0, 0) - 6F(0, 0) - 2F'(0, 0)x_0 - 4F'(x_0, 0)x_0) + \frac{1}{2x_0^2(C_1 - C_2)} \left( \frac{\partial F'}{\partial s_1}(x_0, 0+) (\sin \alpha_1)^{-1} - \frac{\partial F'}{\partial s_2}(x_0, 0-) (\sin \alpha_2)^{-1} \right) \quad (12)$$

其中,  $C_1 = \text{ctg} \alpha_1, C_2 = \text{ctg} \alpha_2$ .

这样,由式(10)~式(12)得到边-边四次精度方法定义的曲面如下:

$$P_T(x, y) = P(x, y) + C_0\phi(x, y) \quad (13)$$

3.2 四算子插值方法

四算子插值方法<sup>[27]</sup>由 4 个插值算子的组合构造插值三角曲面片.4 个算子为 1 个内部插值算子和 3 个点边算子<sup>[14]</sup>,内部插值算子不仅考虑了三角形边界,而且考虑了三角形内部的曲面形状,所生成的三角曲面片具有四次多项式插值精度.点边算子用来使构造的三角曲面片满足给定的边界曲线和跨界导数.

构造内部插值算子的基本过程如下:对于  $T$  上的任意一点  $q = (x, y)$ ,设  $q_i = (\bar{x}_i, \bar{y}_i)$  是  $v_i$  和  $q$  的连线与边  $s_i$  的交点,  $i = 1, 2, 3$ .从  $v_i$  到  $q_i$  的单位向量记为  $\tau_i, i = 1, 2, 3$ ,如图 7 所示.设点  $q$  处的函数值已知,设为  $P(x, y)$ ,则由点  $v_i, q$  和  $q_i$  处的函数值  $F(v_i), P(x, y)$  和  $F(q_i)$ ,沿  $\tau_i$  方向的一阶偏导数  $\frac{\partial F(v_i)}{\partial \tau_i}$  和  $\frac{\partial F(q)}{\partial \tau}$  可构造一条四次多项式曲线  $f_i(t)$ .令  $l_i$  和  $d_i$  分别表示点  $v_i$  到  $q$  和  $q_i$  的距离,则曲线  $f_i(t)$  的定义如下:

$$f_i(t) = N_i(t) + [P(x, y) - N_i(l_i)] \frac{t^2(t - d_i)^2}{l_i^2(l_i - d_i)^2}, \quad i=1,2,3 \quad (14)$$

其中,  $N_i(t)$  是由式(1)定义的满足端点  $v_i$  和  $q_i$  处给定插值条件的三次 Hermite 插值曲线.

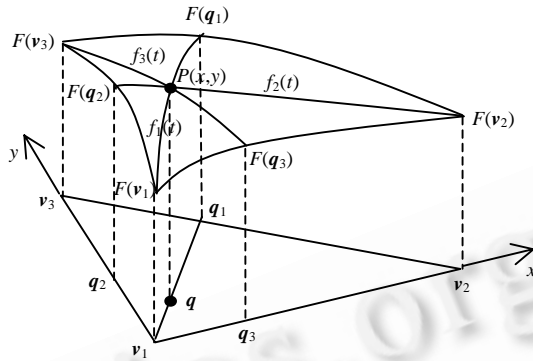


Fig.7 Curve  $f_i(t)$  with interpolation condition of passing by  $v_i, P, q_i$

图 7 过  $v_i, P, q_i$  处插值条件的曲线  $f_i(t)$

曲线  $f_i(t)$  过点  $P(x, y), i=1,2,3$ , 如果 3 条曲线在同一曲面上, 则 3 条曲线在点  $P(x, y)$  处相切. 由 3 条曲线在点  $P(x, y)$  处的切线共面, 可得如下方程:

$$\left[ \left( \frac{df_1(s_1)}{d\tau_1} \times \frac{df_2(s_2)}{d\tau_2} \right) \cdot \frac{df_3(s_3)}{d\tau_3} \right] = 0.$$

解上式即可求出内部算子  $P(x, y)$ .

