ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
Journal of Software, Vol.17, No.5, May 2006, pp.1115−1123
DOI: 10.1360/jos171115

E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel/Fax: +86-10-62562563

双环 Petersen 图互联网络及路由算法*

王 雷+, 林亚平, 夏 巍

(湖南大学 软件学院,湖南 长沙 410082)

Topology and Routing Algorithms of Double-Loops Connected Petersen Graph Networks

WANG Lei+, LIN Ya-Ping, XIA Wei

(College of Software, Hu'nan University, Changsha 410082, China)

+ Corresponding author: Phn: +86-731-8822333, E-mail: wanglei_hn@hn165.com, http://www.hnu.net.cn

Wang L, Lin YP, Xia W. Topology and routing algorithms of double-loops connected petersen graph network. *Journal of Software*, 2006,17(5):1115−1123. http://www.jos.org.cn/1000-9825/17/1115.htm

Abstract: Petersen graph has good performance in parallel and distributed computation because of its characteristics such as short diameter and regularity. On the basis of topology of double-loops, a new double-loops connected Petersen graph network DLCPG(k) is constructed. In addition, unicasting, broadcasting and a kind of fault-tolerant routing algorithms are designed respectively. It is proved that DLCPG(k) not only has good extensibility, short diameter and simple topology, but also has the following good characteristics for the networks with 10^k nodes: The diameter of DLCPG(k) is shorter than that of 2-dimensional Torus and RP(k) networks, and the grouping ability of DLCPG(k) overmatches that of 2-dimensional Torus and RP(k) networks at the same time. It is also proved that the communication efficiency of both the unicasting and broadcasting algorithms are better than the unicasting and broadcasting algorithms of RP(k) network conspicuously. Simulation results conclude that the new fault-tolerant routing algorithm is of good fault-tolerant ability.
Key words: fault-tolerant; routing algorithm; interconnection network; double loops; Petersen graph

摘 要: Petersen 图由于具有短直径和正则性等特性,因此在并行与分布式计算中具有良好的性能.基于双环结构,构造了一个双环 Petersen 图互联网络 DLCPG(k).同时,分别设计了 DLCPG(k)上的单播、广播和容错路由算法.证明了 DLCPG(k)不但具有良好的可扩展性、短的网络直径和简单的拓扑结构等特性,而且对于 10^k 个节点组成的互联网络,DLCPG(k)还具有比二维 Torus 以及 RP(k)互联网络更小的直径和更优越的可分组性.另外,还证明了其上的单播、广播路由算法的通信效率与 RP(k)上的单播和广播路由算法的通信效率相比均有明显的提高.仿真实验表明,新的容错路由算法也具有良好的容错性能.
关键词: 容错;路由算法;互联网络;双环;Petersen 图
中图法分类号: TP393 文献标识码: A

随着多处理机系统的规模扩大,为了提高并行计算机的通信效率,人们一直在研究高带宽、低延迟及具有良好可扩展性的互联网络.Petersen 图因其具有小直径、正则性等优良特性而引起人们的关注[1−9].文献[2]以

* Supported by the Natural Science Foundation of Hu'nan Province of China under Grant No.03JJY3098 (湖南省自然科学基金)
Received 2004-05-31; Accepted 2005-10-08

Petersen 图为基础构造了一种循环 Petersen 图网络 CPN(cyclic petersen network),其中 k 维 CPN 网络 CPN_k 是以 Petersen 图为原子,通过 k 维循环网络将各 Petersen 图中对应的节点连接而成.因此 CPN_k 网络具有 10^k 个节点,且其节点的连接度不大于 5,故与简单 Petersen 图互联网络相比,CPN 网络具有更好的可扩展性,但其缺点是扩展方法过于复杂.文献[3,4]给出了一种折叠 Petersen 图网络 FPN(folded petersen network),并对其性质进行了研究,其中 k 维的 FP 网络 FP_k 定义为 k 个 Petersen 图的卡特积.因此,FP_k 网络是一种具有 10^k 个节点,节点连接度为 $3k$,网络直径为 $2k$ 的对称正规图.另外,由于 FP_k 网络是利用简单 Petersen 图迭代而成的,因此,其可扩性要优于简单的 Petersen 图互联网络.文献[5]将 Petersen 图嵌入 Hypercube 网络中,构造了一种超 Petersen 网络 HP(hyper petersen).HP 网络具有非常好的连接性、非常小的直径以及简单的拓扑结构,因此具有较高的通信效率,但由于其可扩展性差而限制了其更进一步的应用.针对这一问题,文献[6–8]给出了 Petersen 图的一种基于环的扩展方法,并在该扩展方法的基础上提出了一种具有较好扩展性的互联网络 RP(k)及其路由算法.文献[9]将 RP(k)进一步扩展到多维环状 Petersen 互联网络 RP($P,k_1,k_2,\ldots,k_t$).

本文首先结合双环结构提出了 Petersen 图的一种新的扩展方法,并在该扩展方法的基础上给出了一种新型互联网络——双环 Petersen 图互联网络 DLCPG(k)(double_loops connected petersen graph)及其路由算法.本文证明了 DLCPG(k)不但具有良好的可扩展性、短的网络直径和简单的拓扑结构,而且特别地,对于由 $10\times k$ 个节点组成的互联网络,DLCPG(k)还具有如下良好性质:(1) DLCPG(k)的直径小于二维 Torus 与 RP(k)(ringed petersen)互联网络的直径;(2) DLCPG(k)的可分组性优于二维 Torus 与 RP(k)互联网络的可分组性.

