ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
Journal of Software, Vol.18, No.2, February 2007, pp.213−219
DOI: 10.1360/jos180213

E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel/Fax: +86-10-62562563

图同构中的一类顶点细分方法*

邹潇湘[1+], 戴 琼[2]

[1](国家计算机网络与信息安全管理中心,北京 100029)
[2](中国科学院 软件研究所,北京 100080)

A Vertex Refinement Method for Graph Isomorphism

ZOU Xiao-Xiang[1+], DAI Qiong[2]

[1](National Computer Network and Information Security Administration Center, Beijing 100029, China)
[2](Institute of Software, The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)
+ Corresponding author: Phn: +86-10-82990356, E-mail: zxx@cert.org.cn

Zou XX, Dai Q. A vertex refinement method for graph isomorphism. *Journal of Software*, 2007,18(2):213−219. http://www.jos.org.cn/1000-9825/18/213.htm

Abstract: In this paper, a vertex refinement method is proposed. The new vertex invariant is defined based on the number of the paths for a given length. A comparison between this vertex invariant and some other general vertex invariants has been made. It is proved that this method is as fine as other methods, and examples are given to show that this method is better than others in some case. This vertex refinement method can be used in graph isomorphism algorithms to reduce the number of mapping between the vertexes.
Key words: graph isomorphism; exact graph isomorphism; partition; stable refinement; vertex invariant

摘 要: 提出一种顶点细分方法.基于顶点之间具有一定长度的路径数等信息,定义了一类顶点不变函数.将该方法与已有的一些顶点细分方法进行了比较.分析表明,基于路径数的顶点不变函数的细分效果,至少不差于基于顶点的度、距离等方法;而一些实例则表明前者要优于后者.基于路径数的顶点分类方法可以有效地用于图同构算法,能够降低所需比较的顶点数,达到快速搜索的效果.
关键词: 图同构;精确图同构;划分;稳定细分;顶点不变函数
中图法分类号: TP301 文献标识码: A

图同构问题(graph isomorphism problem)在对象识别[1]、数据编码[2]、分子、图像、网络的结构比较[3]等领域具有广泛的应用价值.根据顶点/边是否精确匹配,可以分为精确图同构和非精确图同构;根据在顶点匹配的过程中是部分匹配还是全部匹配,又可分为图同构和子图同构[4].在这些问题类中,不精确图同构、不精确子图同构、精确子图同构问题已被证明属于 NP 完备问题;而精确图同构问题既未被归入 NPC 问题,也未被归入 P 问题[4,5],是一个尚未得到彻底解决的问题,因此得到很多研究者的关注.已有人提出了一种图同构完备(isomorphism complete)的概念,以表示可以在多项式时间内归约为图同构的一类问题[6].对于一些类型的图,如

* Supported by the Youth Foundation of Institute of Computing Technology, the Chinese Academy of Sciences under Grant No.20056600-4 (中国科学院计算技术研究所青年基金)

Received 2005-11-15; Accepted 2006-04-26

平面图、区间图(interval graph)、树等,存在多项式算法,但正则图、二分图、弦图等是图同构完备的[7−9].本文主要对精确图同构问题加以讨论.

对于一般的图,目前一些算法有较好的匹配效率,对于上千个顶点的图,能够在可以接受的时间内完成匹配.在文献[10]中,对几种常见的图同构算法的性能进行了比较,如根据顶点的邻接关系来寻找同构的 Ullman 算法[11];利用顶点间的距离矩阵来降低搜索空间的 SD 算法[12];采用状态空间表示方法,利用顶点间的邻接关系进行快速搜索剪枝的 VF 算法[13];对 VF 算法进行了改进的 VF2 算法[14]以及 McKay 提出的首先将图表示为某种规范形式,然后再判断是否同构的著名的 Nauty(no automorphisms)算法[15].上述及其他一些图同构算法的关键一步,是在寻找匹配的过程中将顶点进行细分,比如基于顶点的邻接顶点的信息[11,13−15]、基于顶点的某个距离范围内顶点的信息[12,16]、基于顶点间最短路径的颜色信息[17]等.在本文中,我们提出基于顶点间的路径数来对顶点进行细分,并将其与已有方法进行比较.

