

# 一种提花织物图像的有限元分割算法\*

冯志林<sup>1,2+</sup>, 尹建伟<sup>1</sup>, 陈刚<sup>1</sup>, 董金祥<sup>1</sup>

<sup>1</sup>(浙江大学 计算机科学与工程学系, 浙江 杭州 310027)

<sup>2</sup>(浙江工业大学 之江学院, 浙江 杭州 310024)

## A Finite Element Segmentation Algorithm for Jacquard Image

FENG Zhi-Lin<sup>1,2+</sup>, YIN Jian-Wei<sup>1</sup>, CHEN Gang<sup>1</sup>, DONG Jin-Xiang<sup>1</sup>

<sup>1</sup>(Department of Computer Science and Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

<sup>2</sup>(Zhijiang College, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310024, China)

+ Corresponding author: Phn: +86-571-87951414, E-mail: fzlmailbox@21cn.com, <http://www.cs.zju.edu.cn>

Received 2003-11-26; Accepted 2004-06-10

Feng ZL, Yin JW, Chen G, Dong JX. A finite element segmentation algorithm for jacquard image. *Journal of Software*, 2005,16(1):58–66. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/16/58.htm>

**Abstract:** Jacquard image segmentation is the linchpin of jacquard pattern design. Curve evolution model is a popular method for image segmentation. However, it cannot detect image features in the presence of noise. The Mumford-Shah model is more robust than curve evolution model to detect discontinuities under noisy environment, so it is more suitable for segmentation of noisy jacquard images. In this paper, an algorithm is presented to implement the numerical solving of the Mumford-Shah model, which combines the merits of finite element method and quasi-Newton method. First, a discrete version of the model is defined on finite element spaces over adaptive triangulation. Then an adjustment scheme for the triangulation is enforced to improve the iteration efficiency before current iteration begins. Finally, a minimization method based on quasi-Newton algorithm is applied to find the absolute minimum of the discrete model in the sense of Gamma-convergence. The proposed algorithm works well when it is applied to segment noisy jacquard images.

**Key words:** Mumford-Shah functional; finite element; quasi-Newton algorithm; image segmentation; jacquard image

**摘要:** 提花织物图像分割是提花图案设计的关键,曲线演化模型是一种流行的图像分割方法,但是该方法无法检测含噪环境下的图像特征.由于 Mumford-Shah(MS)模型能够在噪声环境下对不连续边集进行检测,因此它比曲线演化模型更适于对含噪提花织物图像的分割.提出一种结合有限元法和拟牛顿法的 MS 模型数值求解算法,并有效用于含噪提花织物图像的分割.首先定义了自适应三角剖分空间上的离散 MS 模型,并在每次迭代前对有限元网格进行自适应调整,以提高迭代的性能.接着采用拟牛顿最小化方法,通过收敛意义上的离散有限元

\* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60273056 (国家自然科学基金); the National High-Tech Research and Development Plan of China under Grant No.2003AA411021 (国家高技术研究发展计划(863))

**作者简介:** 冯志林(1977—),男,浙江杭州人,博士,主要研究领域为计算机辅助设计和图形学,图像处理,模式识别;尹建伟(1974—),男,博士,副教授,主要研究领域为计算机辅助设计和图形学,智能 CAD;陈刚(1973—),男,博士,教授,主要研究领域为计算机辅助设计和图形学,信息安全;董金祥(1945—),男,教授,博士生导师,主要研究领域为计算机辅助设计和图形学,CIMS,工程数据库.

逼近得到离散 MS 模型的最小值.该算法被用到含噪提花织物图像的分割中,取得了良好的效果.

关键词: Mumford-Shah 泛函;有限元;拟牛顿法;图像分割;提花织物图像

中图法分类号: TP391 文献标识码: A

提花织物是一种富含艺术性的纺织产品,在提花织物图案中通常包含许多蜿蜒的曲线、规则与不规则的几何图形、对称与不对称的花纹,因此具有良好的装饰效果和极高的附加值,使其在丝绸、领带、装饰毯等数码纺织 CAD 中得到了广泛的应用.通常,提花图案是印花工艺图像中特定的、具有独特性质的区域,为了辨识和分析提花图案,需要将它们从图像中分割出来,同时,分割效果还将影响后期提花图案的分析和检索.