最后,本文还基于 DLCPG(k)互联网络结构分别设计了单播、广播以及一种新的容错路由算法,证明了单播、广播路由算法的通信效率与 RP(k)上对应算法的通信效率相比均有明显的提高.另外,仿真实验表明,新的容错路由算法具有良好的容错性能.因此,DLCPG(k)是一种具有良好拓扑性质的新型互联网络拓扑结构.

1　双环 Petersen 图互联网络

1.1　预备知识

定义 1 (**Petersen** 图互联网络). Petersen 图互联网 $G(V,E)$是具有下述性质的一种网络拓扑结构:

(1) $G(V,E)$是连通无向图;

(2) $V=\{u_0,u_1,\ldots,u_4;v_0,v_1,\ldots,v_4\}$;

(3) $E=\{u_iv_i|i=0,1,\ldots,4\}\cup\{u_{i+1}u_i|i=0,1,\ldots,4\}\cup\{v_iv_{i+k}|i=0,1,\ldots,4,k=2,3\}$.

图 1 给出了基于 Petersen 图的互联网络的拓扑结构图例.由图 1 可知,Petersen 图包含 10 个节点,分别从 0~9 编号.显然,这种构造的 Petersen 图互联网络具有以下良好的性质:(1) 网络中任意节点的连接度均为 3,整个网络的直径为 2.网络具有正则性、对称性、短直径、低连接度等优良特性.(2) 网络中任意两个节点之间有 3 条无交的路,若两个节点直接相连,则这 3 条路的长度分别为 1,4,4,否则为 2,3,3,因此,具有良好的容错性与并行性;(3) 另外,研究还表明,Petersen 图互联网络具有良好的可嵌入性,其缺点是网络不具备可扩展性.

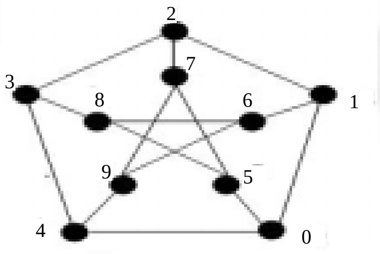

Fig.1　Topology of petersen graph
图 1　Petersen 图的拓扑结构

定义 **2**(节点组的距离). 对于一个互联网络 N 中的一组节点Γ,节点组Γ的距离定义为该组中任意两个节点距离的最大值.

定义 **3**(最优分组)[7–9]. 对于给定的正整数λ,在互联网络 N 中存在多个包含λ个节点的组,称距离最短的组为包含λ个节点的最优分组,记为 $G_\lambda(N)$.

定义 **4**(可分组性)[7–9]. 对于给定的两个互联网络 N_1,N_2,若对于任意正整数λ有 $G_\lambda(N_1)$的距离≤$G_\lambda(N_2)$的距离,则称互联网络 N_1 的可分组性优于互联网络 N_2 的可分组性.

定义 **5**(双环网络)[10,11]. 网络 $G=(k,s)$,它的每个节点记为 $0,1,2,\ldots,k-1$,并且从每个节点 i 发出两条边 $i\to i+1 \pmod k$和 $i\to i+s \pmod k$,其中 s 为自然数,而且 $1<s<k$.显然,若将双环网络看作一个连通无向图,则图中的

任意节点 A 对应于 4 条边,其中两条为由 A 发出的边,$i \to i+1 \pmod{k}$称为节点 A 的第 0 条边,$i \to i+s \pmod{k}$称为节点 A 的第 1 条边.另外两条为指向 A 的边,$i+k-1 \pmod{k} \to i$ 称为节点 A 的第 2 条边,$i+k-s \pmod{k} \to i$ 称为节点 A 的第 3 条边.

1.2 双环Petersen图互联网络的拓扑结构

定义 **6**(**Petersen** 图的编码规则[12]). 在单个 Petersen 图中,每个节点按如图 2 所示的规则进行编码.其中,每个节点用符号 $a,b,0$ 的不同组合构成的六元组来进行编码.这样编码的好处是,利用下文的定义 7 中规定的操作符Θ,我们可以由节点的编号方便地计算出任意两个节点之间的距离.任意两个节点之间距离的计算公式由定理 1 给出.

定义 **7**. 对 Petersen 图的编码中符号 $a,b,0$,定义操作符Θ如下:$a\Theta a=0, a\Theta 0=0, 0\Theta a=0, b\Theta b=0, b\Theta 0=0, 0\Theta b=0, a\Theta b=1, b\Theta a=1, 0\Theta 0=0$.

定理 **1**. 对 Petersen 图中任意两个节点 $A_{p1}(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6), A_{p2}(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6), a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6 \in \{a,b,0\}$,则节点 A_{p1},A_{p2} 之间的距离 $Dist\_P(A_{p1},A_{p2})=\sum_{j=1}^{6}(a_j\Theta b_j)$.