1 基本概念和方法

图 G 定义为 $G(V,E)$,其中:$V=\{v_0,v_1,\ldots,v_{n-1}\}$表示顶点集合;$E=\{(u,v)|u,v\in V\}$表示连接顶点的边的集合.两个图是同构的,如果存在两图的顶点之间的一个映射,使得两图的边在该映射下也保持对应.一个图到自身的同构称为自同构.顶点集合 V 的划分(partition)是将 V 分为一些不相交的集合,每个集合称为一个单元(cell),这里,单元之间是有序的.划分习惯上也称为着色(color),每个单元中的顶点有一种颜色[18].一个划分 φ_1 称为划分 φ_2 的细分(refinement),如果 φ_1 的任何一个单元都是 φ_2 的某个单元的子集.顶点集合 V 的划分称为自同构划分(automorphism partitioning),如果顶点 u,v 属于该划分的同一个单元,当且仅当存在 G 的一个自同构映射,将 u 映射到 v[19].

对图的顶点可以定义一类顶点不变函数(vertex invariant),使得属于同一个自同构划分的顶点都有相同函数值,比如顶点的度、包含一个顶点的三角形的数目,都是顶点不变函数的例子[6].由于在搜索映射的过程中只要考虑具有相同顶点不变函数值的顶点之间的对应即可,因此,如果顶点不变函数选择得好,将顶点尽可能地作更细的划分,则能够极大地降低搜索的空间.

在 McKay 著名的 NAUTY 算法中[15],利用了顶点的邻接顶点的信息来对顶点进行划分.假设当前划分为φ,对于顶点 v,根据φ定义元组:

$$D(v)=(\varphi(v),d_1(v),d_2(v),\ldots,d_k(v)).$$

$\varphi(v)$表示顶点 v 的颜色,即顶点所在单元;$d_i(v)$表示在顶点 v 的邻接顶点中,属于划分φ的第 i 个单元的顶点数. $D(v)$是一个顶点不变函数,根据 $D(v)$可以对φ进行细分,得到$\varphi^{(1)}$,使得属于$\varphi^{(1)}$的同一个单元的顶点都具有相同的函数值,根据$\varphi^{(1)}$计算 $D(v)$,并对$\varphi^{(1)}$进行细分,得到$\varphi^{(2)},\ldots$,这个过程可以不断进行下去,直到得到某个$\varphi^{(r)}=\varphi^{(r+1)}$为止,$r<n$.这样得到的划分$\varphi^{(r)}$称为$\varphi$的稳定细分(stable refinement).

该方法只考虑了顶点的直接邻居,Miyazaki[16]对此进行了扩展,考虑与顶点距离为δ的顶点的信息,定义以下函数:

$$D_\delta(v)=(\varphi(v),d_1^\delta(v),d_2^\delta(v),\ldots,d_k^\delta(v)).$$

其中:$d_i^\delta(v)$ 表示与顶点 v 距离为δ的顶点中,属于划分φ的第 i 个单元的顶点数.称 $S_\delta(\varphi)=\varphi^{(r)}=\varphi^{(r+1)}$为$\varphi$的$\delta$稳定细分.同时,$\varphi$的强$\delta$稳定细分递归定义如下:

$$\bar{S}_\delta(\varphi)=\begin{cases}S_\delta(\varphi), & \delta=1\\ S_\delta(\bar{S}_{\delta-1}(\varphi)), & \delta>1\end{cases}.$$

