ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
Journal of Software, Vol.17, No.8, August 2006, pp.1731−1742
DOI: 10.1360/jos171731

E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel/Fax: +86-10-62562563

国家知识基础设施中的数学知识表示*

曹存根[1], 眭跃飞[1], 孙 瑜[1,2+], 曾庆田[1]

[1](中国科学院 计算技术研究所 智能信息处理重点实验室 大规模知识处理组,北京 100080)
[2](中国科学院 研究生院,北京 100049)

Representation of Mathematical Knowledge in National Knowledge Infrastructure

CAO Cun-Gen[1], SUI Yue-Fei[1], SUN Yu[1,2+], ZENG Qing-Tian[1]

[1](Large Scale Knowledge Processing Group, Key Laboratory of Intelligent Information Processing, Institute of Computing Technology, The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)
[2](Graduate School, The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)
+ Corresponding author: Phn: +86-871-6916106, Fax: +86-871-5515135, E-mail: sunyu-km@hotmail.com

Cao CG, Sui YF, Sun Y, Zeng QT. Representation of mathematical knowledge in national knowledge infrastructure. *Journal of Software*, 2006,17(8):1731−1742. http://www.jos.org.cn/1000-9825/17/1731.htm

Abstract: The representation of mathematical knowledge is an important aspect of knowledge representation. It is the foundation for knowledge-based automated theorem proving, mathematical knowledge retrieval and intelligent tutoring systems, etc. According to the problems that are encountered in designing the mathematical knowledge representation language in NKI (national knowledge infrastructure) and after the discussion of ontological assumptions for mathematical objects, two kinds of formalisms for the representation of mathematical knowledge are provided. One is a description logic in which the range of an attribute can be a formula in some logical language; and another is a first order logic in which an ontology represented by the description logic is a part of the logical language. In the former representation, if no restrictions are imposed on formulas, then there is no algorithm to realize the reasoning in the resulted knowledge base; in the latter representation, the reasoning in the ontology represented by the description logic is decidable, while in general, for mathematical knowledge described by the first order logic which contains the ontology represented by the description logic, there is no algorithm to realize its reasoning. Hence, in the representation of mathematical knowledge, it is necessary to distinguish conceptual knowledge (knowledge in an ontology) and non-conceptual knowledge (knowledge represented by a language containing the ontology). Frames and description logics can represent and reason effectively about conceptual knowledge, but the addition of non-conceptual knowledge to frames or knowledge bases may make the reasoning in the resulted knowledge bases not decidable and there is even no algorithm to reason about the knowledge bases. Therefore, it is suggested that in representing mathematical knowledge, frames or description logics are used to

* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant Nos.60273019, 60373042, 60496326, 60573063, 60573064 (国家自然科学基金); the National Grand Fundamental Research 973 Program of China under Grant Nos.2003CB317008, G1999032701 (国家重点基础研究发展计划(973))

Received 2005-06-24; Accepted 2005-12-12

describe conceptual knowledge, and the logical languages containing the knowledge base represented by the frames or description logics are used to represent non-conceptual knowledge.
Key words: mathematical knowledge; frame; description logic; ontology

摘 要: 数学知识表示是知识表示中的一个重要方面,是数学知识检索、自动定理机器证明、智能教学系统等的基础.根据在设计 NKI(national knowledge infrastructure)的数学知识表示语言中遇到的问题,并在讨论了数学对象的本体论假设的基础上提出了两种数学知识的表示方法:一种是以一个逻辑语言上的公式为属性值域的描述逻辑;另一种是以描述逻辑描述的本体为逻辑语言的一部分的一阶逻辑.在前者的表示中,如果对公式不作任何限制,那么得到的知识库中的推理不是可算法化的;在后者的表示中,以描述逻辑描述的本体中的推理是可算法化的,而以本体为逻辑语言的一部分的一阶逻辑所表示的数学知识中的推理一般是不可算法化的.因此,在表示数学知识时,需要区分概念性的知识(本体中的知识)和非概念性的知识(用本体作为语言表示的知识).框架或者描述逻辑可以表示和有效地推理概念性知识,但如果将非概念性知识加入到框架或知识库中,就可能使得原来可以有效推理的框架所表示的知识库不存在有效的推理算法,甚至不存在推理算法.为此,建议在表示数学知识时,用框架或描述逻辑来表示概念性知识;然后,用这样表示的知识库作为逻辑语言的一部分,以表示非概念性知识.
关键词: 数学知识;框架;描述逻辑;本体
中图法分类号: TP311 文献标识码: A

数学知识表示是知识表示中一个重要的方面,因为数学是所有其他学科的基础,其他学科中的定性和定量分析结果有赖于数学结果的表示.数学知识表示是数学知识检索、自动定理机器证明、智能教学系统等的基础.现有的数学知识表示有 OpenMath 组织(OpenMath society)提出的 OpenMath 标准[1−3]、W3C(world wide web consortium)提出的数学知识标记语言 MathML[4,5]、NKI(national knowledge infrastructure)的数学知识表示语言 NKIMath[6,7],等等.

为了提供一个支持在不同的计算机软件工具(如:数学知识检索、自动定理机器证明、数学文本编辑工具等)上进行语义丰富的数学转换的标准,OpenMath 组织提出数学知识标识语言 OpenMath.OpenMath 通信模型是基于一个数学对象的 3 层表示的:用于内部表示的私有层(private layer)、OpenMath 对象的抽象层(abstract layer)以及把 OpenMath 对象转换成比特流的通信层(communication layer).在抽象层,OpenMath 对象的含义是由内容词典(content dictionary)给出的.内容词典用来给所有的 OpenMath 对象指派形式的和非形式的语义.

目前的 HTML 并不真正支持数学知识的表示,通常是借助于 GIF 图像来表示数学对象.使用图像导致低劣的印刷质量和语义信息的丢失.另外,无法对这样的页面进行搜索,或者从网页粘贴数学表达式到计算机代数软件包.鉴于此,W3C 提出了一个用 XML 来对数学进行编码的新“标准”——MathML.它有两种类型的标记:一种是呈现标记(presentation markup);另一种是内容标记(content markup).呈现标记使用类似于“TeX”风格的方法来对数学知识进行标识.它有丰富的数学符号如上标、下标、行列式等,但没有对这些符号的语义的详细阐述.内容标记用来描述抽象的数学对象以及提供数学表达式结构的下层编码.类似于 OpenMath 的内容词典,MathML 定义了用来进行内容标记的所有内容元素的语义.