证明:由图 2 可知,Petersen 图共有 15 条边,利用枚举法,由定义 6 和定义 7 可知结论成立. □

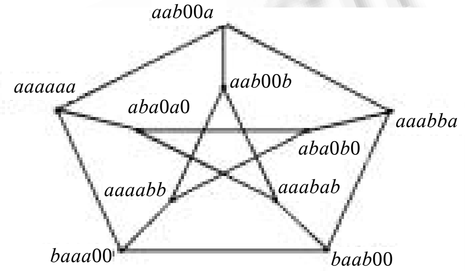

Fig.2 Coding rules of Petersen graph

图 2 Petersen 图的编码规则

定义 **8**(**DLCPG**(***k***)互联网络的构造). 对于 $10\times k$ 个节点,我们按如下方法将双环的简单性和 Petersen 图的可连接性结合起来,构造互联网络 DLCPG(k):

(1) 首先,每 10 个节点按 Petersen 图互联,构成 k 个 Petersen 图.每个 Petersen 图称为一片;

(2) k 个 Petersen 图按照如下方法连接成双环:k 个 Petersen 图按照 $0\sim k-1$ 进行编号,每个 Petersen 图中的节点按定义 6 进行编号,所有 Petersen 图中编号相同的节点按定义 5 中的方式构成双环,其中 s 取$[\sqrt{k}]$;

(3) DLCPG(k)的编码:DLCPG(k)采用如下的编码方式:任意节点 A 的编码由两部分(A_r,A_p)决定,其中 A_r 为片的编号,$0\le A_r\le k-1$;A_p 为片内各 Petersen 图节点的编号.

定理 **2**. 对于 k 维双环网络中任意两个节点 $A_{r1},A_{r2},A_{r1},A_{r2}\in[0,k-1]$,则节点 A_{r1},A_{r2} 之间的距离(其中以下的 div 为取商运算符,mod 为取余运算符)为

$$Dist\_L(A_{r1},A_{r2})=\begin{cases}|A_{r2}-A_{r1}|\bmod[\sqrt{k}]+|A_{r2}-A_{r1}|\operatorname{div}[\sqrt{k}], \\ \qquad 若|A_{r2}-A_{r1}|\le[k/2]且|A_{r2}-A_{r1}|\bmod[\sqrt{k}]\le[\sqrt{k}/2]; \\ [\sqrt{k}]-|A_{r2}-A_{r1}|\bmod[\sqrt{k}]+1+|A_{r2}-A_{r1}|\operatorname{div}[\sqrt{k}], \\ \qquad 若|A_{r2}-A_{r1}|\le[k/2]且[\sqrt{k}/2]<|A_{r2}-A_{r1}|\bmod[\sqrt{k}]\le[\sqrt{k}]; \\ (k-|A_{r2}-A_{r1}|)\bmod[\sqrt{k}]+(k-|A_{r2}-A_{r1}|)\operatorname{div}[\sqrt{k}], \\ \qquad 若|A_{r2}-A_{r1}|>[k/2]且(k-|A_{r2}-A_{r1}|)\bmod[\sqrt{k}]\le[\sqrt{k}/2]; \\ [\sqrt{k}]-(k-|A_{r2}-A_{r1}|)\bmod[\sqrt{k}]+1+(k-|A_{r2}-A_{r1}|)\operatorname{div}[\sqrt{k}], \\ \qquad 若|A_{r2}-A_{r1}|>[k/2]且[\sqrt{k}/2]<(k-|A_{r2}-A_{r1}|)\bmod[\sqrt{k}]\le[\sqrt{k}]. \end{cases} \quad (1)$$

证明:显然,k 维双环网络中任意两个节点 A_{r1},A_{r2} 之间的距离可唯一分解为表达式(1)中的 4 种情形之一:

1) 若$|A_{r2}-A_{r1}|\le[k/2]$且$|A_{r2}-A_{r1}| \bmod [\sqrt{k}\le\sqrt{k}/2]$,令 $m=|A_{r2}-A_{r1}| \bmod [\sqrt{k}]$, $n=|A_{r2}-A_{r1}| \operatorname{div} [\sqrt{k}]$,则由$|A_{r2}-A_{r1}|\le[k/2]\Rightarrow A_{r1}$经过自己及 $n-1$ 个中间节点 $B_{r1},\dots,B_{r(n-1)}$的第 1 条边,可到达节点 B_{rn}.由定义 8 中的步骤(2)可知,$|B_{rn}-A_{r1}|=n\sqrt{k}\Rightarrow|A_{r2}-A_{r1}| \bmod [\sqrt{k}]=|B_{rn}-A_{r1}| \bmod [\sqrt{k}]$.再结合$|A_{r2}-A_{r1}| \bmod [\sqrt{k}\le\sqrt{k}/2]\Rightarrow|B_{rn}-A_{r2}| \bmod [\sqrt{k}]\le[\sqrt{k}/2]\Rightarrow$节点 B_{rn} 与 A_{r2} 之间的距离为$|B_{rn}-A_{r2}| \bmod [\sqrt{k}]=|A_{r2}-A_{r1}| \bmod [\sqrt{k}]$.故综上所述,有

$Dist\_L(A_{r1},A_{r2})=|A_{r2}-A_{r1}| \bmod [\sqrt{k}]+|A_{r2}-A_{r1}| \operatorname{div} [\sqrt{k}]$.

2) 对于其他 3 种情形,仿照 1)的证明过程,同理可证定理的结论成立. □

定理 3. 对 DLCPG(k)互联网络中任意两个节点 $A(A_{r1},A_{p1}),B(A_{r2},A_{p2}),A_{r1},A_{r2}\in[0,k-1]$,节点 A,B 之间的距离为 $Dist(A,B)=Dist\_L(A_{r1},A_{r2})+Dist\_P(A_{p1},A_{p2})$.