Mateus[17]提出了一个一般的定义,对于一对顶点 u 和 v,设有一个同构不变函数$\beta(u,v)$(即同构映射不改变该函数值),设 $d_i^\delta(v)$ 表示在使得$\beta(u,v)=\delta$的所有顶点 u 中,属于划分φ的第 i 个单元的顶点数,定义

$$D_\delta(v)=(\varphi(v),SORT\{(i,\delta,d_i^\delta):d_i^\delta>0\}),$$

其中,$SORT\{\}$为排序函数,将集合的元素按某种规则进行排序(如字典序).这种情况下得到的 $\bar{\varphi}_\beta=\varphi^{(r)}=\varphi^{(r+1)}$ 称

为φ的β稳定细分.Mateus 证明了当$\beta(u,v)$取为两点 u 和 v 之间的距离时,该方法至少和强δ稳定细分一样强.

另外,设两点 u 和 v 之间的路径为 P,定义 $c(P)$为路径上所有顶点所在单元的编号组成的序列,取 $c(u,v)$为 u 和 v 之间所有最短路径中 $c(P)$最小的那一个,Mateus 证明了当$\beta(u,v)$取为 $c(u,v)$时,该方法至少和 d 稳定细分一样强.这里,d 等于 u,v 间的距离.

目前,大部分的图同构算法,包括子图同构算法,例如文献[11–15],基本上都是利用以上顶点之间的信息来降低搜索空间的.

2 顶点间路径数不变函数

假设顶点 v_1,v_d 之间有路径 $v_1v_2\ldots v_d$,其中,$(v_i,v_{i+1}),1\le i<d$ 是图中的一条边,路径中可以出现重复的顶点和边,顶点之间的距离定义为最短路径的长度.显然,最短路径中不会出现重复的顶点或边.

在前面介绍的 Miyazaki 方法中,考虑了与顶点 v 的距离为δ的那些顶点.由于顶点间的路径更能刻画图的结构特性,因此,基于顶点之间的路径来定义一类新的顶点不变函数.考虑与顶点 v 存在路径长度为δ的那些顶点,同时考虑两顶点间的路径数,定义

$$Q_\delta(v)=(\varphi(v),SORT\{(i,d,n,c)\}),$$

其中,(i,d,n,c)表示所有满足下面条件的元组:在划分φ的第 i 个单元的顶点中,与顶点 v 的最小距离为 d(显然,$d\le\delta$)、与顶点 v 之间有 n 条长度为δ的路径,所有满足这些条件的顶点数为 c.根据这一顶点不变函数,称得到的稳定细分为φ的δ路径稳定细分.

性质 **1**. φ的δ路径稳定细分至少与φ的δ稳定细分一样好.

证明:不妨设 $\overline{\varphi}$ 为φ的δ路径稳定细分,$\overline{\varphi}'$ 为φ的δ稳定细分.考虑某个顶点 v,根据 $Q_\delta(v)$的定义,那些与顶点 v 距离为δ的顶点,都对应元组(i,δ,n,c),因此在 $\overline{\varphi}'$ 中,$d_i^\delta(v)$ 等于所有形如(i,δ,n,c)的元组中对 c 进行求和的结果.因此,对于任意属于 $\overline{\varphi}$ 中同一个单元的两个顶点 u 和 v,如果 $Q_\delta(u)$与 $Q_\delta(v)$相等,那么相应的 $d_i^\delta(u)$ 和 $d_i^\delta(v)$ 也一定相等,从而顶点 u 和 v 也属于 $\overline{\varphi}'$ 中同一个单元.因此,φ的δ路径稳定细分至少与φ的δ稳定细分一样好. □

在δ稳定细分中考虑了与顶点之间距离为δ的那些顶点的信息.如图 1 所示,就是在图中以 v 为圆心、δ为半径作一个圆,考虑的是落在圆周上的那些点 A,B,C,D,E;而在δ路径稳定细分中,考虑了与顶点之间路径长度为δ的那些顶点的信息.由于路径中可以有重复的边,因此,考虑的不仅仅是 A,B,C,D,E,也包括一些落在圆内的点 1,2,3,4.这样,在前一种情况下不能区分的顶点,也能得到进一步的细分.