目前国内外学者对机织条纹织物的分割进行了充分研究并取得了很好的效果,由于该类织物图案具有明显的周期特征,因此可以采用小波变换、纹理谱、傅立叶功率谱和共生矩阵等方法<sup>[1-3]</sup>对织物中的平纹图案、斜纹图案以及缎纹图案进行识别提取.尽管上述方法可以有效用于条纹织物图案的分割,但是由于提花图案中包含了大量拓扑形变复杂的纹理曲线,且这些曲线大都不具有明显的周期特性,因此上述方法不适用于对提花图案的分割提取.为了实现提花图案的有效分割,必须采用对纹理曲线形变复杂度具有良好适应性的图像分割模型.

基于曲线演化的形变模型<sup>[4-6]</sup>是一类用于提高曲线拓扑结构变化能力的方法,并在医学图像<sup>[7,8]</sup>等领域中得到了广泛的应用.但是,理论分析和实验结果表明,曲线演化形变模型在对提花织物图案进行分割时存在一定的不足,对提花图案的自动分割存在较大困难,具体表现为:

- 提花图案纹理曲线通常比较复杂,容易造成灰度可分性不强,并且在很多情况下,图案纹理曲线边缘并不是理想的阶跃型边缘,而是较为平滑的屋顶型边缘.活动轮廓线在遇到上述情况时,将可能跨过曲线边缘而无法返回到正确的边缘位置,从而造成局部分割定位的失败.
- 曲线演化形变模型仅利用收缩(待分割目标的外部)或扩张(待分割目标的内部)的活动轮廓线所在位置上的局部图像信息,因此难以结合整个图像区域的全局信息,容易导致提花图案整体分割缺陷的产生.
- 提花图案在扫描获取过程中,将不可避免地包含噪声,噪声将恶化图像的质量,而曲线演化形变模型对含噪图像的分割效果并不是很理想.

基于变分法的 Mumford-Shah(MS)泛函模型<sup>[9]</sup>作为另一种有效提高曲线演变拓扑自适应能力的分割模型,日益成为图像分割领域中一种有效和强大的研究工具.与曲线演化形变模型不同,MS 泛函模型中同时包含了表征同质连通区域的能量和表征对象边缘的能量,因此 MS 泛函模型除了利用图像的局部边缘信息以外,还有效结合了同质连通区域的全局信息,这就在一定程度上克服了曲线演化形变模型对局部图案曲线的错误定位,从而取得了更为理想的分割效果.此外,MS 泛函模型在能量极小化的过程中,不需要进行边缘检测,这就避免了在曲线演化形变模型中,根据活动轮廓线的特征设计边缘检测函数的步骤.因此,MS 泛函模型比较适用于图案的局部分割定位以及图案花形的整体分割提取.此外,由于 MS 泛函模型本身对噪声具有抑制效应,因此更适用于含噪环境下的提花图案进行稳健分割,这对于实际工程应用来说是非常重要的.

根据上面的分析,本文采用 MS 泛函模型作为提花织物图案的分割模型,提出一种用于提花织物图像的 MS 泛函有限元分割算法(Mumford-Shah finite element segmentation method,简称 MSFESM).MSFESM 算法采用迭代松弛技术,一方面为了提高 MS 泛函模型对精细纹理边缘的定位精度,算法采用具有各向异性属性的自适应调整有限元网格.在每次迭代前通过有限元网格的自适应调整,将逼近泛函序列元的各向异性性质充分作用到有限元网格造型中,从而为本次迭代提供自适应最优三角剖分结构,以提高迭代的效率和响应速度.另一方面,为了克服 MS 泛函在逼近求解时产生的非适定性问题,MSFESM 算法在本次迭代的网格自适应调整之后,用拟牛顿法来实施对逼近泛函序列元的最小化求解.由于拟牛顿法可以使本次迭代过程中的逼近泛函序列元的数值有所下降,因此在一定程度上确保了 MS 泛函在整个迭代松弛过程中满足全局收敛的性质,避免陷入局部极小.