证明:由定理 2 可知,节点 $A(A_{r1},A_{p1})$与节点 $C(A_{r2},A_{p1})$之间的距离为 $Dist\_L(A_{r1},A_{r2})$,而节点 $C(A_{r2},A_{p1})$与 $B(A_{r2},A_{p2})$属于同一个片,因此由定理 1 可知,它们之间的距离为 $Dist\_P(A_{p1},A_{p2})$,即节点 $A(A_{r1},A_{p1}),B(A_{r2},A_{p2})$之间的距离为 $Dist(A,B)=Dist\_L(A_{r1},A_{r2})+Dist\_P(A_{p1},A_{p2})$. □

1.3 DLCPG(*k*)的性质分析

由上一节中 DLCPG(k)的构造方法易知性质 1、性质 2 成立(限于篇幅,证明略).

性质 1. 假定网络的节点个数为 $10\times k$,则 DLCPG(k)是正规互联网络,且各节点的度为 7.

性质 2. 假定网络的节点个数为 $10\times k$,则 DLCPG(k)的网络直径为$\lceil\sqrt{k}\rceil+1$,其中⌈⌉为向上取整操作符.

假定互联网络的节点个数为 $10\times k$,则 DLCPG(k)与 RP(k)及二维 Torus 比较,可得到表 1 的结果.

Table 1 Comparative data of DLCPG(k), RP(k), 2-dimensional Torus and ring

表 1 DLCPG(k)与 RP(k),二维 Torus 及环的对比数据

Characteristic	DLCPG(k)	RP(k)	2-Dimensional Torus	Ring
Regularity	Yes	Yes	Yes	Yes
Connective degree	7	5	4	2
Diameter	$\lceil\sqrt{k}\rceil+1$	$[k/2]+2$	$2\times[\sqrt{10k}/2]$	$5\times k$

由表 1 中 DLCPG(k)的特征易证以下性质 3、性质 4 成立(限于篇幅,证明略).

性质 3. 假定互联网络的节点数为 $10\times k$,则 DLCPG(k)的直径小于 RP(k)的直径,且 k 越大,DLCPG(k)的直径越接近 RP(k)的直径的 $2/(\lceil\sqrt{k}\rceil+1)$.

性质 4. 假定互联网络的节点个数为 $10\times k$,则 DLCPG(k)的网络直径小于二维 Torus 的直径.特别地,k 越大,DLCPG(k)的直径越接近二维 Torus 互联网络直径的 $2/\sqrt{10}$.

下面分别计算 DLCPG(k),RP(k)及二维 Torus 网络的最优分组距离.

易知 DLCPG(k)最优分组的距离为(以下的 div 为取商运算符,mod 为取余运算符)

$$d(G_\lambda(DLCPG(k)))=\begin{cases}1, & 若\lambda=2\\ 2+(\lambda-1)\operatorname{div}10, & 若3<\lambda\le10([\sqrt{k}]+1)\\ 2+\{(\lambda-1)\operatorname{div}10\}\bmod[\sqrt{k}]+(\lambda-1)\operatorname{div}10[\sqrt{k}], & 若\lambda>10([\sqrt{k}]+1)\end{cases}\tag{2}$$

RP(k)最优分组的距离为

$$d(G_\lambda(RP(k)))=\begin{cases}1, & 若\lambda=2\\ 2+(\lambda-1)\operatorname{div}10, & 若\lambda\ge3\end{cases}\tag{3}$$

二维 Torus 最优分组距离为

$$d(G_\lambda(Torus))=2\times(\sqrt{\lambda}-1)\tag{4}$$

由式(2)~式(4)易知下述性质 5、性质 6 成立.

性质 5. 假定互联网络的节点个数为 $10\times k$,则 DLCPG(k)互联网络的可分组性优于 RP(k)互联网络的可分组性.特别地,当分组节点数$\lambda\ge10([\sqrt{k}]+1)$时,$\lambda$越大,DLCPG($k$)的最优分组距离越接近 RP($k$)最优分组距离的 $1/[\sqrt{k}]$.

性质 6. 假定互联网络的节点个数为 $10\times k$,则 DLCPG(k)互联网络的可分组性优于二维 Torus 互联网络的可分组性.特别地,当分组节点数$\lambda\ge10([\sqrt{k}]+1)$时,$\lambda$越大,DLCPG($k$)的最优分组距离越小于二维 Torus 互联网络最优分组距离的 $\sqrt{10}/20$.

2 路由算法与性能分析

2.1 DLCPG(*k*)上的单播路由算法及其性能分析

DLCPG(k)上的单播路由算法:

假设节点 $A(A_r,A_p)$向节点 $B(B_r,B_p)$发送数据.

(1) 若 A,B 在同一个 Petersen 图中,如果它们直接相连,则 A 直接向 B 发送数据;否则,A 先将数据发送到它与 B 的公共邻节点,再由该公共邻节点将数据转发给 B.

(2) 若 A,B 不在同一个 Petersen 图中,设依据定理 2 求得的节点 A,B 所在的两个 Petersen 图之间的距离 $d=Dist\_L(A_r,B_r)$.令 $d=\sigma\times[\sqrt{k}]+\gamma$,其中 $0<\gamma<[\sqrt{k}]$.