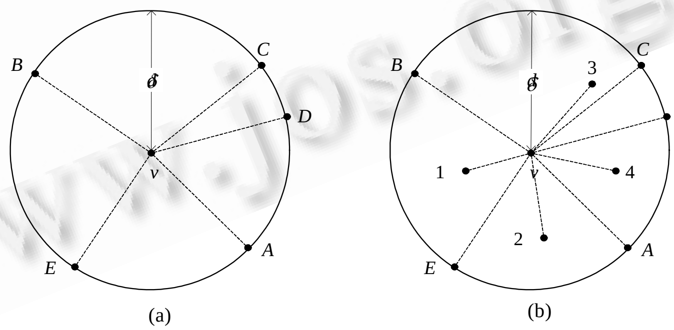

Fig.1 δ shortest path and δ path

图 1 δ最短路径与δ路径

对于一个顶点 v,设有 $Q_{\delta_1}(v)$ 和 $Q_{\delta_2}(v)$,定义

$$Q_{\delta_1,\delta_2}(v)=Q_{\delta_1}(v)\circ Q_{\delta_2}(v),$$

其中:$\circ$表示连接运算;$Q_{\delta_1,\delta_2}(v)$ 表示考虑与顶点 v 有路径长度为δ_1和δ_2的那些顶点,称在这种情况下得到φ的δ_1,δ_2路径稳定细分.一般地,$Q_{1,2,\ldots,\delta}(v)$表示考虑所有与顶点 v 的路径长度不大于δ的那些顶点,称在这种情况下得到φ的强δ路径稳定细分,根据性质 1,显然有:

性质 **2**. φ的强δ路径稳定细分至少与φ的强δ稳定细分一样好.

由于计算 $Q_{1,2,\ldots,\delta}(v)$要考虑与顶点 v 的路径长度不大于δ的所有顶点,同时,一个顶点 u 与 v 之间既可能存在长为δ_1 的路径,也可能存在长为δ_2 的路径,因此,在计算顶点 v 对应的 $Q_{1,2,\ldots,\delta}(v)$时,某些顶点可能重复出现,从而增加了复杂度.性质 3 使得我们只需考虑与顶点之间具有路径长度为$\delta-1$ 和δ的那些顶点即可.

性质 **3**. φ的$\delta-1,\delta$路径稳定细分至少与φ的强δ稳定细分一样好.

证明:首先证明,与顶点 v 之间距离小于等于δ的某个顶点 u 一定与 v 之间具有长度为$\delta-1$ 或δ的路径.这是显然的,因为假设 u 和 v 之间存在一条长度为 $d\le\delta$的最短路径:

$$v,\ldots,v_1,v_2,\ldots,u,$$

如果 $d=\delta-1$ 或者 $d=\delta$,那么,该路径就是满足条件的路径;否则,重复其中一条边(v_1,v_2),得到长为 $d+2$ 路径:

$$v,\ldots,v_1,v_2,v_1,v_2,\ldots,u.$$

如果 $d+2=\delta-1$ 或者 $d+2=\delta$,那么,该路径就是满足条件的路径;否则,重复上述过程,直到得到 u,v 之间长度为$\delta-1$ 或δ的路径为止.这说明,与 v 之间距离为 $d\le\delta$的顶点在计算 $Q_{\delta-1,\delta}(v)$时一定会被考虑到.