曲面  $P(x, y)$  一般不满足给定的插值条件, 但在三角形的内部具有较好的逼近精度. 可通过点-边插值方法<sup>[14]</sup>构造另外 3 个插值算子, 通过 4 个算子的组合构造三角曲面片  $P_T(x, y)$ ,

$$P_T(x, y) = w_c P(x, y) + w_1 N_1(x, y) + w_2 N_2(x, y) + w_3 N_3(x, y) \quad (15)$$

其中,  $w_1 = L_2^2 L_3^2 / W_T, w_2 = L_3^2 L_1^2 / W_T, w_3 = L_1^2 L_2^2 / W_T, w_c = 27 L_1 L_2 L_3 / W_T, W_T = L_2^2 L_3^2 + L_3^2 L_1^2 + L_1^2 L_2^2 + 27 L_1 L_2 L_3$ .

### 3.3 四算子插值方法的改进

文献[28]对四算子插值<sup>[27]</sup>方法做了改进, 把式(15)中的  $N_i(x, y), i=1,2,3$  换成四次多项式曲线. 该四次多项式曲线由顶点  $v_i$  处的函数值, 一、二阶偏导数,  $q_i$  处的函数值, 一阶偏导数来定义,  $i=1,2,3$ .

## 4 五次精度插值方法

本节介绍的两种方法的插值精度均为五次多项式.

### 4.1 布尔和插值方法

布尔和插值方法<sup>[1]</sup>是四边形域上的 Coons 插值方法的直接推广. 对  $T$  中的点  $q = (x, y)$ , 设过点  $q$  与边  $s_3$  平行的直线  $e_3$  和三角形  $T$  两条边的交点分别为  $S_2^3, S_1^3$ , 如图 8 所示, 则

$$S_2^3 = L_3 v_3 + (1 - L_3) v_1, \quad S_1^3 = L_2 v_2 + (1 - L_2) v_3.$$

满足点  $S_2^3$  和点  $S_1^3$  处给定的插值条件的三次 Hermite 插值曲线记为  $P_1 F(x, y)$ , 令  $d_3 = 1 - L_3, \partial / \partial s_i$  表示沿边  $e_i$  的方向求导, 则

$$P_1 F(x, y) = h_0 \left( \frac{L_2}{d_3} \right) F(S_2^3) + l_3 h_1 \left( \frac{L_2}{d_3} \right) \frac{\partial F(S_2^3)}{\partial s_3} + g_0 \left( \frac{L_2}{d_3} \right) F(S_1^3) + l_3 g_1 \left( \frac{L_2}{d_3} \right) \frac{\partial F(S_1^3)}{\partial s_3} \quad (16)$$

其中:  $h_0(t), h_1(t), g_0(t), g_1(t)$  由式(1)定义;  $l_3$  为点  $S_2^3$  到  $S_1^3$  的距离.

点  $q$  为三角形  $T$  中任意一点, 由三次 Hermite 插值曲线的性质可知,  $P_1 F(x, y)$  在边  $s_2$  和  $s_1$  上满足给定的插值

条件,但在边  $s_3$  上一般不满足给定的插值条件.设过点  $q$  与边  $s_2$  平行的直线  $e_2$  和三角形  $T$  两条边的交点分别为  $S_3^2$  和  $S_1^2$ .  $S_3^2$  和  $S_1^2$  可用与式(16)类似的方法得到.令  $d_2 = 1 - L_2$ ,则对点  $S_3^2$  和点  $S_1^2$  处给定的插值条件插值的三次 Hermite 插值曲线  $P_2F(x, y)$  定义如下:

$$P_2F(x, y) = h_0 \left( \frac{L_3}{d_2} \right) F(s_3^2) + l_2 h_1 \left( \frac{L_3}{d_2} \right) \frac{\partial F(s_3^2)}{\partial s_2} + g_0 \left( \frac{L_3}{d_2} \right) F(s_1^2) + l_2 g_1 \left( \frac{L_3}{d_2} \right) \frac{\partial F(s_1^2)}{\partial s_2} \quad (17)$$

其中,  $h_0(t), h_1(t), g_0(t), g_1(t)$  由式(1)定义;  $l_2$  为点  $S_3^2$  到  $S_1^2$  的距离.