1) 若(A_r+d) mod $k=B_r$ mod k,且 $\gamma\le[\sqrt{k}/2]$,则 A 及其后σ个沿途节点均首先沿自己的第 1 条边将数据一直发送到第 $\sigma\times[\sqrt{k}]$ 号 Petersen 图中的 A_p 节点;然后,该节点及其后γ个沿途节点均沿自己的第 0 条边将数据一直发送到 B 所在的 B_r 号 Petersen 图中的 A_p 节点,再由该节点按步骤(1)将数据转发给 B.

2) 若(A_r+d) mod $k=B_r$ mod k,且 $\gamma>[\sqrt{k}/2]$,则 A 及其后σ+1 个沿途节点均首先沿自己的第 1 条边将数据一直发送到第 $(\sigma+1)\times[\sqrt{k}]$ 号 Petersen 图中的 A_p 节点;然后该节点及其后$[\sqrt{k}]-\gamma$个沿途节点均沿自己的第 2 条边将数据一直发送到 B 所在的 B_r 号 Petersen 图中的 A_p 节点,再由该节点按步骤(1)将数据转发给 B.

3) 若(A_r+d) mod k<>A_r mod k,且 $\gamma\le[\sqrt{k}/2]$,则 A 及其后σ个沿途节点均首先沿自己的第 3 条边将数据一直发送到第 $\sigma\times[\sqrt{k}]$ 号 Petersen 图中的 A_p 节点;然后该节点及其后γ个沿途节点均沿自己的第 2 条边将数据一直发送到 B 所在的 B_r 号 Petersen 图中的 A_p 节点,再由该节点按步骤(1)将数据转发给 B.

4) 若(A_r+d) mod k<>B_r mod k,且 $\gamma>[\sqrt{k}/2]$,则 A 及其后σ+1 个沿途节点均首先沿自己的第 3 条边将数据一直发送到第 $(\sigma+1)\times[\sqrt{k}]$ 号 Petersen 图中的 A_p 节点;然后该节点及其后$[\sqrt{k}]-\gamma$个沿途节点均沿自己的第 0 条边将数据一直发送到 B 所在的 B_r 号 Petersen 图中的 A_p 节点,再由该节点按步骤(1)将数据转发给 B.

算法性能分析:

依据性质 2 可知,DLCPG(k)的网络直径为$\lceil\sqrt{k}\rceil$+1.因此,按最短路径路由算法,在最坏情形下的 DLCPG(k)中的单播路由总共需要$\lceil\sqrt{k}\rceil$+1 轮通信操作.

定义 **9**(算法的通信效率). 若在最坏的情形下,算法将数据从源发送到目的节点总共需要 t 轮通信操作,则称 $1/t$ 为算法的通信效率.

显然,算法能沿着越短的路径将数据从源发送到目的节点,算法的通信效率将越高,即算法能更有效、更快捷地将数据从源发送到目的节点.

依据定义 9,由性质 3 的证明过程易知下述性质 7 成立.

性质 **7**. 假定互联网络的节点个数为 $10\times k$,则 DLCPG(k)的单播路由算法的通信效率接近 RP(k)的单播路由算法通信效率的($\lceil\sqrt{k}\rceil$+1)/2 倍.

由前面的描述可知,在最坏情形下的 DLCPG(k),RP(k)中的单播路由总共需要$\lceil\sqrt{k}\rceil$+1,[k/2]+2 轮通信操作.为了具体对比 DLCPG(k)的单播路由通信效率与 RP(k)的单播路由通信效率的差异,表 2 列出了针对不同节点数、在最坏情形下 DLCPG(k)的单播路由与 RP(k)的单播路由分别需要的通信操作次数.

Table 2 Comparative data of communication rounds for unicast between DLCPG(k) and RP(k)

表 **2** DLCPG(k)与 RP(k)上单播路由所需通信操作的对比数据

Number of nodes	Communication rounds of DLCPG(k)	Communication rounds of RP(k)
320	7	18
4 400	22	222
49 000	71	2 452
110 000	106	5502

2.2 DLCPG(*k*)上的广播路由算法及其性能分析

DLCPG(k)上的单播路由算法:对于任意节点 A,

(1) A 在自己所在的 Petersen 图中进行广播;

(2) 然后,A 所在的 Petersen 图中各节点沿着自己的第 0,1,2,3 号边将信息同时扩散到自己所在双环的所有其他节点.

算法性能分析如下:

执行 DLCPG(k)上的广播路由算法步骤(1)需要 2 轮通信操作,执行算法的步骤(2)需要$\lceil\sqrt{k}\,\rceil-1$ 轮通信操作.因此,DLCPG(k)中的广播路由总共需要$\lceil\sqrt{k}\,\rceil+1$ 轮通信操作.

由性质 3 的证明过程易知下述性质 8 成立.

性质 8. 假定互联网络的节点个数为 $10\times k$,则 DLCPG(k)的广播路由算法的通信效率接近 RP(k)广播路由算法通信效率的($\lceil\sqrt{k}\,\rceil+1$)/2 倍.

为了具体对比 DLCPG(k)的广播路由通信效率与 RP(k)的广播路由通信效率的差异,表 3 列出了针对不同节点数、在最坏情形下 DLCPG(k)的广播路由与 RP(k)的广播路由分别需要的通信操作次数.