我们将数学知识分为两种类型:概念性知识(数学概念)和非概念性知识(数学断言,如定理、引理和猜想等).在数学知识的表示中,通常需要以公式的形式给出数学概念所满足的基本性质,如数学概念“群”满足交换律、有幺元和有逆元这 3 个基本性质.因此,我们允许表示数学知识属性的值域为某个逻辑语言上的公式.如果对属性值域上公式不作任何限制,那么得到的知识库中的推理不是可算法化的.由于大部分数学概念的定义都是 Horn 形式的,我们可以要求出现在数学概念的属性值域中的逻辑公式是 Horn 形式的.这样,框架或者描述逻辑可以表示并有效地推理概念性知识.然而,大多数数学断言都不能表示成 Horn 形式.如果将非概念性知识加入到框架或知识库中,就可能使得原来可以有效推理的框架所表示的知识库不存在有效的推理算法,甚至不存在推理

算法.因此,在进行数学知识表示时,我们需要区分概念性知识和非概念性知识.为此,我们建议在表示数学知识时,用框架或描述逻辑来表示概念性知识;然后,用这样表示的知识库作为逻辑语言的一部分来表示非概念性知识.这样,在查询时,对概念性知识的查询使用有效的框架推理系统;对非概念性知识的查询,只回答这样的知识在知识库中有还是没有,而不回答这样的知识是否可以由知识库推出.

本文在 NKI[6,7]中对数学知识进行表示时遇到的问题进行深入分析的基础上,提出了两种数学知识的表示方法:一种是以一个逻辑语言上的公式为属性值域的描述逻辑;另一种是以描述逻辑描述的本体为逻辑语言的一部分的一阶逻辑.在对这两种表示进行深入比较和分析的基础上,我们建议采用第 2 种知识表示方式:在表示数学知识时,用框架或描述逻辑来表示本体中的概念性知识;然后,用本体为逻辑语言的一部分的一阶逻辑来表示非概念性知识.这样,本体中的推理是可算法化的.

本文第 1 节讨论数学知识表示中需要考虑的问题,如数学对象的本体论假设等.第 2 节给出 NKI 知识库中数学知识的表示方法和分析.第 3 节给出一个基于逻辑语言 L 的描述逻辑 DL_L 来表示数学知识,证明这样的描述逻辑的表示能力等价于以 L 为逻辑语言的一阶逻辑.第 4 节给出数学知识表示语言中的基本类型以及基本类型之间的函数.第 5 节用数学知识表示语言来具体表示代数群论中的一个定理,并说明这样的定理在框架的范围内是无法证明的.第 6 节给出以本体为语言的一部分的一阶逻辑,并用这样的逻辑系统来表示数学定理.相关工作在第 7 节中给出.最后一节总结全文并给出进一步的研究工作.

1 数学知识表示中需要考虑的问题

所有的研究都是基于关于研究对象的一定的假设上进行的,这种假设称为本体论假设.本体论是形而上学的一个分支,主要讨论什么是存在的以及如何存在.当我们对某类对象进行研究时,我们是在对该类对象的存在性和存在方式作了某种假定后,才对它们的其他方面的性质进行研究.同样,对于数学研究的对象,我们也必须有关于数学对象的本体论假设.

数学对象的本体论假设:

- 无穷多个元素的集合的存在性.一般地,任给元素 $a_1,\ldots,a_n,\ldots$,存在一个集合 S 使得 $S=\{a_1,\ldots,a_n,\ldots\}$.这里,形式上是可数的,实际上是任意多个元素;
- 所有的数学对象可以由自然数(类型记为ω)和布尔子$\{0,1\}$(类型记为 $\boldsymbol{b}$)通过类型构造子构造得到.也就是说,所有数学中讨论的对象都是由自然数和 0,1 构造出来的抽象对象,尽管我们会说张三和李四构成一个集合{张三,李四},但这里的{张三,李四}是两个概念(符号,抽象的对象).

除了本体论假设以外,为了表示数学知识,我们还需要考虑以下几个方面的问题:

(1) 数学对象的分类和表示方法:给出描述数学概念的基本属性,并且根据基本属性来分类数学概念.我们假定所研究的数学对象包括两种类型:数学概念(如自然数、群等)和数学断言(如数学引理、定理等).

(2) 数学概念(概念也是对象,但不是数学对象)的分类标准.例如,代数结构的分类是由参数的形式(signature)来描述的,而连续函数的分类是根据函数的取值方式及其性质来描述的.因此,需要给出对数学概念进行描述时可能用到的性质的种类说明.我们假定在描述数学概念时不会出现循环,如在描述“自然数”时用到“群”,在描述“群”时又用到了“自然数”,这样就产生了由相互引用所导致的循环.

(3) 数学对象的多种抽象层次.在代数中,我们有群的元素:群、群范畴;描述群的元素:群、群范畴之间的关系和算子.比如,设α表示群概念,$\boldsymbol{G}=(G,\circ)$是一个群,则 $\boldsymbol{G}\sqsubseteq\alpha$($\boldsymbol{G}$ 是一个群);设$\pi_1(\boldsymbol{G})=G$ 是第一投影函数,则一个对象 x 是群 $\boldsymbol{G}$ 的元素表示为 $x\in\pi_1(\boldsymbol{G})$;而 $\boldsymbol{G}$ 是群范畴的一个元素(对象).我们假定所有的数学对象都属于下面 3 个对象抽象层中的一层:

  - 一个对象可以是一个简单的个体,如 1,2 这样的自然数;可以是序对,如有理数是自然数的序对;可以是序列,如实数是自然数的无穷序列.
  - 一个对象可以是结构.一个结构是由论域和论域上的关系组成的序对,其中论域中的元素是简单对象(或者是假设元素是不可再分解的).

- 一个对象可以是范畴.一个范畴是由结构的集合和结构上的关系组成的序对.因此,范畴也可以看作是一个结构,如果允许结构中的元素可以是一个结构(或者是可再分解的).

(4) 不同运用(application)对 KR(知识表示)的要求不同.在数学中,概念的运用可能是:(i) 证明;(ii) 概念之间的关系推导;(iii) 一个个体是否满足某一性质的推导;(iv) 算法的求解等.