设 $\overline{\varphi}$ 为φ的$\delta-1,\delta$路径稳定细分, $\overline{\varphi}'$ 为φ的强δ稳定细分.考虑某个顶点 v,根据 $Q_{\delta-1,\delta}(v)$的定义,那些与顶点 v 距离为 $d\le\delta$的顶点,都对应元组(i,d,n,c),因此在 $\overline{\varphi}'$ 中, $d_i^d(v)$ 等于所有形如(i,d,n,c)的元组中对 c 进行求和的结果.因此,对于任意属于 $\overline{\varphi}$ 中同一个单元的两个顶点 u 和 v,如果 $Q_{\delta-1,\delta}(u)$与 $Q_{\delta-1,\delta}(v)$相等,那么,相应的 $d_i^d(u)$ 和 $d_i^d(v)$ 也一定相等,从而,顶点 u 和 v 也属于 $\overline{\varphi}'$ 中同一个单元.因此,φ的$\delta-1,\delta$路径稳定细分至少与φ的强δ稳定细分一样好.命题得证. □

类似于这一证明思想,可以得出如下性质:

性质 **4**. φ的$\delta-1,\delta$路径稳定细分至少与 Mateus 的基于顶点距离的β稳定细分一样好.

在证明性质 3 的过程中,我们从存在边(v_1,v_2)推导得出存在路径(v_1,v_2,v_1,v_2),这里考虑的是无向图的情况,这是因为根据文献[20],有向图同构问题可以在多项式时间内归约为无向图同构问题,因此,一般只要考虑无向图的情况即可.

3 分 析

接下来分析该顶点不变函数的计算复杂度.经典的 Floyd 算法计算所有顶点之间最短路径的时间复杂度为 $O(n^3)$,空间复杂度为 $O(n^2)$.所有顶点之间长度为δ的路径的数目可以从图的邻接矩阵 M 的δ次方 M^δ直接得到,而经典的基于分治策略的 Strassen 矩阵乘法的时间复杂度为 $O(n^{281})$,空间复杂度为 $O(n^2)$,因此,计算该函数的时间复杂度为 $O(n^3)$,空间复杂度为 $O(n^2)$.

对于划分φ,

$$\{v_1^1,v_2^1,\ldots,v_{c_1}^1\},\{v_1^2,v_2^2,\ldots,v_{c_2}^2\},\ldots,\{v_1^n,v_2^n,\ldots,v_{c_n}^n\}.$$

定义 $p(\varphi)=c_1!\times c_2!\times\ldots\times c_n!$,它是当前划分下顶点之间可能的映射数.这样,$p(\varphi)$越小,所需匹配的映射数就越小,因此,该函数刻画了划分的细分程度.下面考虑图的几种基本结构,以比较以上几种稳定划分的效果.

例 1:考虑图 2.

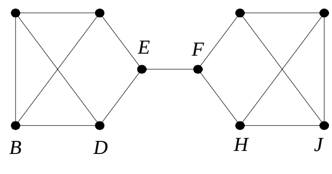

Fig.2 An example for strong δ stable refinement of φ

图 2 φ的强δ稳定细分举例

一般来说,对顶点进行细分是从一个平凡的划分(即该划分仅包含一个单元)开始的.当取φ为平凡划分时,

所有顶点间可能存在的映射个数为 $p(\varphi)=10!=3628800$.由于所有顶点的度相等,因此,考虑顶点的邻接顶点的信息,也不能将顶点进行细分了,因此,φ的稳定细分就是φ.

但是,考虑与顶点距离为 2 的顶点信息,注意到与顶点 A 距离为 2 的顶点有 1 个(顶点 E),与顶点 C 距离为 2 的顶点有 2 个(顶点 D,F),与顶点 E 距离为 2 的顶点有 4 个(顶点 A,B,G,H),因此,这 3 个顶点是不同的,不难验证φ的强δ(=2)稳定细分 $\overline{\varphi}$ 为

$$\{A,B,I,J\},\{C,D,G,H\},\{E,F\}.$$

此时, $p(\overline{\varphi})=4!\times4!\times2!=1152$. □

例 2:考虑图 3.