Table 3 Comparative data of communication rounds for broadcasting between DLCPG(k) and RP(k)

表 3 DLCPG(k)与 RP(k)上广播路由所需通信操作的对比数据

Number of nodes	Communication rounds of DLCPG(k)	Communication rounds of RP(k)
490	8	26
1 210	12	62
36 000	61	1 802
400 000	201	20 002

2.3 DLCPG(*k*)上的容错路由算法及其性能分析

DLCPG(k)上的容错路由算法:

定义 10. 对定义 6 中定义的 Petersen 图中各节点的编码,假定 $b>a>0$,则对任意节点 A,其 3 个邻节点的编码可按大小进行排序.我们定义节点 A 到具有最小编码的邻节点的链路为节点 A 的第 4 条边,节点 A 到具有次小编码的邻节点的链路为节点 A 的第 5 条边,节点 A 到具有最大编码的邻节点的链路为节点 A 的第 6 条边.

由定义 8 及定义 5 可知,DLCPG(k)互联网络中的任意节点 A 均有 7 条边,其代号分别为 0~6.节点 A 的第 0~6 条边对应的邻节点分别称为节点 A 的第 0~6 号邻节点,记为 $nei(A,0)\sim nei(A,6)$.

定义 11(安全通路矩阵). 对于 k 维双环 Petersen 图互联网络 DLCPG(k)中的节点 A,它的安全通路矩阵为一个($\lceil\sqrt{k}\,\rceil+1)\times 7$ 阶 0-1 矩阵,记为 $DLCPG\_SPM_A$.其中,$DLCPG\_SPM_A[t][j]$($1\le t\le\lceil\sqrt{k}\,\rceil+1, 0\le j\le 6$)的值按如下规则计算:

$$DLCPG\_SPM_A[1][j]=\begin{cases}1, & \text{若}A\text{的第}j\text{条边畅通}\\ 0, & \text{否则}\end{cases};$$

$$DLCPG\_SPM_A[2][j]=\begin{cases}1, & \text{若 } DLCPG\_SPM_A[1][j]+\sum_{i=0}^{6}DLCPG\_SPM_{nei(A,j)}[1][i]=8\\ 0, & \text{否则}\end{cases}.$$

当 $2<t\le\lceil\sqrt{k}\,\rceil+1$ 时,$DLCPG\_SPM_A[t]=[b_6,b_5,b_4,a_3,a_2,a_1,a_0]$.

其中:

$$a_j=\begin{cases}1, & \text{若 } DLCPG\_SPM_A[1][j]+\sum_{i=0}^{6}DLCPG\_SPM_{nei(A,j)}[t-1][i]=8\\ 0, & \text{否则}\end{cases},$$

$$b_j=\begin{cases}1, & 若 DLCPG\_SPM_A[1][j]+\sum_{i=0}^{6}DLCPG\_SPM_{nei(A,j)}[t-1][i]=8\\ 1, & 若 \sum_{i=0}^{3}DLCPG\_SPM_A[1][i]+\sum_{i=0}^{3}DLCPG\_SPM_{nei(A,i)}[t-1][j]=8.\\ 0, & 否则\end{cases}$$

下面证明按上述方法定义的 $DLCPG\_SPM_A$ 具有如下良好性质:$DLCPG_SPM_A[t][j]=1\Rightarrow$节点 A 和与其距离为 t,但与 A 的第 j 个邻节点距离 t-1 的任意节点之间均具有 t 距离最优通路,其中 $1\le t\le\lceil\sqrt{k}\rceil+1$.

引理 **1**. 对于 DLCPG(k)互联网络中的任意节点 A,与 A 距离为 d+1(d>1),但与 $nei(A,j)(j\in[4,5,6])$距离为 d 的任意节点,一定与某个 $nei(A,i)(i\in[0,1,2,3])$距离为 d,且与 $nei(A,i)$的第 j 个邻节点距离为 d–1.

证明:设 $B(B_r,B_p)$为任意与 $A(A_r,A_p)$距离为 d+1 的节点$\Rightarrow Dist_L(A_r,B_r)+Dist_P(A_p,B_p)=d+1$.不妨设 $B(B_r,B_p)$与 $nei(A,4)(A_r,C_p)$的距离为 $d\Rightarrow Dist\_L(A_r,B_r)+Dist\_P(B_p,C_p)=d\Rightarrow Dist\_P(A_p,B_p)-Dist\_P(B_p,C_p)=1$.又由于 Petersen 图的直径为 2,故可知 $Dist\_P(B_p,C_p)=0,Dist\_P(A_p,B_p)=1$ 或 $Dist\_P(B_p,C_p)=1,Dist\_P(A_p,B_p)=2$ 成立.

1) 若 $Dist\_P(B_p,C_p)=0,Dist\_P(A_p,B_p)=1\Rightarrow Dist\_L(A_r,B_r)=d$.设 $nei(A,0),nei(A,1),nei(A,2),nei(A,3)$分别为$(A_s,A_p)$, $(A_t,A_p),(A_u,A_p),(A_v,A_p)\Rightarrow Dist_L(A_s,B_r),Dist_L(A_t,B_r),Dist_L(A_u,B_r),Dist_L(A_v,B_r)$中必有一个为 d–1(因为 $nei(A,0),nei(A,1),nei(A,2),nei(A,3)$为 A 在双环内的所有邻节点).不妨设 $Dist_L(A_s,B_r)=d-1\Rightarrow B(B_r,B_p)$与 $nei(A,0)(A_s,A_p)$之间的距离为 $Dist\_L(A_s,B_r)+Dist\_P(A_p,B_p)=d-1+1=d$.设 $nei(A,0)(A_s,A_p)$的第 4 个邻节点为 G,则显然有 $G=G(A_s,C_p)$.而 $B(B_r,B_p)$与 $G(A_s,C_p)$之间的距离 $Dist\_L(A_s,B_r)+Dist\_P(C_p,B_p)=d-1+0=d-1$,即 B 与 $nei(A,0)$之间距离为 d 且与 $nei(A,0)$的第 4 个邻节点距离为 d–1.