## 1 Mumford-Shah 泛函模型

MS 泛函模型通过最小化包含同质连通区域和对象边缘的能量函数,使原图像分割成同质的连通区域,并使分割函数的不连续点集逼近目标对象的边缘,从而实现其对图像的有效分割.

MS 泛函模型可以用下面的方程表示:

$$MS(u, K) = \iint_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 \, dx dy + \alpha \iint_{\Omega \setminus K} |u - g|^2 \, dx dy + \beta H^1(K) \quad (1)$$

其中,区域  $\Omega$  是满足 Lipschitz 边界条件的有界开集,函数  $g: \Omega \rightarrow [0,1]$  是输入图像,紧致子集  $K \subset \overline{\Omega}$  是  $g$  的不连续点集构成的边缘,函数  $u \in C^1(\Omega \setminus K)$  是对函数  $g$  在  $\Omega \setminus K$  上的光滑逼近,  $\nabla u$  是函数  $u$  的梯度算子,  $H^1$  是一维 Hausdorff 测度,  $\alpha$  和  $\beta$  为两个正的权值参数.泛函  $MS(u, K)$  的 3 个组成项  $\iint_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 \, dx dy$ ,  $\iint_{\Omega \setminus K} |u - g|^2 \, dx dy$  和  $H^1(K)$  分别对应于  $u$  的光滑度、逼近度和边缘长度约束,其中光滑度约束确保  $u$  在  $\Omega \setminus K$  上充分光滑,逼近度约束确保  $u$  和  $g$  在  $\Omega \setminus K$  上偏差较小,边缘长度约束确保边缘长度有限,不致填满整幅图像.

由于 MS 泛函需要对未知的边缘长度项进行处理,同时边缘长度的测度函数  $K \rightarrow H^1(K)$  在 Hausdorff 收敛意义下是非下半连续的,从而导致其在数值计算时存在一定的难度,为此许多学者做了大量研究. De Giorgi<sup>[10]</sup> 等人提出 MS 泛函在特殊有界变分函数空间上的弱形式,并将边缘长度项简化为分割函数的本性不连续点所形成的边缘集. Ambrosio<sup>[11]</sup> 等人提出利用辅助函数来逼近边缘长度项的特征函数,并通过椭圆泛函来对弱形式 MS 泛函进行变分逼近,但是该方法不能处理边缘能量表示比较复杂的情况. Gobbino<sup>[12]</sup> 利用有限差分法对 MS 泛函进行数值求解,并将梯度函数用有限差分近似.虽然该方法能够对曲线长度项的复杂能量密度给予有效处理,但是它要求密度函数必须由分割函数在边缘的局部方向以及边缘两端的迹值决定,因此缺乏足够的灵活性.由于有限元法具有精度高、可模拟任意复杂结构、易于进行边界处理等优点,因此更多的学者采用有限元法对弱形式 MS 泛函进行数值逼近. Negri<sup>[13]</sup> 等人针对传统各向同性网格在处理复杂边界能量时的不足,采用各向异性网格对弱形式 MS 泛函进行有限元逼近,有效提高了处理复杂边界能量函数的灵活性. Bourdin<sup>[14]</sup> 等人通过对有限元的自适应调整和网格粒度的调节,实现了对精细结构边缘的有效定位,同时也提高了逼近算法的精度.但是由于弱形式 MS 泛函本身非凸,因此对泛函逼近的过程是非适定的,文献[13,14]在对弱形式 MS 泛函进行逼近求解后容易导致多个局部极小元产生.本文在文献[13,14]关于各向异性属性的自适应调整有限元网格的基础上,采用拟牛顿最小化方法来对 MS 泛函进行逼近求解,克服 MS 泛函逼近求解时的非适定性.

## 2 弱形式 MS 泛函模型及逼近泛函序列元

### 2.1 弱形式 MS 泛函模型

De Giorgi 在 Ambrosio 关于下半连续结论的基础上,提出建立在特殊有界变分函数空间上的弱形式 MS 泛函,并同时证明了弱形式 MS 泛函的极小值也是原始 MS 泛函的极小值<sup>[9-11]</sup>.