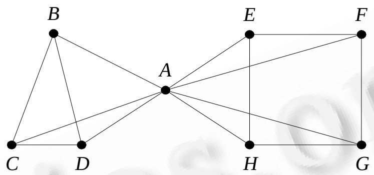

Fig.3 An example for strong δ path stable refinement of φ

图 3 φ的强δ路径稳定细分举例

仍然取φ为平凡划分,$p(\varphi)=8!=40320$.利用顶点的邻接顶点来进行划分.显然,顶点 A 的度不同于其他顶点,得到φ的稳定细分 $\overline{\varphi}$ 为

$$\{A\},\{B,C,D,E,F,G,H\}.$$

此时, $p(\overline{\varphi})=1!\times7!=5040$.除了顶点 A 以外的所有顶点,与其距离为 2 的顶点数都是 4.因此,$\overline{\varphi}$ 也是φ的强δ(=2)稳定细分,同时可以验证,采用 Mateus[17]的方法,考虑长度为 2 的最短路径上顶点所在单元的编号也不能对顶点细分了.

但是,让我们考虑顶点之间长度为 2 的路径的数量,顶点 B 到 4 个顶点(E,F,G,H)有 1 条长为 2 的路径,到 2 个顶点(C,D)有 2 条长为 2 的路径;而顶点 E 到 5 个顶点(B,C,D,F,H)有 1 条长为 2 的路径,到 1 个顶点(G)有 3 条长为 2 的路径.因此,顶点 B 和 E 是不同的,事实上,φ的强δ(=2)路径稳定细分 $\overline{\varphi}$ 为

$$\{A\},\{B,C,D\},\{E,F,G,H\}.$$

这也与直观是符合的,因为顶点 A 的左边连接了一个三角形,右边连接了一个四边形,这两边的顶点从同构关系来考虑是存在区别的,此时, $p(\overline{\varphi})=1!\times3!\times4!=144$. □

从这两个例子可以发现:一般来说,δ不必取很大,即使是考虑δ=2 这种最简单的情况,强δ(=2)路径稳定细分也能取得较好的结果.

根据稳定细分的定义,寻找顶点集合的一个划分φ的稳定细分 $\overline{\varphi}$,是将划分φ的某个单元中的顶点,根据顶点的一些属性进行进一步分类,得到比划分φ更细的划分$\varphi^{(1)}$,进一步考虑$\varphi^{(1)}$中的某个单元中的顶点,又可以得到$\varphi^{(2)}$,这个过程可以不断递归地进行下去,直到得到不能再细分的划分 $\overline{\varphi}$ 为止,这也是该划分称为“稳定”的原因.由于顶点集合最细的划分是离散的划分(即划分的每个单元都只包含一个顶点[15]),因此,上述递归过程至多进行$|V|$步即可结束.在对单元中的顶点进行分类时,选择何种顶点不变函数是问题的关键:一般的稳定细分考虑的是直接邻居,δ稳定细分考虑的是距离为δ的顶点,强δ稳定细分考虑的是距离δ之内的所有顶点,这些信息是从一次邻接矩阵得到的;而考虑顶点之间的路径数是基于高次的邻接矩阵,因此能够获得更多的信息.

为了比较一次邻接矩阵和高次邻接矩阵的分类效果,我们对一个图进行如下细分:从平凡划分开始,得到稳定划分,如果稳定划分有多于 1 个顶点的单元,则从中选出一个顶点单独作为一个单元,再次得到稳定划分,…,重复以上过程,直到得到离散划分为止.测试数据取自采用文献[21]中提出的方法得到图库(http://amalfi.dis.unina.it/graph),选择 6 正则图(bd06)进行测试,图的顶点数 20~1000 共 10 种顶点数,每种 100 个图,运行时间的平均值见表 1.在这种情况下,利用二次邻接矩阵分类的运行时间小于一次邻接矩阵,这是因为前者分类时叠代次数要少.设从划分φ得到稳定划分$\varphi^{(r)}=\varphi^{(r+1)}$时循环次数为 r,叠代次数定义为从平凡划分到离散

划分过程中各循环次数之和,叠代次数的平均值见表 2(注:运行环境为 P4 2.66GHz CPU,Windows 2000 OS).