(5) 给出数学中基本类型:如以对象为中心的基本类型有“集合”:二元运算、二元关系;以定理为中心的基本类型有引理、证明等;以算法为中心的基本类型有求值算法、证明算法等.

由此可以看出:数学知识表示的用处是不同的、多方面的,而对于(4)中的(i)和(iv),常常不存在算法.为此,我们必须在构建数学知识库的上层时,给出表示区分不同类型(知识库可以推理的和知识库不能推理的)的数学知识的标准,使得数学知识库的查询变得可能.

2 数学知识的表示

本节给出 NKI 中数学概念的框架表示的例子,然后对其表示能力进行分析.

在 NKI 中[7],我们如下来表示群这个概念:

群

{ 超类:独异点

参数:$(G,\circ)$

G:是集合

G 的类型:任意λ

$\circ$:是 G 上的二元运算

$\circ$的类型: $\lambda\times\lambda\rightarrow\lambda$

条件(1):$\forall x,y,z\in G((x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z))$

条件(2):$\exists e\in G\forall x\in G(x\circ e=e\circ x=x)$

条件(3):$\exists e\in G\forall x\in G\ \exists y\in G(x\circ y=y\circ x=e)$ }

在这里,条件(或者称为公理)看作是属性“群”具有的数学性质,如条件(1)说的是“群”满足交换律;条件(2)说的是“群”有单位元;条件(3)说的是“群”有逆元,其取值是某个逻辑语言上的一个公式.这样的表示能力超越了一般描述逻辑的表示能力.在一般的框架表示中,槽的定义域和值域是对象组成的集合;而在如上的表示中,条件的值域是任何一阶逻辑公式.可以很容易地证明如下的结论:

断言 **2.1**. 这样的表示能力等价于一阶逻辑.

这样表示群概念就失去了框架表示的知识库的推理有效性.为此,有两种办法来进行推理:

(1) 对槽值进行推理时,将槽值(一阶逻辑公式)看作不可分的对象,除非存在另一个框架来说明该槽值;

(2) 对槽值的推理,将槽值看作一个公式来进行推理.

前一种推理可以归约为描述逻辑的推理;而后一种推理是一阶逻辑推理,这样的推理过程是不可算法化.

为了关于概念的推理是可算法化的,我们可以要求出现在框架中的条件断言是 Horn 公式,因为大部分数学概念的定义是 Horn 形式的.如果将原来的框架表示记为 $\boldsymbol{F}$,而要求是 Horn 公式的记为 $\boldsymbol{F}_{horn}$,则 $\boldsymbol{F}_{horn}$ 的表达能力弱于 $\boldsymbol{F}$,但在 $\boldsymbol{F}_{horn}$ 中,关于概念的推理是可算法化的.

定理 **2.2**. 设 $DL_{\rm horn}$ 是条件属性以 Horn 公式为值的描述逻辑,则 DL_{horn} 的表达能力和推理能力等同于 Horn 逻辑程序.

从上面“群”的例子我们可以看出,NKI 中的数学概念表示具有以下特点:

(1) 数学知识是确定性知识.因此,数学概念的属性值都是确定的,没有缺省值.

(2) 数学概念具有属性参数.我们可以研究数学概念的参数的特殊性质,如参数的继承等.当然,关于参数的性质分析已经超出了本文的讨论范围.

(3) 我们用条件属性来表示数学概念的数学性质,其属性值为一阶逻辑上的公式.

3 基于一个逻辑语言 *L* 的描述逻辑

本节给出了用来表示数学知识的基于逻辑语言 L 的描述逻辑.

下面我们给出一个描述逻辑[8,9],记为 DL_L,其中的下标 L 表示一个逻辑语言.L 包含下列符号:一个可数多个谓词符号的集合$\{p_1,...,p_n,...\}$,可数多个变元符号$\{x_1,...,x_n,...\}$,以及逻辑符号$\neg,\to,\boldsymbol{A}$,其中的 $\boldsymbol{A}$ 表示一阶逻辑中的全称量词符号$\forall$.L 上的公式定义如同一阶逻辑中的公式定义.

DL_L 中包含个体常元(individual constants):$a_0,a_1,...$,原子概念名(primitive (atomic) concept names):$A_0,A_1,...$,以及角色(roles):$R_0,R_1,...$.

基本描述逻辑的语言 $\boldsymbol{L}$ 包含以下符号:$\top,\bot$; $\sqcap,\sqcup,\neg$;以及$(\geq n),(\leq n),\forall,\exists$.

一个概念描述 T 是 DL_L 上的一个符号串,使得:(1) $T=\{a_0,a_1,...,a_n\}$;(2) $T=A$;(3) $T=C\sqcap D,C\sqcup D,\neg C$,其中 C,D 是项,分别称为概念的合取(conjunction)、析取(disjunction)和否定(negation);(4) $T=\forall R.C,\exists R.C$,其中 C 是一个项,R 是一个角色,分别称为泛量化(universal quantification)和存在量化(existential quantification);(5) $T=(\geq n\cdot R),(\leq n\cdot R)$,称为数量限制(number restriction);(6) $T=\varphi(x)$,其中$\varphi(x)$是 L 上只含一个变元符号 x 的一个公式.这样的概念描述称为性质定义(property definition).

形式语义:DL_L 的一个解释 I(interpretation)是由一个结构$\Delta^I=(\Delta,P)$和映射 $I:\boldsymbol{L}\to\Delta\cup 2^{\Delta}\cup\Delta\times\Delta$(其中 P 是Δ上关系的集合),使得:如果 a 是一个个体常元,则 $I(a)\in\Delta$;如果 A 是一个原子概念,则 $I(A)\subseteq\Delta$;如果 R 是一个角色,则 $I(R)\subseteq\Delta\times\Delta$;以及如果 p 是一个 n-元谓词符号,则 $I(p)$是Δ^I 上的一个 n-元关系.

我们一般用 a^I, A^I, R^I, p^I 分别表示 $I(a)$,$I(A)$,$I(R)$和 $I(p)$.表 1 给出了上面介绍的描述逻辑的语法和语义.