**定义 1.** 如果  $u \in L^1(\Omega; R^2)$  的广义导数  $Du$  为向量测度,且全变差  $|Du|(\Omega) < +\infty$ , 则称  $u$  是有界变分函数,并记有界变分函数空间为  $BV(\Omega)$ .

**定义 2.** 设  $u \in BV(\Omega)$ , 如果对  $x \in \Omega$  不存在  $z \in R$ , 使  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{-n} \int_{B_\rho(x)} |u(y) - z| \, dy = 0$  成立, 则称  $x$  是  $u$  的近似不连续点, 其中  $B_\rho(x)$  是中心在  $x$ 、半径为  $\rho$  的球.  $u$  的近似不连续点集  $S_u$  构成了  $u$  的边缘, 它的 Lebesgue 测度值是可忽略的.

**定义 3.** 设  $u \in BV(\Omega)$ , 由 Lebesgue 分解定理,  $Du = D^a u + D^s u$ , 其中  $D^a u$  和  $D^s u$  分别为  $Du$  关于 Lebesgue 测度的绝对连续部和奇异部. 奇异部  $D^s u$  在  $S_u$  和  $\Omega \setminus S_u$  上的限制称为跳跃部  $D^j u$  和康托部  $D^c u$ , 并记  $D^j u = D^s u|_{S_u}$ ,  $D^c u = D^s u|_{\Omega \setminus S_u}$ .

**定义 4.** 设  $u \in BV(\Omega)$ , 如果康托部  $D^c u$  为 0, 则称它是特殊有界变分函数, 并记特殊有界变分函数组成的空间为  $SBV(\Omega)$ .

特殊有界变分函数空间上的弱形式 MS 泛函模型可以用下面的方程表示:

$$MS(u) = \iint_{\Omega \setminus S_u} |\nabla u|^2 dx dy + \alpha \iint_{\Omega \setminus S_u} |u - g|^2 dx dy + \beta H^1(S_u) \quad (2)$$

其中,  $S_u$  是  $u$  的本性不连续点所形成的边缘集.

Ambrosio<sup>[11]</sup>等人证明 MS 泛函具有下半连续性,即  $MS(u) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} MS(u_k)$ , 确保了  $SBV(\Omega)$  中 MS 泛函弱极值  $u$  的存在. De Giorgi<sup>[10]</sup>等人进一步证明, 当  $S_u$  是本性闭时, 即  $H^1(\overline{S_u} \setminus S_u) = 0$  时, MS 泛函在  $SBV(\Omega)$  中的弱极值也是它的强极值.

## 2.2 逼近泛函序列元

De Giorgi 和 Franzoni 在 1975 年首次提出的  $\Gamma$ -收敛是一种针对变分问题进行求解的数学工具, 由于  $\Gamma$ -收敛能够对连续扰动保持稳定, 从而确保泛函收敛到极小元的有效性, 因此可以有效用于 MS 泛函的极值求解. 利用  $\Gamma$ -收敛, 泛函  $F$  的极小元可以由  $F_k$  的逼近泛函序列  $F_k$  的极小元收敛得到.

**定义 5.** 设  $(X, d)$  是度量空间,  $F_k: X \rightarrow [0, +\infty]$  是函数序列, 对  $u \in X$  定义  $F$  的  $\Gamma(d)$ -liminf 项和  $\Gamma(d)$ -limsup 项:

$$F_1(u) = \Gamma(d) - \liminf_{k \rightarrow +\infty} F_k(u) = \inf_{u_k \rightarrow u} \left\{ \liminf_{k \rightarrow +\infty} F_k(u_k) : \lim d(u_k, u) = 0 \right\},$$

$$F_2(u) = \Gamma(d) - \limsup_{k \rightarrow +\infty} F_k(u) = \inf_{u_k \rightarrow u} \left\{ \limsup_{k \rightarrow +\infty} F_k(u_k) : \lim d(u_k, u) = 0 \right\}.$$

如果  $F_1(u)$  和  $F_2(u)$  满足条件:

- (1) 设  $x_k$  是  $X$  中任意收敛到  $x$  的序列, 有  $F_1(u) \geq F(x)$ ;
- (2) 对任意  $x \in X$ , 存在收敛到  $x$  的序列  $x_k$ , 有  $F_2(u) \leq F(x)$ ,

则称序列  $F_k$  依  $\Gamma$ -收敛到  $F$ .