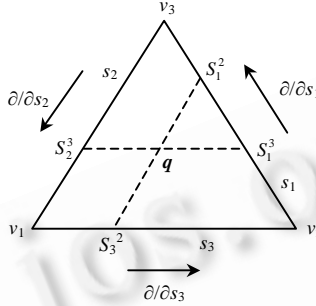


Fig.8 Triangle  $T$  (Boolean interpolation)

图 8 三角形  $T$ (布尔和插值)

三角形  $T$  上的布尔和插值曲面片定义如下:

$$F(x, y) = P_1F(x, y) + P_2F(x, y) - P_2P_1F(x, y) \quad (18)$$

其中:  $P_1F(x, y)$  和  $P_2F(x, y)$  分别用式(16)和式(17)定义;  $P_2P_1F(x, y)$  为先对  $F(x, y)$  用式(16)构造插值曲面  $P_1F(x, y)$ , 然后再对  $P_1F(x, y)$  用式(17)构造插值曲面  $P_2P_1F(x, y)$ .

如果给定的插值条件满足相容性,则式(18)定义的曲面满足给定的插值条件.在实际应用中给定的插值条件一般不满足相容性.所谓给定插值条件在点  $v_1$  处满足相容性是指以下条件成立:

$$\frac{\partial^2 F_2(v_1)}{\partial s_2 \partial s_3} = \frac{\partial^2 F_3(v_1)}{\partial s_3 \partial s_2},$$

其中,  $F_2(s_2)$  和  $F_3(s_3)$  分别表示在边  $s_2$  和  $s_3$  上给定的插值条件.

在实际应用中,  $F_2(s_2)$  和  $F_3(s_3)$  一般由不同的曲面定义,因此很难在点  $v_1$  处满足相容性.布尔和插值方法有两个缺点:不对称性和点  $v_1$  邻域的曲面偏平.

### 4.2 基本曲面加附加曲面方法

基本曲面加附加曲面方法<sup>[29]</sup>在三角形  $T$  上构造的曲面片由基本曲面和附加曲面组成.其中,基本曲面是一个五次多项式,而附加曲面由 Neilson 的点-边插值方法产生.基本曲面和附加曲面在构造三角形面片  $P_T(x, y)$  中起着不同的作用,前者使  $P_T(x, y)$  以五次多项式的精度逼近插值条件,后者则使  $P_T(x, y)$  满足给定的插值条件.

基本曲面由下式定义:

$$P(x, y) = F(v_1)L_1^5 + (A_{410}L_2 + A_{401}L_3)L_1^4 + (A_{320}L_2^2 + A_{302}L_3^2 + A_{311}L_2L_3)L_1^3 + F(v_2)L_2^5 + (A_{041}L_3 + A_{140}L_1)L_2^4 + (A_{032}L_3^2 + A_{230}L_1^2 + A_{131}L_1L_3)L_2^3 + F(v_3)L_3^5 + (A_{104}L_1 + A_{014}L_2)L_3^4 + (A_{203}L_1^2 + A_{023}L_2^2 + A_{113}L_1L_2)L_3^3 + A_{221}L_1^2L_2L_3 + A_{122}L_1L_2L_3^2 + A_{212}L_1^2L_2L_3^2 \quad (19)$$

其中,  $A_{ijk}$  ( $i + j + k = 5$ ) 由以下条件确定:在三角形  $T$  的顶点  $v_i = (x_i, y_i)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 处,  $P(x, y)$  满足给定的插值条件;在  $T$  的边界上,  $P(x, y)$  逼近给定的插值条件.

由于给定插值条件的任意性,曲面  $P(x, y)$  一般不满足给定的插值条件.这样就需要构造一个满足误差条件  $F(s_i) - P(s_i)$  和  $\frac{\partial F(s_i)}{\partial \tau_i} - \frac{\partial P(s_i)}{\partial \tau_i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 的附加曲面.附加插值曲面  $N(x, y)$  由点边插值方法<sup>[14]</sup>产生.