Table 1 Syntax and semantics of description logic

表 1 描述逻辑的语法和语义

Constructor	Syntax	Semantics
Atomic concept	A	$A^I\subseteq\Delta$
Top concept	$\top$	Δ
Bottom concept	$\bot$	$\varnothing$
Conjunction	$C\sqcap D$	$C^I\cap D^I$
Disjunction	$C\sqcup D$	$C^I\cup D^I$
Negation	$\neg C$	Δ-C^I
Universal quantification	$\forall R.C$	$\{d_1:\forall d_2(d_1,d_2)\in R^I\to d_2\in C^I\}$
Existential quantification	$\exists R.C$	$\{d_1:\exists d_2(d_1,d_2)\in R^I\wedge d_2\in C^I\}$
Number restriction	$(\geq n\cdot R)$ $(\leq n\cdot R)$	$\{d_1:\|\{d_2:(d_1,d_2)\in R^I\}\|\geq n\}$ $\{d_1:\|\{d_2:(d_1,d_2)\in R^I\}\|\leq n\}$
Set of individuals	$\{a_1,...,a_n\}$	$\{a_1^I,...,a_n^I\}$
Property definition	$\varphi(x)$	$\{d:\Delta^I\vDash\varphi(x/d)\}$,where $\varphi(x/d)$ means that the value assigned to x is replaced with d.

一个概念描述 T 是可满足的,如果存在一个解释 I 使得 T^I 不是空集.

定理 **3.1**. DL_L 的表达能力等同于 L 上的一阶逻辑的表达能力.

证明:对公式的结构作归纳可以证明:将一阶公式φ作为一个性质定义,这样,φ在一阶逻辑中是可满足的当且仅当φ在 DL_L 的解释下是可满足的. □

我们利用标准的从框架到描述逻辑的转换[9],可以将上述框架表示转换翻译到 DL_L 上的概念描述.换句话说,NKI 的数学知识框架表示能够转换成 DL_L.因此,它具有与一阶逻辑相同的表示能力.

4 数学知识表示的语言描述

本节讨论了第 3 节给出的数学知识表示语言 DL_L 中的基本概念类型、基本概念类型之间的基本函数和数学对象上的基本函数.

从第 2 节的例子中可以看出,一个数学概念的框架中的属性包括超类、参数、参数说明、参数的类型说明和条件.

数学概念框架中的类型(概念类型)说明与数学对象的类型说明应当有所区别:前者是根据框架表示的目的来给出在框架中出现的符号的类型说明,这些类型是对于特殊的知识库事先设定好的,比如基本类型包含概念类、对象类、集合类等;而后者说明一个数学对象是如何从简单类型的对象通过构造子构造出来的,这些类型是数学对象,存在一个数学对象到类型的映射.因此,数学对象的类型是独立于任何表示形式的知识库的.

用来描述数学概念的基本属性应该包含参数的类型说明、参数之间的关系(函数)以及参数与其他类的数学对象之间的关系.给定一个数学概念α,如果α的参数类型是$\sigma\times\tau$形式的,则α框架中包含以下属性:

- 参数的形式(x,y);
- x 的概念类型:对象或集合;
- y 的概念类型:对象或集合;
- x 的类型:σ或任意类型λ;
- y 的类型:τ或由λ定义的类型;
- 条件:x 和 y 应该满足的基本性质.

根据上述讨论,我们可以要求这些基本性质是可以关于 x 和 y 的 Horn 公式,其中的符号可以是其他概念中出现和定义的符号.

下面我们将给出基本概念类型、基本概念类型之间的基本函数和数学对象上的基本函数.

4.1 基本类

数学概念的描述语言应该包括如下基本类(我们称为概念类型):

(1) 对象类 $\boldsymbol{O}$:对象类分为简单对象、集合对象、结构对象,其中:简单对象只是 0,1 和自然数;集合对象是一个集合(如偶数集合是一个对象;每个集合是一个对象(个体);函数和关系可以看作是集合对象);而结构对象是一个结构(如群等),结构对象是集合对象的序对.

(2) 集合类 $\boldsymbol{S}$:集合类是对象类的子类.集合类有分为简单集合类 $\boldsymbol{S}_s$,函数类 $\boldsymbol{S}_f$ 和关系类 $\boldsymbol{S}_r$ 使得

$$\boldsymbol{S}_s, \boldsymbol{S}_f, \boldsymbol{S}_r\sqsubseteq\boldsymbol{S};\ \boldsymbol{S}_f\sqsubseteq\boldsymbol{S}_r;\ \boldsymbol{S}_s\sqcup\boldsymbol{S}_r\equiv\boldsymbol{S};\ \boldsymbol{S}_s\sqcap\boldsymbol{S}_r\equiv\bot.$$

(3) 概念类 $\boldsymbol{C}$:外延是由数学对象组成的概念的类.

(4) 数类 $\boldsymbol{N}$:对象类 $\boldsymbol{O}$ 的子类.数学对象中有一类特殊的对象,称为数,从自然数到复数;它们均可由自然数通过类型构造子构造得到.

(5) 类型类 $\boldsymbol{T}$:由于数学对象的类型是不能由 0,1 和自然数构造得到的,它们是用另一类符号来表示数学对象的类型;假定类型的类型是不存在的.因此可以这样说,数学对象中除了类型类中的对象之外均有类型.我们用$\to,\times,$**sets**,**lists** 表示简单类型构造子.如果σ,τ是数学对象的类型,则$\sigma\to\tau,\sigma\times\tau,$**sets**$(\sigma)$,**lists**$(\sigma)$也是数学对象的类型.

(6) 基本类之间的函数类 $\boldsymbol{F}$:这里的基本函数是基本概念类上的函数,具体定义在第 4.2 节中给出.

因此我们有 $\boldsymbol{S}\sqsubseteq\boldsymbol{O};\boldsymbol{T}\sqsubseteq\boldsymbol{O};\boldsymbol{N}\sqsubseteq\boldsymbol{C}$.

4.2 基本概念类之间的基本函数

在基本概念类之间有一些函数,它们不同于数学对象上或数学对象类上的函数:

(1) 存在从 $\boldsymbol{O}$ 到 $\boldsymbol{T}$ 的函数 $type(\ )$,使得对任何数学对象 $o\in\boldsymbol{O},type(o)$是 o 的类型(每个数学对象具有一个类型);借助于类型构造子 **sets**,由对象类型为τ的数学对象组成的集合类型 **sets**(τ).因此,自然数子集的类型为 **sets**(ω).