MS 泛函的极值问题将首先涉及对 MS 泛函的逼近泛函序列元的确定. 本文选取的逼近泛函序列元是建立在有限元空间上的. 设  $\Omega \in (0, 1) \times (0, 1)$  是  $R^2$  上的有界矩形区域,  $\varepsilon$  是三角形有限元边的最大长度,  $\{\mathcal{T}_\varepsilon\}$  是  $\varepsilon \rightarrow 0$  的三角剖分序列,  $V_\varepsilon(\Omega)$  是分片仿射函数在  $\mathcal{T}_\varepsilon(\Omega)$  上的有限元空间. 本文采用  $V_\varepsilon(\Omega) \times \mathcal{T}_\varepsilon(\Omega)$  函数空间上的逼近泛函序列元, 即

$$F_\varepsilon(u, T) = \frac{1}{\varepsilon} \iint_{\Omega} f(\varepsilon |\nabla u_T|^2) dx dy + \iint_{\Omega} |u_T - g|^2 dx dy \quad (3)$$

$f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  是一个非递减函数, 且  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = 1$  和  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = f_\infty = \alpha < +\infty$ . 通常取  $f(x) = \frac{2\alpha}{\pi} \arctan\left(\frac{\pi x}{2\alpha}\right)$ .

Negri<sup>[13]</sup>在有限元空间上给出了 MS 泛函的逼近泛函序列元, 并证明了该泛函序列元能够依  $\Gamma$ -收敛到具有各项异性属性的 MS 泛函.

**定理 1.** 对每一个  $\varepsilon \rightarrow 0$  的三角剖分序列  $\{\mathcal{T}_\varepsilon\}$ , 存在齐次的凸函数  $\phi: R^2 \rightarrow [0, +\infty)$ , 使得三角剖分有限元空间  $V_\varepsilon(\Omega) \times \mathcal{T}_\varepsilon(\Omega)$  上的逼近泛函序列元

$$F_\varepsilon(u, T) = \frac{1}{\varepsilon} \iint_{\Omega} f(\varepsilon |\nabla u_T|^2) dx dy + \beta \iint_{\Omega} |u_T - g|^2 dx dy \quad (4)$$

关于  $L^2$  流形依  $\Gamma$ -收敛到  $L^2(\Omega) \cap SBV^2(\Omega)$  函数空间上的 MS 泛函

$$F(u) = \iint_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dy + f_\infty \iint_{S_u} \phi(v_u) dH^1 + \beta \iint_{\Omega} |u - g|^2 dx dy \quad (5)$$

其中,  $F(u)$  是 MS 泛函(1)的一种各向异性形式, 映射  $\phi(v_u)$  是表征各向异性性质的函数,  $v_u$  为单位法向量.

## 3 泛函序列收敛的数值算法

为了将逼近泛函序列元的各向异性性质充分作用到有限元网格造型中, 提高模型对精细纹理边缘的定位精度, 算法采用具有各向异性属性的自适应调整有限元网格, 并利用上次迭代生成的极小元函数对有限元网格进行自适应调整. 通过有限元网格的自适应调整可以为本次迭代提供所需的自适应最优三角剖分结构, 从而提高迭代的效率和响应速度. 采用拟牛顿最小化算法对 MS 泛函进行逼近求解, 可以使每次迭代目标泛函数值有所下降, 确保逼近过程中满足全局收敛性, 避免陷入局部极小, 从而克服 MS 泛函逼近求解时的非适定性.