2) 若 $Dist\_P(B_p,C_p)=1,Dist\_P(A_p,B_p)=2$,仿照步骤 1)的过程,同理可证 B 与 $nei(A,0)$的距离为 d 且与 $nei(A,0)$的第 4 个邻节点距离为 d–1. □

定理 **4**. $DLCPG_SPM_A[t][j]=1\Rightarrow$节点 A 和与其距离为 t,但与 A 的第 j 个邻节点距离为 t–1 的任意节点之间均具有 t 距离最优通路,其中 $1\le t\le\lceil\sqrt{k}\rceil+1$.

证明:当 $t\le 2$ 时,依据定义 11 中 $DLCPG\_SPM_A[t][j]=1$ 的定义可知,A 的第 j 个邻节点与到自己距离 t–1 的节点之间存在 t–1 距离最优通路,且 A 与其第 j 个邻节点之间的链路(或边)畅通.因此,A 和与其距离为 t,但与 A 的第 j 个邻节点距离为 t–1 的任意节点之间均具有 t 距离最优通路.而当 t>2 时,依据定义 11 中 $DLCPG\_SPM_A[t][j]=1$ 的定义及引理 1 可知,节点 A 和与其距离为 t,但与 A 的第 j 个邻节点距离为 t–1 的任意节点之间均具有 t 距离最优通路. □

安全通路矩阵记录了系统中的最优通路信息,下一步,我们建立起一个基于 $DLCPG\_SPM$ 的容错路由算法,并利用它来帮助我们将信息尽量沿最优通路传递.算法具体描述如下:对于任意节点 A,

```
Algorithm DLCPG_SPM_Route(){
    IF (cur==dest) Send to node and Return(SUCCESS);
    FOR (link=0;link<7;link++){    //找最优通路
    IF (DLCPG_SPM_cur[Dist(cur,dest)][link]==1 &&DLCPG_SPM_cur[1][link]==1){
        Send message with this link and Return (SUCCESS);}
    IF (DLCPG_SPM_cur[Dist(cur,dest)][link]==1 &&DLCPG_SPM_cur[1][link]==0 &&Dist(A,dest)>2
        && link>3){FOR (j=0;j<4;j++){
            IF (DCP_SPM_cur[1][j]==1 &&Dist(cur,dest)==Dist(nei(cur,j),dest)+1){
                Send message with this j-link and Return (SUCCESS);}}}}
        FOR (link=0;link<7;link++){    //找次最优通路
        IF (DLCPG_SPM_cur[Dist(cur,dest)+1][link]==1 &&DLCPG_SPM_cur[1][link]==1){
            Send message with this link and Return (SUCCESS);}
    IF (DLCPG_SPM_cur[Dist(cur,dest)+1][link]==1 &&DLCPG_SPM_cur[1][link]==0
```

```
        &&Dist(A,dest)>2 &&link>3){
        FOR (j=0;j<3;j++){
            IF (DCP_SPM_cur[1][j]==1 &&Dist(cur,dest)== Dist(nei(cur,j),dest)+2){
            Send message with this j-link and Return (SUCCESS);}}}}
    Return (FALSE);}
```

由以上描述易知算法具有如下特性:(1) 能在常数时间内判定出源节点和目标节点之间是否存在最优通路;(2) 若它们之间存在最优通路,则会把消息传递到合适的邻节点,使消息继续沿最优通路(长度为 *Dist*(*sour*,*dest*))传递;(3) 若它们之间不存在最优通路,则会把消息传递到合适的邻节点,使其沿次最优通路(长度为 *Dist*(*sour*,*dest*)+1)传递.

算法性能分析如下:

为了更具体地分析上述容错路由算法 DLCPG_SPM 的容错性能.我们模拟了 8 维和 10 维 DLCPG(*k*)网络中存在链路故障的情况下,DLCPG_SPM 沿最优通路传递消息的能力.在模拟过程中,我们依据定义 8 中的描述构造出 DLCPG 网络的拓扑图,用 1 表示相邻节点之间的链路畅通,用 0 表示链路故障.对于任意给定的链路故障数,我们随机选择 100 种故障分布模式,并在任意源、目的节点之间进行一次消息传递.把所有在连通的节点间传递的消息作为 100%,统计用 DLCPG_SPM 沿最优通路传递的消息所占的比例.

在表 4 和表 5 中,OP Exist 表示源、目的节点之间实际存在最优通路的消息的比例.OP in DLCPG_SPM 表示用 DLCPG_SPM 方法可以沿最优通路传递消息的比例.因此,OP in DLCPG_SPM 反映了用 DLCPG_SPM 方法可以沿最优通路传递消息的能力.从表 4 和表 5 的实验数据可知,DLCPG_SPM 算法具有良好的容错性能.