(2) 存在从 $\boldsymbol{T}$ 到 $\boldsymbol{O}$ 的函数 $object(\ )$,使得对任何类型 $t\in\boldsymbol{T},object(t)$是数学对象表示 t;类似地,可以定义从集合到对象的函数 $object:\boldsymbol{S}\to\boldsymbol{O}$ 使得对任何类型 $s\in\boldsymbol{S},object(s)$是数学对象表示 s.

(3) 存在从 $\boldsymbol{O}$ 到 $\boldsymbol{S}$ 的函数 $set(\ )$,使得对任何对象 $o\in\boldsymbol{O},set(o)=\{o\}$是一个集合;$set()$,对任何一个数学对象 o 或一类数学对象 $o_1,\ldots,o_n,\ldots,set(o),set(o_1,\ldots,o_n,\ldots)$是集合,使得

$$set(o)=\{o\};\ set(o_1,\ldots,o_n,\ldots)=\{o_1,\ldots,o_n,\ldots\};$$

如果$\varphi(x)$是一个性质(断言),则 $set(\varphi(x))$是一个集合,使得 $set(\varphi(x))=\{x:\varphi(x)\}$.

因此,$set()$是对象类、对象群(collection)类和断言类到集合类的映射.

(4) $number(\ ):\boldsymbol{S}\to\boldsymbol{N}$.对任何一个集合 S,$number(S)$是 S 中元素的个数.因此,$number(\ )$:集合类$\to\omega$;

(5) $\pi_1(),\pi_2()$,对任何类型为(σ,τ)这样的数学对象 $z=(x,y)$(其中 $type(x)=\sigma,type(y)=\tau$),我们有 $\pi_1((x,y))=x$; $\pi_2((x,y))=y$.

5 一个群定理的表示

本节给出了如何用第 3 节中给出的数学知识表示语言 DL_L 来具体表示一个数学定理——群定理.

首先,我们分别给出自然数、群和群范畴的框架描述.

deframe 自然数

{ 等价名称:正整数

超类:整数

参数:n

n 的概念类型:个体

n 的类型:ω

运算:$n+m,n-m,n\times m,n\backslash m$

关系:$n|m,n\le m,n=m$

定义:$n\le m\Leftrightarrow\exists i(m=n+i)$

Peano 算术公理: (1) $n+1\ne n$

(2) $n+1=m+1\Rightarrow n=m$

…

(7) $\varphi(0)\wedge\forall n(\varphi(n)\to\varphi(n+1))\to\forall n\varphi(n)$,

其中φ是语言$\{+,0,\le\}$上的一阶逻辑公式. }

deframe 群

{ 超类:独异点

参数:$(G,\circ)$

参数类型:$\lambda\times(\lambda\times\lambda\to\lambda)$

$G(\pi_1$(参数))的概念类型:集合

G 的类型:任意λ

$\circ(\pi_2$(参数))的概念类型:二元运算

$\circ$的类型:$\lambda\times\lambda\to\lambda$

条件(1) $\forall x,y,z\in G((x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z))$

(2) $\exists e\in G\forall x\in G(x\circ e=e\circ x=e)$

(3) $\forall x\in G\exists y\in G(x\circ y=y\circ x=e)$ }

deframe 群范畴

{ 超类:范畴

参数:$(\mathcal{G},Hom)$

$\mathcal{G}$ 的概念类型:集合

$\mathcal{G}$ 的类型:$\boldsymbol{sets}(\top)$,其中$\top$是所有类型的集合

$\mathcal{G}$ 的元素的概念类型:群

Hom 的概念类型:映射

Hom 的类型:$\top\times\top\to\top^{\top}$

$Hom:G\times G\rightarrow G^G$

$Hom(\boldsymbol{G},\boldsymbol{H})$的概念类型:集合

$Hom(\boldsymbol{G},\boldsymbol{H})$的元素类型:同态映射,即 $f\in Hom(\boldsymbol{G},\boldsymbol{H})\Rightarrow\forall x,y\in\pi_1(\boldsymbol{G})(f(xy)=f(x)f(y))$

G 上的二元关系:子群关系

定义域和值域:G

条件:子群关系$(\boldsymbol{H}=(H,\circ_1),\boldsymbol{G}=(G,\circ_2))\Leftrightarrow H\subseteq G\wedge\forall x,y\in H(x\circ_1 y=x\circ_2 y\in H)$

$\wedge\exists e\in G\cap H\forall x\in H(x\circ_1 e=e\circ_1 x=x)\wedge\forall x\in H\exists y\in H(x\circ_1 y=y\circ_1 x=e)$ }

为了表示下面的群论中的定理,我们需要关于群、自然数和群范畴的框架表示中的符号和断言.

群论定理 **5.1**. 设 $\boldsymbol{G}=(G,\circ)$是一个有限群,设 $n=|G|$.对任何 $\boldsymbol{G}$ 的子群 $\boldsymbol{H}$, $p=|\pi_1(\boldsymbol{H})|$,则 $p|n$.

我们可以这样表示这个定理:

$\forall\boldsymbol{G}\sqsubseteq$群$(number(\pi_1(\boldsymbol{G}))\sqsubseteq$自然数

$\rightarrow\forall\boldsymbol{H}\sqsubseteq$群(子群关系$(\boldsymbol{G},\boldsymbol{H})\rightarrow number(\pi_1(\boldsymbol{G}))\sqsubseteq$自然数$\wedge number(\pi_1(\boldsymbol{H}))|number(\pi_1(\boldsymbol{G}))))$.