### 3.1 网格自适应调整

为了生成自适应的几何三角剖分,我们利用一个由 INRIA 开发的自动网格生成软件包 BL2D.在该软件包中利用已生成的背景网格来对前景网格进行自适应调整.对三角剖分结构进行最优化的目的是使边缘附近的三角元具有较高的各向异性比,且三角元的方向和边缘平行,而在远离边缘的区域,三角元的各向异性比近似为 1.但是由于在最小化过程中,理论上的边缘集是未知的,因此前景网格就必须从背景网格估计得到.在 BL2D 中,前景网格是通过一个“估计子”从背景网格构造出来的.估计子根据背景网格中每点的度量来给出.度量由一个含三系数的对称正定  $2 \times 2$  矩阵  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  决定,其中原点的度量是指满足方程  $(x, y) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} (x, y)^T = 1$  的系数  $(a, b, c)$ ,其中  $(x, y)$  为所有和原点相距为 1 的点.由于该方程可用中心在原点的椭圆方程加以表示,因此当椭圆

旋转  $\theta$  角后,矩阵  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  可表示为  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_2^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ,其中系数  $(\theta, h_1, h_2)$  分别表

示椭圆的旋转角度以及横向和纵向的尺度因子.因此在每次进行网格自适应调整之前,只需根据函数  $u$  来设置横向和纵向的各向异性值  $h_1$  和  $h_2$  以及旋转角度  $\theta$ .在给定背景网格上每点的度量之后,就可以构造出形如 Delaunay 几何三角剖分的前景网格.上述自适应网格的完整构造算法可参阅文献[15].

### 3.2 拟牛顿法

由于离散型泛函  $F_\varepsilon(u, T)$  是非凸的,容易陷入局部极小值,因此标准的极小化算法在此情况下是失效的.拟牛顿法是无约束最优化方法中最有效的一类算法,它不仅具有较高的收敛速度,而且其迭代公式具有良好的数值稳定性.当迭代过程中的近似 Hessian 矩阵  $\nabla^2 F(u_k)$  正定时,拟牛顿法产生的方向均为下降方向,并且具有二级收敛速率.由于泛函  $F_\varepsilon(u, T)$  在确定了本次迭代的自适应最优三角剖分结构  $T$  后,  $F_\varepsilon(u, T)$  将只与函数  $u$  相关,因此泛函  $F_\varepsilon(u, T)$  和  $F_\varepsilon(u)$  的极值存在性是等价的.由于  $F_\varepsilon(u)$  定义在  $SBV(\Omega)$  空间上,且  $SBV(\Omega)$  空间属于自反 Banach 空间,因此  $F_\varepsilon(u)$  也属于自反 Banach 空间,且有  $F_\varepsilon(u): U \rightarrow R$ ,  $U$  表示 Banach 空间,  $R$  表示实数域.此外,  $F_\varepsilon(u)$  满足弱下半连续性质,根据这两个条件可以证明  $F_\varepsilon(u)$  绝对极小值的存在性.

**定理 2.** 设  $U$  是  $F_\varepsilon(u)$  中的有界弱闭子集,则  $F_\varepsilon(u)$  在  $U$  中存在一个绝对极小值.

证明:设  $l$  是  $F_\varepsilon(u)(u \in U)$  的下确界,  $u_n$  是一个极小化序列,即  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_\varepsilon(u_n) = l, u_n \in U$ . 由于  $u_n \in U$ , 且  $U$  有界,故序列  $u_n$  有界.由于  $F_\varepsilon(u)$  是自反的,故可以找到一个子序列  $u_{n'}$ , 使得当  $n' \rightarrow +\infty$  时有  $u_{n'} \rightarrow \bar{u}$ .

由于  $U$  是弱闭的,因此  $\bar{u} \in U$ . 又由于  $F_\varepsilon(u)$  是弱下半连续的,故  $F_\varepsilon(\bar{u}) \leq \liminf_{n' \rightarrow +\infty} F_\varepsilon(u_{n'})$ , 由此  $F_\varepsilon(\bar{u}) \leq l$ . 但由于  $l$  是  $F_\varepsilon(u)$  在  $u \in U$  上的下确界,于是得到了  $F_\varepsilon(\bar{u}) = l$ . 这就证明了  $l$  有限,并且  $F_\varepsilon(\bar{u})$  是  $F_\varepsilon(u)$  在  $U$  上的绝对极小值.  $\square$

此外,由于泛函  $F_\varepsilon(u)$  具有局部 Gateaux 可导性<sup>[16]</sup>,因此满足拟牛顿最小化算法的实施条件.泛函  $F_\varepsilon(u, T)$  的极小化过程就是生成收敛到  $F$  极值点的函数序列  $\{u_k\}$ . 一旦给定初始点  $u_0$  后,拟牛顿最小化算法将生成一个有穷序列,形式上该序列可表示为  $u_{k+1} = u_k + t_k d_k$ , 其中  $t_k$  是从点  $u_k$  出发沿  $d_k$  牛顿方向搜索的最优步长,它是  $[0, 1]$  内的标量,  $d_k \in R^2$  是下降方向.