Table 1 Running time (ms)

表 1 运行时间 (ms)

Refine method \ Number of vertexes	20	40	60	80	100	200	400	600	800	1 000
Adjacent matrix	<1	<1	<1	<1	<1	2	5	13	24	36
Quadric adjacent matrix	<1	<1	<1	<1	<1	<1	5	9	16	23

Table 2 Iterate times

表 2 叠代次数

Refine method \ Number of vertexes	20	40	60	80	100	200	400	600	800	1 000
Adjacent matrix	6	15	23	27	36	72	146	218	288	362
Quadric adjacent matrix	7	9	12	16	20	35	71	105	139	171

由此考虑是否可以利用邻接矩阵的一些其他信息,比如特征向量和特征值,因为它们刻画了图的全局结构特征.事实上,在文献[22]中就提出了这样一种方法,该算法甚至不需要回溯.但由于主特征向量得到的顶点顺序并不能完全确定顶点之间的对应关系,因此并非精确图同构.

考虑顶点不变函数的定义,顶点 u,v 属于自同构划分的同一个单元,是这两个顶点具有相同函数值的充分条件,如果后者也是前者的充分条件,我们则称这样的顶点不变函数为完备的(complete).由于图同构问题可以转化为求自同构划分问题,因此,也可以转化为寻找完备的顶点不变函数问题.在例 1 中,Miyazaki 定义的 $D_2(v)$是完备的,因为顶点不能再细分了;但在例 2 中,该函数就不是完备的,而此时 $Q_2(v)$是完备的.对于一般的图,$Q_{1,2,\ldots,|V|}(v)$,甚至 $Q_{1,2,\ldots,\infty}(v)$是否为完备的,仍是一个尚未解决的问题.

4 结 语

本文中提出了一种在图同构中对顶点进行细分的方法,通过计算与顶点 v 之间具有一定长度路径的顶点的函数来对图的顶点进行细分,以降低在图同构的搜索过程中需要匹配的顶点数量.我们证明了该方法至少优于已有的一些常用的顶点细分方法,并通过例子说明了一些简单的图的结构,比如三角形和四边形,采用基于顶点的度和距离不能进行细分,但采用本方法能够进行进一步的细分.

进一步的工作是寻找完备的顶点不变函数,或者证明不存在这样一个在多项式时间内可计算的函数.我们猜想,就像树、区间图、极大外平面图、平面图等特殊类型图的同构存在多项式时间算法那样,对于具有一定特殊结构的图,可能存在这样的函数.

致谢 在此,我们向对本文的工作给予支持和建议的同行,尤其是中国科学院计算技术研究所谭建龙博士表示感谢.

References:

[1] DePiero F, Trivedi M. Graph matching using a direct classification of node attendance. Pattern Recognition, 1996,29(6): 1031−1048.

[2] Pearson J. Symmetry breaking in constraint satisfaction with graph-isomorphism comma-free codes. In: van Beek P, ed. Proc. of AI&M 2004. 2004. http://www.informatik.uni-trier.de/~ley/db/conf/amai/amai2004.html

[3] Sorlin S, Solnon C. A global constraint for graph isomorphism problems. In: Régin JC, Rueher M, eds. Proc. of the 6th Int'l Conf. on Integration of AI and OR Techniques in Constraint Programming for Combinatorial Optimization Problems, CPAIOR 2004. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2004. 287−302.

[4] Bengoetxea E. Inexact graph matching using estimation of distribution algorithms [Ph.D. Thesis]. Paris: Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, 2002.

[5] Torán J. On the hardness of graph isomorphism. SIAM Journal on Computing, 2004,33(5):1093−1108.