三角形  $T$  上的三角曲面片  $P_T(x, y)$  定义为

$$P_T(x, y) = P(x, y) + N(x, y) \quad (20)$$

因为  $P(x, y)$  以五次多项式的插值精度逼近  $T$  上给定的函数  $F(x, y)$ ,  $N(x, y)$  是插值  $T$  上  $C^1$  连续的误差边界条件  $F(x, y) - P(x, y)$  的附加函数, 所以  $P(x, y)$  对  $P_T(x, y)$  的形状有较大的影响, 而  $N(x, y)$  可以被看作是使  $P_T(x, y)$  满足给定插值条件的误差面片.  $P(x, y)$  算子具有五次多项式的插值精度, 因此, 如果  $F(x, y)$  是五次多项式曲面, 则  $T$  上的  $C^1$  误差边界条件满足  $F(s_i) - P(s_i) = 0$  和  $\frac{\partial F(s_i)}{\partial \tau_i} - \frac{\partial P(s_i)}{\partial \tau_i} = 0, i = 1, 2, 3$ , 所以  $N(x, y) = 0$ . 因此,  $P_T(x, y)$  与  $P(x, y)$  具有相同的多项式插值精度, 也即具有五次多项式的插值精度.

## 5 方法的比较

高光线<sup>[30]</sup>已被证明是评价曲面质量的有效工具. 本节将使用高光线模型对现有方法进行比较. 第 2 节~第 4 节中的三次、四次和五次多项式插值精度方法分别称为方法 3-1<sup>[14]</sup>、方法 3-2<sup>[5]</sup>和方法 3-3<sup>[26]</sup>, 方法 4-1<sup>[18]</sup>、方法 4-2<sup>[27]</sup>和方法 4-3<sup>[28]</sup>, 方法 5-1<sup>[1]</sup>和方法 5-2<sup>[29]</sup>. 由 Franke 提出的 6 个双变量函数用作比较的实例<sup>[31]</sup>, 6 个函数是:

$$\left. \begin{aligned} F_1(x, y) &= 3.9 \exp[-0.25(9x-2)^2 - 0.25(9y-2)^2] + 3.9 \exp[-(9x+1)^2/49 - (9y+1)/10] + \\ &\quad 2.6 \exp[-0.25(9x-7)^2 - 0.25(9y-3)^2] - 1.04 \exp[-(9x-4)^2 - (9y-7)^2], \\ F_2(x, y) &= 5.2 \exp[18y - 18x] / (9 \exp[18y - 18x] + 9), \\ F_3(x, y) &= 5.2 [1.25 + \cos(5.4y)] / [6 + 6(3x-1)^2], \\ F_4(x, y) &= 5.2 \exp[-81((x-0.5)^2 + (y-0.5)^2) / 16] / 3, \\ F_5(x, y) &= 5.2 \exp[-81((x-0.5)^2 + (y-0.5)^2) / 4] / 3, \\ F_6(x, y) &= 5.2 \sqrt{64 - 81((x-0.5)^2 + (y-0.5)^2)} / 9 - 2.6 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

文献[31]提出的有 33 个点的点集被用来生成三角形网格, 并采用 Lawson<sup>[32]</sup>提出的最大-最小标准对点集做三角划分, 结果如图 9 所示.