### 3.3 算法流程

弱形式 MS 泛函的有限元分割算法 MSFESM 设计如下:

- Step 1. 输入待分割图像,置  $j := 0$ , 设定初始三角元边长  $\varepsilon_j$ 、极小元函数  $u_j$ 、权值参数  $\alpha, \beta$  和阈值参数  $\gamma, \mu$ .
- Step 2. 利用极小元函数  $u_j$ , 采用 BL2D 算法对网格进行自适应调整,构造出本次迭代的三角网格剖分结构  $T_{\varepsilon_j}$ .
- Step 3. 根据本次迭代的三角网格剖分结构  $T_{\varepsilon_j}$ , 在  $V_{\varepsilon_j}(\Omega)$  函数空间中,利用拟牛顿最小化算法求解泛函  $F_{\varepsilon_j}(u_j, T_{\varepsilon_j})$  的极小元  $u_j$ . 置  $k := 0$ .

Step 3.1. 计算梯度  $\nabla F(u_k)$  和近似 Hessian 矩阵  $\nabla^2 F(u_k)$ ;

Step 3.2. 若  $\nabla^2 F_{\varepsilon_j}(u_k)$  正定,则转至 Step 3.3;若  $\nabla^2 F_{\varepsilon_j}(u_k)$  非正定,则对  $\nabla^2 F_{\varepsilon_j}(u_k)$  进行修正,得到修正矩阵

$$\tilde{\nabla}^2 F_{\varepsilon_j}(u_k), \text{并置 } \nabla^2 F_{\varepsilon_j}(u_k) = \tilde{\nabla}^2 F_{\varepsilon_j}(u_k);$$

Step 3.3. 若  $\nabla F_{\varepsilon_j}(u_k) \neq 0$ ,则转至 Step 3.4;若  $\nabla F_{\varepsilon_j}(u_k) = 0$ ,得到本次迭代的最小值  $u_j$ ,转至 Step 4;

Step 3.4. 利用不完全 Cholesky 分解,对  $\nabla^2 F_{\varepsilon_j}(u_k)$  进行预处理,确保原矩阵是稀疏矩阵;

Step 3.5. 由  $\nabla^2 F_{\varepsilon_j}(u_k)d_k = -\nabla F_{\varepsilon_j}(u_k)$ ,计算下降方向  $d_k$ ;

Step 3.6. 确定沿  $d_k$  方向搜索的最优步长,即从  $u_k$  出发,沿  $d_k$  进行一维搜索,按照满足 Wolfe 条件的线搜索算法,求  $t_k$ ,使得  $F_{\varepsilon_j}(u_k + t_k d_k) = \min_{t \geq 0} (F_{\varepsilon_j}(u_k + t_k d_k))$ ;

Step 3.7. 若  $|u_{k+1} - u_k| < \gamma$ ,则将  $u_j$  作为本次迭代极小元,并转至 Step 5;若  $|u_{k+1} - u_k| > \gamma$ ,则置  $k := k + 1$ ,并转至 Step 3.1;

Step 4. 生成下一次迭代的三角元边长  $\varepsilon_{j+1}$ ;

Step 5. 若  $|\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j| > \mu$ ,则迭代终止,输出分割图像  $u_j$ ;若  $|\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j| \leq \mu$ ,则置  $j := j + 1$ ,并转向 Step 2.