我们自然可以要求知识库(在合理的响应时间内)可以回答用户关于概念的查询,但关于领域一般断言的查询是回答不了的,否则,知识库就可以得到该领域新的还没有被研究出来的结果了.比如,要证明这个群论定理,我们要有如下关于定理中出现的概念、关系和函数的基本性质:

(1) $\forall H,G\sqsubseteq$集合$(H\subseteq G\rightarrow number(H)\leq number(G))$;

(2) $\forall n\sqsubseteq$自然数$\forall H\sqsubseteq$集合$(number(H)\leq n\rightarrow number(H)\sqsubseteq$自然数$)$;

(3) $\forall\boldsymbol{G},\boldsymbol{H}\sqsubseteq$群(子群关系$(\boldsymbol{G},\boldsymbol{H})\rightarrow\forall a,b\in\pi_1(G)(number(a\pi_1(\boldsymbol{H}))=number(b\pi_1(\boldsymbol{H}))=number(\pi_1(\boldsymbol{H}))$

$\wedge(a\pi_1(\boldsymbol{H})=b\pi_1(\boldsymbol{H})\vee a\pi_1(\boldsymbol{H})\cap b\pi_1(\boldsymbol{H})=\varnothing))$;

(4) $a\pi_1(\boldsymbol{H})=\{a\circ b:b\in\pi_1(\boldsymbol{H})\}$;

(5) $\exists Z\sqsubseteq$集合$(Z\subseteq\pi_1(\boldsymbol{G})\wedge\forall a,b\in Z(a\neq b\rightarrow a\pi_1(\boldsymbol{H})\cap b\pi_1(\boldsymbol{H})=\varnothing)\wedge\forall a\in\pi_1(\boldsymbol{G})\exists c\in Z(a\in c\pi_1(\boldsymbol{H}))$;

(6) $\pi_1(\boldsymbol{G})=\cup_{c\in Z}(c\pi_1(\boldsymbol{H}))$;

(7) $\forall f\sqsubseteq$函数:自然数$\rightarrow$集合$(\forall i,j,n\sqsubseteq$自然数$(i,j\leq n\wedge i\neq j\rightarrow f(i)\cap f(j)=\varnothing)\rightarrow$

$number(\cup_{i\leq n}f(i))=\Sigma_{i\in\{1,\ldots,n\}}number(f(i)))$;

(8) $\forall Z\sqsubseteq$集合$\forall f\sqsubseteq$函数:$Z\rightarrow$集合$(\forall a,b\in Z(a\neq b\rightarrow f(a)\cap f(b)=\varnothing)\rightarrow number(\cup_{a\in Z}f(a))=\Sigma_{a\in Z}number(f(a)))$;

(9) $number(\pi_1(G))=\Sigma_{a\in Z}number(a\pi_1(\boldsymbol{H}))=|Z|\times number(\pi_1(\boldsymbol{H}))$;

(10) $\forall n,m,i\sqsubseteq$自然数$(n|m\leftrightarrow\exists i(m=n\times i))$.

这样的推理过程是不能算法化的.这正是 Hilbert 提出的 Entscheidungs 问题:找一个算法,判定一个结论能否从一个前提中通过形式推理的方法推出.

如果这个问题的算法存在,则预示着所有数学问题都存在算法解.如果存在一个问题没有算法解,那么,上述问题没有算法解.Turing 直观地认为这样的算法不存在.对于关于算法存在的问题,找到直观的算法就可以解决问题.我们可以简单地判定一个算法是否为一个直观的算法.直观算法定义为:一个算法是有限集合的,可以机械执行的指令.但如果算法不存在而要证明它不存在,就需要有算法的严格定义.正是这一点促使 Turing 提出 Turing 机来给出算法的严格定义.现代计算机正是基于 Turing 机这样基于指令的计算模型而设计的.

6 以本体为语言的逻辑表示

由上面的讨论可以看出,为了使知识库的推理可行,我们必须对框架中的内容进行限制.因此,我们的想法是:首先给出一个描述数学概念的本体;然后以这个本体为语言,表示数学中的定理,其中这些定理可能包含几个概念框架所描述的概念.我们可以将一个领域的概念描述(领域本体)看作是词典,而该领域的结论和定理是用词典中的词所表示的句子、段落和文章.领域本体只给出了该领域的基本概念的描述和定义,但这些概念(领域上)的基本性质是用本体中概念所表示的逻辑句子.这里我们强调是领域上的基本性质,因为一个概念的性质是多方面的,而一个领域只关心这些性质中与领域相关的性质.

我们假定本体[10−12]是由第 3 节中给出的数学知识表示语言所表示的数学概念和个体的集合.

给定一个本体 O,以 O 为逻辑语言 $\boldsymbol{L}$ 的一个部分.假设 $\boldsymbol{L}$ 还包含下列符号:

- 函数符号的集合 $F=\{f_1,f_2,\ldots\}$,每个函数符号 f 具有一个形如$(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\to\alpha$的类型说明,其中 f 是一个 n-元函数符号,$\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha\in\boldsymbol{C}_O$,其中 $\boldsymbol{C}_O$ 表示本体 O 中的概念类;
- 原子谓词的集合 $P=\{p_1,p,\ldots\}$,每个谓词符号 p 具有一个形为$(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$的类型说明,其中 p 是一个 n-元谓词符号,$\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\boldsymbol{C}_O$;
- 对每个概念名称$\alpha\in O$,有表示该概念的变量符号的集合$\{x_1,x_2,\ldots\}$,记为 $x{:}\alpha$;
- 符号::表示个体是概念,如 2::自然数表示 2 是自然数.
- 逻辑符号$\neg,\wedge,\forall$.

定义 **6.1**. 一个项 t 是一个变量符号,或者是 O 中的个体名称,或者 $t=f(t_1,\ldots,t_n)$,其中 $t_1,\ldots,t_n$ 是项,f 是一个 n-元函数符号.

项 t 的类型$\sigma(t)$定义为

- $\sigma(t)=\beta$,如果 $t=g\in G_O$;
- $\sigma(t)=\alpha$,如果 $t=x{:}\alpha$;
- $(t)=\alpha$,如果 $t=f(t_1,\ldots,t_n)$,$f{:}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\to\alpha$.

其中,β是 O 中$\sqsubseteq$-最小的使得 $g{::}\beta$的概念名称,g 表示个体,G_O 表示本体 O 中的个体的集合.

定义 **6.2**. 一个公式φ是以下几类之一:

(1) O 中的一个断言;

(2) $\varphi=p(t_1,\ldots,t_n)$,其中 $t_1{:}\alpha_1,\ldots,t_n{:}\alpha_n$ 是项,$p{:}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$是一个 n-元谓词符号;

(3) $t{:}\alpha$,其中 t 是一个表示变元的项,α是 O 中的一个概念;

(4) $t{::}\alpha$,其中 t 是一个表示常元的项,α是 O 中的一个概念;

(5) $\neg\psi,\psi\wedge\gamma$,其中$\psi,\gamma$是公式;

(6) $\forall x\varphi(x)$,其中$\varphi(x)$是一个含变元 x 的公式.

这样,我们可以很容易地表示各学科中的结论.