用来作比较的插值条件是三角形上的边界曲线和跨界导数, 这些插值条件取自上面的曲面  $F_1(x, y) \sim F_6(x, y)$ . 对 6 个曲面比较的结果如图 10~图 12 所示. 对  $F_3(x, y)$  和  $F_4(x, y)$ , 5 种方法的插值效果与对  $F_1(x, y)$  和  $F_2(x, y)$  的插值效果在视觉上基本类似, 对  $F_6(x, y)$ , 5 种方法的插值效果与对  $F_5(x, y)$  的插值效果在视觉上基本类似, 所以, 在图 10~图 12 中只给出了对  $F_1(x, y)$ ,  $F_2(x, y)$  和  $F_5(x, y)$  的比较结果. 在图 10~图 12 中, 三次多项式插值精度的 3 种方法中只以方法 3-1 为代表给出了比较结果, 因为从逼近角度看, 三次插值精度的方法明显要比高于三次插值精度的方法的逼近精度差. 而方法 4-3 是对方法 4-2 的改进, 本质上没有明显的差别, 因此方法 4-3 的比较结果也没有给出. 在图 10~图 12 中, 每个曲面实例都以它们的高光线模型给出. 确切地说, 图 10 中的曲面实例是高光线模型在  $xy$  平面上的正投影. 比较结果说明, 5 种方法对曲面  $F_1(x, y) \sim F_4(x, y)$  的插值效果在视觉上有着明显的差别, 而对  $F_5(x, y)$  和  $F_6(x, y)$  的插值效果在视觉上没有明显的差别, 其形状都是比较理想的.

参数曲面的第 1 步是对插值条件作统一性处理, 使 3 条边界上的插值条件定义在相同的参数空间. 文献[16, 17]对文献[14]中的方法进行了推广, 提出了构造几何三角形面片的方法, 但没有给出一般性的方法来确定三次 Hermite 插值曲线端点处切向量的长度. 文献[16, 17]中建议取单位向量显然不是一个很好的选择, 当三角形  $T$  的面积较大时, 取单位向量将使构造的曲面中间部分扁平; 当三角形  $T$  的面积较小时, 取单位向量将使构造的曲面中间部分过分凸起.

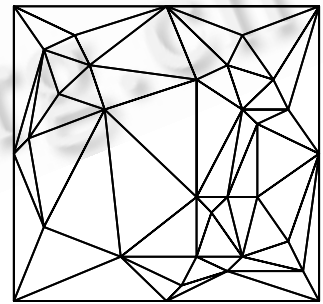


Fig.9 33-Point-Triangled mesh

图 9 33 个点的三角化网格



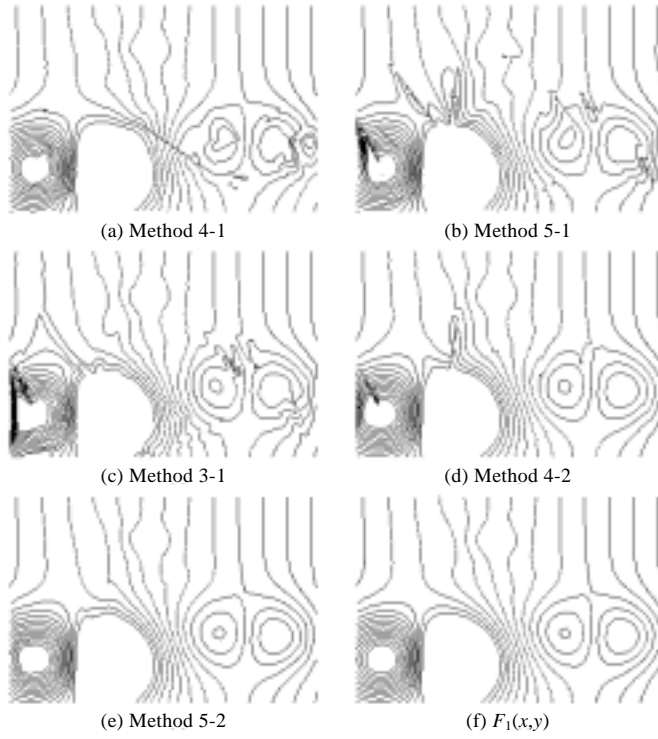


Fig.10 Surface  $F_1(x,y)$  and its approximation surfaces  
图 10 曲面  $F_1(x,y)$ 及其逼近曲面