[6] Chi CW. Hierarchy of isomorphism testing. Technical Report, CaltechCSTR: 1984.5140-tr-84, California Institute of Technology, 1984. http://caltechcstr.library.caltech.edu/351/
[7] Uehara R, Toda S, Nagoya T. Graph isomorphism completeness for chordal bipartite graphs and strongly chordal graphs. Discrete Applied Mathematics, 2005,145(3):479−482.
[8] Gazit H, Reif JH. A randomized parallel algorithm for planar graph isomorphism. Journal of Algorithms, 1998,28(2):290−314.
[9] Kukluk J. Algorithm and experiments in testing planar graphs for isomorphism. Journal of Graph Algorithms and Applications, 2004,8(3):313−356.
[10] Foggia P, Sansone C, Vento M. A performance comparison of five algorithms for graph isomorphism. In: Jolion JM, Kropatsch W, Vento M, eds. Proc. of the 3rd IAPR-TC15 Int'l Workshop on Graph-Based Representation in Pattern Recognition. Ischia, 2001. 188−199. http://amalfi.dis.unina.it/graph/db/papers/benchmark.pdf
[11] Ullmann JR. An algorithm for subgraph isomorphism. Journal of the Association for Computing Machinery, 1976,23(1):31−42.
[12] Schmidt DC, Druffel LE. A fast backtracking algorithm to test directed graphs for isomorphism using distance matrices. Journal of the ACM, 1976,23(3):433−445.
[13] Cordella LP, Foggia P, Sansone C, Vento M. Subgraph transformations for the inexact matching of attributed relational graphs. Computing, 1998,12(Supplement):43−52.
[14] Cordella LP, Foggia P, Sansone C, Vento M. An improved algorithm for matching large graphs. In: Jolion JM, Kropatsch W, Vento M, eds. Proc. of the 3rd IAPR-TC15 Int'l Workshop on Graph-Based Representation in Pattern Recognition. Ischia, 2001. 149−159. http://amalfi.dis.unina.it/graph/db/papers/vf-algorithm.pdf
[15] McKay BD. Practical graph isomorphism. Congressus Numerantium, 1981,30(1):45−87.
[16] Miyazaki T. The complexity of McKay's canonical labeling algorithm. In: Finkelstein L, Kantor WM, eds. DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, Vol.28, Groups and Computation II. Rhode Island: American Mathematical Society, 1997. 239−256.
[17] Oliveira M, Greve F. A new refinement procedure for graph isomorphism algorithms. In: Feofiloff P, de Figueiredo CMH, Wakabayashi Y, eds. Electronic Notes in Discrete Mathematics, Proc. of the GRACO 2005. Amsterdam: Elsevier North-Holland, 2005. 373−379.
[18] Lal A, van Melkebeek D. Graph isomorphism for colored graphs with color multiplicity bounded by 3. Technical Report, TR1523, University of Wisconsin-Madison, 2005. http://www.cs.wisc.edu/~dieter/Papers/3gi.pdf
[19] Corneil DG, Gotlieb CC. An efficient algorithm for graph isomorphism. Journal of the Association for Computing Machinery, 1970,17(1):51−64.
[20] Miller GL. Graph isomorphism, general remarks. Journal of Computer and System Sciences, 1979,18(2):128−142.
[21] Foggia P, Sansone C, Vento M. A database of graphs for isomorphism and sub-graph isomorphism benchmarking. In: Jolion JM, Kropatsch W, Vento M, eds. Proc. of the 3rd IAPR-TC15 Int'l Workshop on Graph-Based Representation in Pattern Recognition. Ischia, 2001. 176−187. http://amalfi.dis.unina.it/graph/db/papers/database.pdf
[22] Kelly AR, Hancock ER. Graph matching using adjacency matrix Markov chain. In: Cootes TF, Taylor C, eds. Proc. of the British Machine Vision Conf. 2001, BMVC 2001. Manchester: British Machine Vision Association, 2001. 383−390.

邹潇湘(1976－),男,湖南望城人,博士,高级工程师,主要研究领域为网络与信息安全技术.

戴琼(1975－),女,工程师,主要研究领域为网络与信息安全技术.