例 6.3:为了表示群论定理 5.1,设 O 含有概念群、集合、自然数、个体自然数结构以及关于这些概念和个体的框架描述.个体自然数结构定义为以自然数集合为论域,|为表示整除的二元关系的集合序对.

L 还包含:

(1) 函数符号π_1,π_2:群→集合、序对的第一和第二投影函数;

(2) 函数符号| |:集合→自然数、集合的个数函数;

(3) 关系$\lhd$:(群,群),群的子群关系;

(4) 关系$\subseteq$:(集合,集合),集合的包含关系.

其中,关系$\lhd$可以用$\subseteq$来定义:对任何 $x,y\in$群,$x\lhd y$ 当且仅当$\pi_1(x)\subseteq\pi_1(y)$且$\pi_2(x)\subseteq\pi_2(y)$.这样,定理可以表示为

$$\forall x{:}\text{群}(|\pi_1(x)|{:}\text{自然数}\to\forall y{:}\text{群}(y\lhd x\to|\pi_1(y)|{:}\text{自然数}\wedge|\pi_1(y)|\,|\,|\pi_1(x)|)).$$

其中,我们用“x:群”表示 x 是表示“群”这样类型的元素的变量符号,“$|\pi_1(x)|$:自然数”表示“群”变元 x 的第一投影函数的值(设群 $x=(X,\circ)$,则$\pi_1(x)=X$ 的元素的个数是自然数,$|\pi_1(y)|\,|\,|\pi_1(x)|$表示 x 的子群的 y 的第一投影函数的值的元素个数整除 x 的第一投影函数的值的元素个数.

注意:在上一节中用数学知识表示语 DL_L 来表示群定理时,需要用到本体中数学概念“群范畴”的定义中的“子群关系”.在用基于本体的一阶逻辑表示群定理时,由于本体中数学概念“群范畴”在语言 $\boldsymbol{L}$ 中是常量,我们不能直接由“群范畴”的定义得出“子群关系”.因此,我们通过一阶逻辑公式来表示“子群关系”.当然,我们需要用本体中的数学概念“集合”和“自然数结构”来定义函数π_1,π_2,||,子群关系$\lhd$,包含关系$\subseteq$和整除关系|.

7 相关工作

OpenMath 是 OpenMath 组织提出的支持在不同的计算机软件工具之间进行语义丰富的数学转换的标准.

OpenMath 模型是基于一个数学对象的 3 层来表示的:用于内部表示的私有层、OpenMath 对象的抽象层以及把 OpenMath 对象转换成比特流的通信层.一个依赖于应用的程序使用它的内部表示来处理数学对象,它能将这些内部表示转换成 OpenMath 的对象,并且通过 OpenMath 对象的比特流表示来进行通信.

在抽象层,OpenMath 的基本对象是整数、符号、浮点数、字符串、比特数组和变元.复杂对象是通过构造子 application,binding,error 和 attribution 来复合的.如通过构造子 application 对符号 sin 和变元 x 进行复合得到 OpenMath 对象 application (sin,x)(表示 sin(x)).抽象的 OpenMath 对象的含义是由内容词典(简称 CDs)给出的.内容词典用来给所有的 OpenMath 对象指派形式的和非形式的语义.它定义用来表示出现在特定数学领域中的概念的符号.OpenMath 对象的定义中包括:名称、角色、描述、示例、性质的非形式说明(CMP)以及性质的形式说明(FMP).

MathML 是 W3C 提出了一个用 XML 来对数学进行编码的新的“标准”,其主要目的是使数学知识能够应用于 Web. MathML 是由它的 XML 结构所定义的.在 XML 的基础上,MathML 有特定的限制,如函数变元的数目和类型.同时,这些限制必须由特定的 MathML 支持的应用来检测是否满足.MathML 有两种类型的标记:呈现标记和内容标记.MathML 没有对用于呈现标记的符号的语义进行定义和阐述,但类似于 OpenMath 的内容词典,MathML 定义了用来进行内容标记的所有内容元素的缺省语义.

MathML 定义了一组用来对数学知识进行表示的内容元素,其中包括标识符元素(表示常数、变元符号和自定义符号)、基本内容元素(如分隔符 *sep*、定义域元素 *domian* 等)、算术代数逻辑(如加法 *plus* 等)、关系(如小于 *lt*)、积分和矢量计算(如微 *diff*)、集合论、基本函数、序列和级数、统计学以及常量和符号元素.

MathML 的内容元素的主要作用是提供用来记录一个特定的标记结构具有特定的数学含义的一种机制.因此,每一个内容元素都必须有某种形式的数学定义.MathML 给出了每个内容元素的缺省定义,用户可以通过制定内容元素的 XML 属性定义 URL 来给出自定义的该内容元素的其他特定的数学定义.MathML 的内容元素的数学定义的基本原则和形式与 OpenMath 的内容词典是相同的,只是在具体的内容上可能有所不同.同时,MathML 的内容元素是相对固定的(大约 150 个).相比之下,OpenMath 更具有可拓展性:提供新的数学领域的符号的语义的新的 CDs 能够不断地产生.

MathML 给出了每一个内容元素的具体定义.此定义中包括:名称、描述、分类、MML 的属性(MathML 内容元素的 XML 属性,如对象类型属性等)、符号差(siganiture)、示例、性质以及评语.

例如,在 MathML 中“自然数集合”的定义如下:

MMLdefinition 自然数集合

{ 描述:表示所有自然数的集合,如非负整数

分类:常量

MML 属性:定义 URL:URI identifying the definition

缺省值:$APPENDIX_C$

符号差(siganiture):集合

性质:对所有的 n,n 是自然数蕴涵 n+1 是自然数.

性质:0 是自然数.

性质:对所有的 n,n 是自然数等价于 n=0 或者 n–1 是自然数.

示例:1 729 是自然数 }

虽然 OpenMath 与 MathML 几乎同时出现了两种数学知识标识语言,但它们并不是相互竞争的,而是相辅相成的.

首先,这两种数学知识标识语言的目的是不同的:OpenMath 致力于通过内容词典机制按一定的标准对 OpenMath 对象的语义进行形式化的描述;而 MathML 着重于提供 Web 上的数学知识所呈现的标准;其次,

OpenMath 没有涉及数学的呈现形式,它需要使用 MathML 的呈现标记来对 OpenMath 对象进行呈现;而 MathML 有自定义的呈现形式以及一组固定的数学操作符,使得它比 OpenMath 更适合嵌入到 Web 浏览器中,但 MathML 只给出了内容元素的缺省语义,因此,它可以借助 OpenMath 的语言来定义其呈现标记元素的语义.