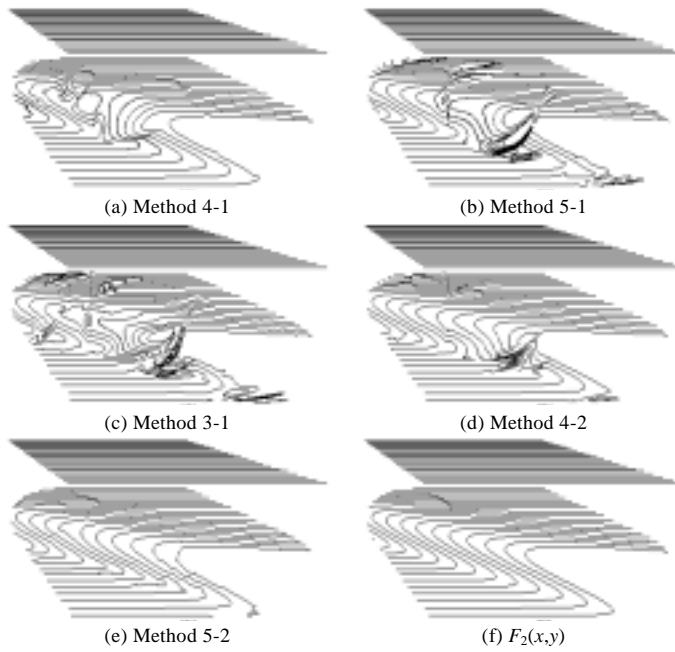


Fig.11 Surface  $F_2(x,y)$  and its approximation surfaces  
图 11 曲面  $F_2(x,y)$ 及其逼近曲面

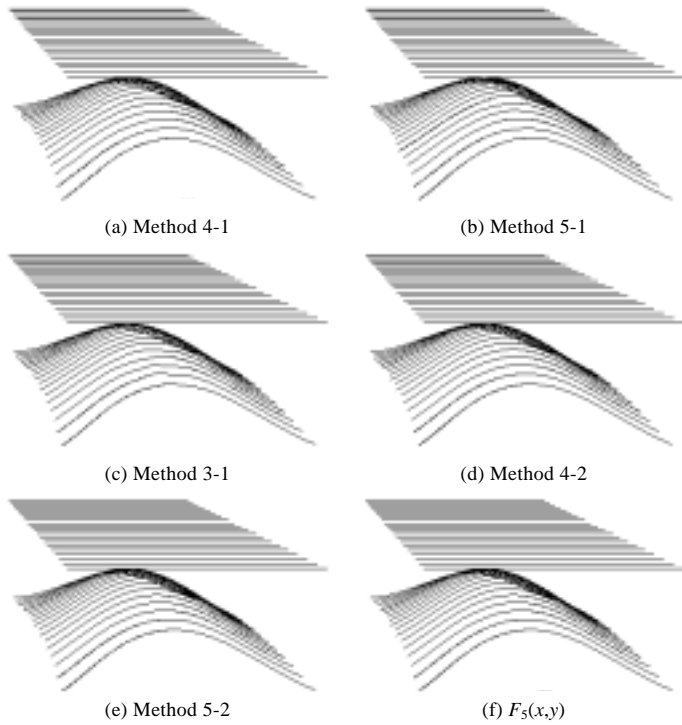


Fig.12 Surface  $F_5(x,y)$  and its approximation surfaces  
 图 12 曲面  $F_5(x,y)$ 及其逼近曲面

作为例子,我们把式(21)中的  $F_5(x,y)$  改成如下参数形式:

$$\left. \begin{aligned} x_5(u,v) &= u, \\ y_5(u,v) &= v, \\ Z_5(u,v) &= 5.2 \exp[-81((u-0.5)^2 + (v-0.5)^2)/4]/3 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

然后,用式(22)在如图 9 所示的三角形网格上定义插值条件,插值条件是三角形上的边界曲线和跨界导矢.直接推广方法 4-1、方法 5-1、方法 3-1、方法 4-2 和方法 5-2 构造参数曲面,其中把在边界上的跨界导矢取成单位长度,5 种方法对式(21)的插值效果如图 13 所示.图 12 说明,5 种方法对曲面  $F_5(x,y)$  的插值效果和  $F_5(x,y)$  在视觉上并没有明显的差别,其形状都是比较理想的.而图 13 则说明,当  $F_5(x,y)$  用参数形式定义时,5 种方法对曲面  $F_5(x,y)$  的插值效果和  $F_5(x,y)$  在视觉上有明显的差别,插值曲面明显不光顺.图 13 说明,现有的超限插值方法不能直接被推广到构造参数三角曲面片上.