Table 4 Simulation results of 8-Dimensional DLCPG(*k*) with fault links

表 4 DLCPG_SPM 链路故障的情况下模拟结果(8 维)

Number of fault links	OP in DLCPG_SPM	OP exist
10	95.480 9	98.214 5
15	93.628 1	97.321 9
20	90.512 6	96.428 6
25	88.634 5	95.535 7
30	85.334 8	94.660 9

Table 5 Simulation results of 10-Dimensional DLCPG(*k*) with fault links

表 5 DLCPG_SPM 链路故障的情况下模拟结果(10 维)

Number of fault links	OP in DLCPG_SPM	OP exist
15	93.987 4	97.857 4
30	88.741 2	95.716 5
40	84.876 9	94.285 9
50	81.641 1	92.856 7
60	77.954 7	91.429 6

3 结 语

我们基于双环的结构提出了一种新的 Petersen 图的扩展方法,并在该扩展方法的基础上构造了一个正规双环 Petersen 图互联网络 DLCPG(*k*),证明了该互联网络不但具有较好的可扩展性和连接度,而且具有直径小、拓扑结构简单等特性.另外,对于 $10\times k$ 个节点组成的互联网络,DLCPG(*k*)具有比 RP(*k*)互联网络及二维 Torus 互联网络更小的直径及更优越的可分组性.最后,我们分别设计了 DLCPG(*k*)上的单播、广播及容错路由算法,证明了其单播和广播路由算法通信效率均分别较 RP(*k*)上的单播和广播路由算法有了明显的提高.仿真实验表明,新容错播路由算法具有良好的容错性能,因此 DLCPG(*k*)是一种具有良好性质的新型互联网络拓扑结构.

References:

[1] Wang L, Lin YP. Researches on topology and algorithms of hypercube & ring connected Petersen graph interconnection network. Chinese Journal of Computers, 2005,28(3):409−413 (in Chinese with English abstract).

[2] Yeh CH, Behrooz P. Routing and embeddings in cyclic Petersen network: An efficient extension of the Petersen graph. In: Higaki H, Page TW, eds. Proc. of the Int'l Conf. on Parallel Processing. Fukushima: IEEE Computer Society, 1999. 258−265.

[3] Ohring S, Das SK. Folded Petersen cube networks: New competitors for the hypercubes. IEEE Trans. on Parallel and Distributed Systems, 1996,7(2):151−168.

[4] Saxena PC, Gupta S, Rai J, A delay optimal coterie on the k-dimensional folded Petersen graph. Journal of Parallel Distributed Computing. 2003,63(11):1026−1035.

[5] Das SK, Banerjee AK. Hyper Petersen network: Yet another hypercube-like topology. In: Siegel HJ, ed. Proc. of the 4th Symp. on the Frontiers of Massively Parallel Computation. Virginia: IEEE Computer Society, 1992. 270−277.

[6] Liu FA, Liu ZY, Qiao XZ. A practical interconnection network RP(*k*) and its routing algorithms. Science in China (Series F), 2001, 44(6):461−473.

[7] Liu FA, Liu ZY, Qiao XZ. A practical interconnection network RP(*k*) and its routing algorithms. Science in China (Series E), 2002, 32(3):380−385 (in Chinese with English abstract).

[8] Liu FA, Liu ZY, Qiao XZ. A wavelength assignment algorithm of hypercube communication on optical RP(*k*) networks. Journal of Software, 2003,14(3):575−581 (in Chinese with English abstract). http://www.jos.org.cn/1000-9825/14/575.htm

[9] Liu FA, Liu ZY, Qiao XZ. A hierarchical network HRN and its routing algorithms. Chinese Journal of Computers, 2002,25(12): 1397−1404 (in Chinese with English abstract).

[10] Xu JM. The infinite families without tight or nearly-tight optimal double loop networks. Chinese Science Bulletin, 1999,44(5): 486−490 (in Chinese with English abstract).

[11] Chen XB. An optimal routing algorithms for double loop networks with restricted steps. Chinese Journal of Computers, 2004,27(5): 596−603 (in Chinese with English abstract).

[12] Elzinga RJ, Gregory DA, Vender Meulen KN. Addressing the Petersen graph. Discrete Mathmatics, 2004,286(3):241−244.

附中文参考文献:

[1] 王雷,林亚平.基于超立方体环连接的 Petersen 图互联网络及其路由算法研究.计算机学报,2005,28(3):409−413.

[7] 刘方爱,刘志勇,乔香珍.一种实用的互联网络拓扑结构 RP(*k*)及路由算法.中国科学(E 辑),2002,32(3):380−385.

[8] 刘方爱,刘志勇,乔香珍.光 RP(*k*)网络上 Hypercube 通信模式的波长指派算法.软件学报,2003,14(3):575−581. http://www.jos.org.cn/1000-9825/14/575.htm

[9] 刘方爱,刘志勇,乔香珍.一类层次环网络的构造及路由算法.计算机学报,2002,25(12):1397−1404.

[10] 徐俊明.不含紧优和几乎紧优双环网络无限簇.科学通报,1999,44(5):486−490.

[11] 陈协彬.步长有限制的双环网络的最优路由算法.计算机学报,2004,27(5):596−603.

王雷(1973－),男,湖南长沙人,博士,副教授,主要研究领域为计算机网络,生物计算,机器学习.

夏巍(1963－),男,博士生,主要研究领域为计算机网络.

林亚平(1955－),男,教授,博士生导师,主要研究领域为计算机网络,机器学习.