8 总结和进一步研究工作

在本文中,我们给出两种数学知识的表示方法:一种是以一个逻辑语言 L 上的公式为属性值域的描述逻辑;另一种是以描述逻辑描述的本体为逻辑语言的一部分的一阶逻辑.在前者的表示中,如果对公式不作任何限制,那么得到的知识库(*ABox* 和 *TBox*)中的推理不是可算法化的;在后者的表示中,以描述逻辑描述的本体中的推理是可算法化的,而用本体表示的一阶逻辑理论一般是不可算法化的.

为此,我们建议在表示数学知识时用框架或描述逻辑来表示概念性知识;然后,用这样表示的知识库作为逻辑语言的一部分来表示非概念性知识.这样,在查询时对概念性查询使用有效的框架推理系统;对非概念性查询,只回答这样的知识在知识库中是有还是没有,而不回答这样的知识是否可以由知识库推理得出.

数学知识中的类(数学概念)常常带有参数,并且参数是复合的.比如在定义群这个概念时,我们要用到两个参数$(G,\circ)$,其中 G 是表示论域的参数,取值在非空集合上;$\circ$是论域 G 上的二元运算,即对任何 $x,y\in G,x\circ y\in G$;并且用含有参数 G 和$\circ$的一阶逻辑公式来表示群的基本性质:结合律、含单位元和含逆元.在这些公式中,$G,\circ$是二阶对象,G 中的元素是一阶对象.数学概念中参数的作用类似于经典概念理论中的典型元素(原型),同时也是所有事例具有的共同形式的抽象表示.因为经典的概念理论适合描述命名对象(nominal objects)类,而数学中的对象均是命名对象.因此,建立参数的形式定义并讨论参数的继承性质是我们进一步要研究的课题之一.

此外,在数学知识的表示中,每一个数学概念都有“类型”和“概念类型”,其中数学概念的类型是不依赖于数学知识的具体表示的,它的值域是数学概念的所有类型,而数学概念的概念类型是依赖于数学知识的表示的,并且它的值域是本文所讨论的由所有数学概念和个体所组成的本体 O 中的数学概念.例如,数学概念“自然数集合”的“类型”是 ***set***(ω),并且它的“概念类型”是数学概念“集合”,其中 ***set***(ω)是一个集合类型,使得该集合中的所有的元素的类型为ω.在表示数学知识的时候引入类型主要是从实现的角度考虑的.因此,对数学概念的类型和概念类型以及它们之间的关联的研究是我们下一步要做的工作之一.

References:

[1] Broekstra J, Klein M, Decker S, Fensel D, van Harmelen F, Horrocks I. Enabling knowledge representation on the Web by extending RDF schema. In: Proc. of the 10th World Wide Web Conf. Springer-Verlag, 2001. 467−478. http://wwwis.win.tue.nl:8080/~jbroekst/papers/www10.pdf

[2] Buswell S, Caprotti O, Carlisle DP, Dewar MC, Gaëtano M, Kohlhase M. The OpenMath standard. 2004. http://www.openmath.org/cocoon/openmath/standard/om20/omstd20.pdf

[3] Caprotti O, Carlisle D. OpenMath and MathML: Semantic mark up for mathematics. In: ACM Crossroads. ACM Press, 1999. http://www.acm.org/crossroads/xrds6-2/openmath.html

[4] Ausbrooks R, Buswell S, Carlisle D, Dalmas S, Devitt S, Diaz A, Froumentin M, Hunter R, Ion P, Kohlhase M, Miner R, Poppelier N, Smith B, Soiffer N, Sutor R, Watt S. Mathematical Markup Language (MathML) Version 2.0. 2nd ed., 2003. http://www.w3.org/TR/ 2003/REC-MathML2-20031021

[5] Smirnova ES, So CM, Watt SM. An architecture for distributed mathematical Web services. In: Asperti A, *et al*., eds. Proc. of the 3rd Int'l Conf. on Mathematical Knowledge Management. LNCS 3119, Springer-Verlag, 2004. 363−377. http://www.csd.uwo.ca/~watt/pub/reprints/2004-mkm-mathserv.pdf

[6] Cao CG, Feng QZ, Gao Y, Gu F, Si JX, Sui YF, Tian W, Wang HT, Wang LL, Zeng QT, Zhang CX, Zheng YF, Zhou XB. Progress in the development of national knowledge infrastructure. Journal of Computer Science and Technology, 2002,17(5): 523−534.

[7] Zeng QT. Research on knowledge acquisition and analysis of mathematical concepts [Ph.D. Thesis]. Beijing: Institute of Computing Technology, the Chinese Academy of Sciences, 2005 (in Chinese with English abstract).

[8] Baader F, Calvanese D, McGuinness DL, Nardi D, Patel-Schneider F. The Description Logic Handbook. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

[9] Borgida A. On the relative expressive power of description logics and predicate calculus. Artificial Intelligence, 1996,82:353–367.

[10] Fensel D, van Harmelen F, Horrocks I, McGuinnesset D, Patel-Schneider F. OIL: An ontology infrastructure for the semantic Web. IEEE Intelligent Systems, 2001,16(2):38–45.

[11] McGuinness D. Ontologies come of age. In: Fensel D, Hendler J, Lieberman H, Wahlster W, eds. Spinning the Semantic Web: Bringing the World Wide Web to Its Full Potential. MIT Press, 2002.

[12] McGuinness D, van Harmelen F. OWL Web ontology language: Overview. 2003. http://www.w3.org/TR/2003/WD-owl-features-20030331/

附中文参考文献:

[7] 曾庆田.数学概念的知识获取与分析方法研究[博士学位论文].北京:中国科学院计算技术研究所,2005.

曹存根(1964－),男,江苏东台人,博士,研究员,博士生导师,主要研究领域为人工智能.

眭跃飞(1963－),男,博士,研究员,博士生导师,CCF 高级会员,主要研究领域为模态逻辑,本体工程.

孙瑜(1974－),女,博士,副教授,主要研究领域为形式本体,知识表示.

曾庆田(1976－),男,博士,副教授,主要研究领域为形式本体,知识表示.