在 CAGD,CG 和自由曲面造型中,曲面一般是定义在单位参数域上的,因此在参数情况下的超限插值,三角形  $T$  的 3 条边界一般定义在单位长参数区间上.如何重新定义 3 条边界对应的参数区间长度,并重新定义给定的插值条件使其定义在同一参数空间,是把现有超限插值方法直接推广到用来构造超限插值参数三角曲面片的关键,是一个有待解决的重要问题.

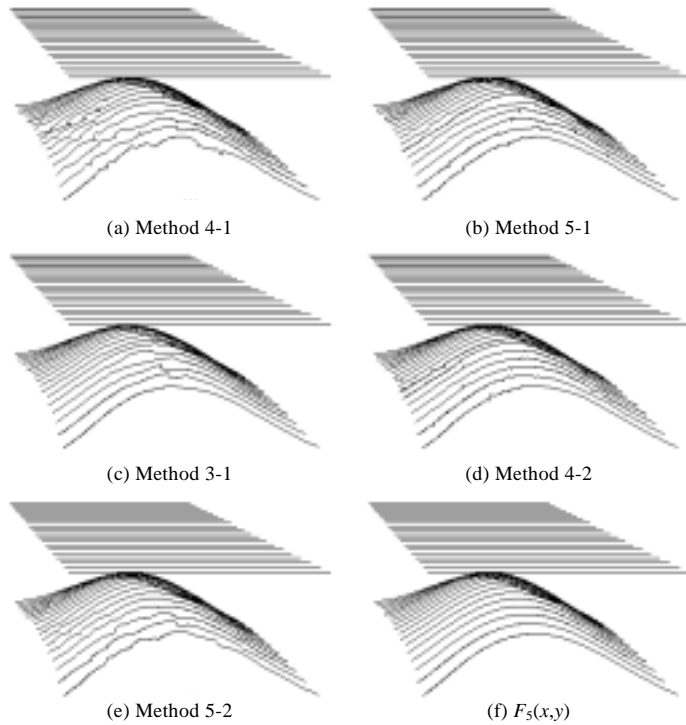


Fig.13 Surface  $F_5(x,y)$  and its parameter approximation surfaces

图 13 曲面  $F_5(x,y)$  及其参数逼近曲面

#### References:

- [1] Barnhill RE, Birkhoff G, Gordon WJ. Smooth interpolation in triangles. *Journal of Approximation Theory*, 1973,8:114–128.
- [2] Barnhill RE, Gregory JA. Compatible smooth interpolation in triangles. *Journal of Approximation Theory*, 1975,15:214–225.
- [3] Barnhill RE, Gregory JA. Polynomial interpolation to boundary data on triangles. *Mathematics of Computation*, 1975,29:726–735.
- [4] Gregory JA. Smooth interpolation without twist constraints. In: Barnhill RE, Riesenfeld RF, eds. *Computer Aided Geometric Design*. New York: Academic Press, 1974. 71–88
- [5] Gregory JA. A blending function interpolant for triangles, In: *Multivariate Approximation*. New York: Academic Press, 1978. 279–287.
- [6] Charrot P, Gregory JA. A pentagonal surface patch for computer aided geometric design. *Computer Aided Geometric Design*, 1984, 1(1):87–94
- [7] Gregory JA.  $C^1$  rectangular and non-rectangular surface patches. In: Barnhill RE, Boehm W, eds. *Surfaces in Computer Aided Geometric Design*. Amsterdam: North-Holland, 1983. 25–33.
- [8] Sabin MA. Parametric surface equations for non-rectangular regions. BAC Weybridge VTO/MS/147, 1968.
- [9] Sabin M. Non-Rectangular surface patches suitable for inclusion in a B-spline surface. In: *Proc. of the Eruographics'83*. North-Holland, 1983. 57–69.
- [10] Sabin MA. Some negative results in  $N$ -sided patches. *Computer Aided Design*, 1986,18(1):38–44.
- [11] Hosaka M, Kimura F. Non-Four-Sided patch expressions with control points. *Computer Aided Geometric Design*, 1984,1:75–86
- [12] Gregory JA.  $N$ -Sided surface patches. In: Gregory JA, ed. *The Mathematics of Surfaces*. Oxford: Oxford University Press, 1986, 217–232.
- [13] Varady T. Survey and new results in  $n$ -sided patch generation. In: Martin RR, ed. *The Mathematics of Surfaces II*. Oxford: Oxford University Press, 1987. 203–235.
- [14] Nielson GM. The side vertex method for interpolation in triangles. *Journal of Approximation Theory*, 1979,25:318–336.

- [15] Hagen H. Geometric surface patches without twist constraints. *Computer Aided Geometric Design*, 1986,3(3):179–184.
- [16] Hagen H. Curvature continuous triangular interpolants. In: Lyche T, Schumaker L, eds. *Methods in CAGD*. Oslo: Academic Press, 1989. 373–384.
- [17] Nielson GM. A transfinite, visually continuous, triangular interpolant. In: Farin G, ed. *Geometric Modeling, Applications and New Trends*. Philadelphia: SIAM, 1987. 235–246.
- [18] Wang CY.  $C^1$  rational interpolation over an arbitrary triangle. *Computer Aided Design*, 1983,15(1):33–36.
- [19] Hosaka M, Kimura F. Non-Four-Sided patch expressions with control points. *Computer Aided Geometric Design*, 1984,1:75–86.
- [20] Loop C, DeRose TD. A multisided generalization of Bezier surfaces. *ACM Trans. on Graphics*, 1989,8(3):204–234.
- [21] Loop C, DeRose TD. Generalized B-spline surfaces of arbitrary topology. *Proc. Siggraph'90*, 1990,24(4):347–356
- [22] Warren J. Creating multisided rational Bezier surfaces using base points. *ACM Trans. on Graphics*, 1992,11(2):127–139.
- [23] Foley TA, Opitz K. Hybrid cubic Bézier triangle patches. In: Lyche T, Schumaker L, eds. *Mathematical Methods for Computer Aided Geometric Design II*. Academic Press, 1992. 275–286.
- [24] Kuriyama S. Surface modeling with an irregular network of curves via sweeping and blending. *Computer Aided Design*, 1994, 26(8):597–606.
- [25] Varady T. Overlap patches: A new scheme for interpolating curve networks with  $n$ -sided regions. *Computer Aided Geometric Design*, 1991,8(1):7–27.
- [26] Zhang C, Agui T, Nagahashi H, Nagao T. A new method for smooth interpolation without twist constraints. *IEICE Trans. on Information and Systems*, 1993,E76-D(2):243–250.
- [27] Zhang C, Cheng F. Triangular patch modeling using combination method. *Computer Aided Geometric Design*, 2002,19(8): 645–662.
- [28] Yang XQ, Zhang CM, Wang JY.  $C^1$  polynomial interpolation surface of degree 4 on a triangle. *Journal of Computer-Aided Design and Computer Graphics*, 2003,15(5):583–587 (in Chinese with English abstract).
- [29] Zhang CM, Ji XH, Yang XQ. Constructing triangular patch by basic approximation operator plus additional interpolation operator. *Science in China Series F*, 2005,48(2):263–272.
- [30] Beier KP, Chen Y. The highlight-line algorithm for real-time surface-quality assessment. *Computer-Aided Design*, 1994,26(4): 268–278.
- [31] Franke R. A critical comparison of some methods for interpolation of scattered data. Technical Report, NPS-53-79-003, Naval Postgraduate School, 1979.
- [32] Lawson CL. Software for  $C^1$  surface interpolation. In: Rice JR, ed. *Mathematical Software III*. New York: Academic Press, 1977. 161–194.

## 附中文参考文献:

- [28] 杨兴强,张彩明,汪嘉业.三角形域上  $C^1$  连续的四次插值曲面. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2003,15(5):583–587.



徐琳(1964 - ),女,浙江宁波人,博士,副教授,主要研究领域为计算机图形学,人工智能.