对于上述算法,需要指出以下几点:

1)  $\nabla^2 F(u_k)$  的修正:在  $\nabla^2 F(u_k)$  对角线上引入小的扰动,构造一个对称正定矩阵  $\tilde{\nabla}^2 F(u_k) = \nabla^2 F(u_k) + \varepsilon_k I$ ,其中  $I$  是  $n$  阶单位矩阵.事实上,只要  $\varepsilon_k$  选择适当,则  $\tilde{\nabla}^2 F(u_k)$  满足对称正定性.如果  $\alpha_k$  是  $\nabla^2 F(u_k)$  的特征值,那么  $\alpha_k + \varepsilon_k$  就是  $\tilde{\nabla}^2 F(u_k)$  的特征值,从而保证了  $\tilde{\nabla}^2 F(u_k)$  的正定性.进一步地,为了确保解的适定性,应使  $\varepsilon_k > \eta$ ,其中  $\eta$  是一个正参数.

2)  $\nabla^2 F(u_k)$  通常是具有特殊结构的稀疏矩阵,在经过正定修正后,  $\tilde{\nabla}^2 F(u_k)$  总能进行不完全 Cholesky 分解,使得  $\tilde{\nabla}^2 F(u_k) = LD_k L^T$ ,其中  $L$  是下三角矩阵,  $D_k$  是对角矩阵,且它的对角元皆大于 0.

3) 由定理 2 可知,拟牛顿法在给定初值  $u_0$  后可以收敛到  $F$  在本次迭代中的最小值,此外,由于  $t_k$  是由一维搜索得到的最优步长,每次迭代目标函数值一般有所下降,因此在一定条件下,可以保证算法具有全局收敛性.

## 4 实验结果及分析

为了验证 MSFESM 算法对提花织物图像分割的有效性,对 3 幅具有不同花形(圆瓣、尖瓣和不规则形瓣)的彩色提花织物进行扫描获取.本文所进行的提花图像分割都是针对灰度级图像而言的,因此首先需要将彩色提花图像转化为灰度级图像.通常灰度级的值和图像的光强度成比例,灰度级越小表示投射光或反射光的光强度越小,则图像越黑;灰度级越高表示投射光或反射光的光强度越大,则图像越白.通过对彩色图像的 3 种颜色成分加权的方法可以将 RGB 彩色值转化为灰度级.灰度级转化的计算公式为  $\text{gray} = 0.30 * \text{red} + 0.59 * \text{green} + 0.11 * \text{blue}$ .本文选取的灰度级为 256,其他实验参数设置为  $\alpha = 400$ ,  $\beta = 0.05$ ,阈值参数  $\gamma = 0.5$ ,  $\mu = 0.01$ .由于扫描样中包含一定数量的噪声,因此分割实验的结果也反映了算法对噪声干扰的鲁棒性.图 1 是 3 幅具有不同花瓣类型的含噪提花图像(噪声方差  $\sigma = 40$ ),图 2 是经几何活动轮廓(geometric active contour,简称 GAC)算法<sup>[6]</sup>和 MSFESM 算法分割所得图像.从图 2 可以看出 GAC 算法对噪声较敏感,活动轮廓曲线在演化过程中受噪声干扰,导致许多局部边缘细节的错误分割.MSFESM 算法对含噪图像的分割则具有相当的稳健性,不仅检测出了花形图案边缘所形成的不连续点集,而且还在一定程度上消除了由噪声所产生的不规则点集,从而使分割免受噪声的干扰,确保分割结果的有效性.由于 MSFESM 算法在对图像进行分割时,除了利用图像的灰度信息外,还通过在泛函收敛序列元的有限元网格造型中引入各向异性性质,因此提高模型对精细纹理边缘的定位精度.图 3 是图 1 中的加框花瓣区域上的 Delaunay 几何三角剖分的节点图,图 4 是 BL2D 算法生成的三角网格图.

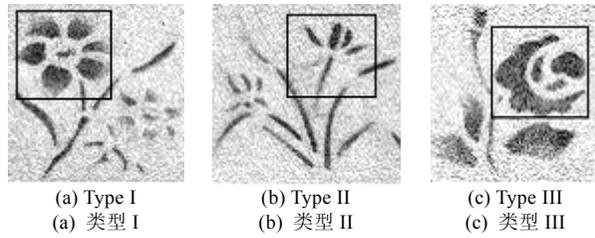


Fig.1 Three types of noisy jacquard images

图 1 3 种类型的含噪提花图像

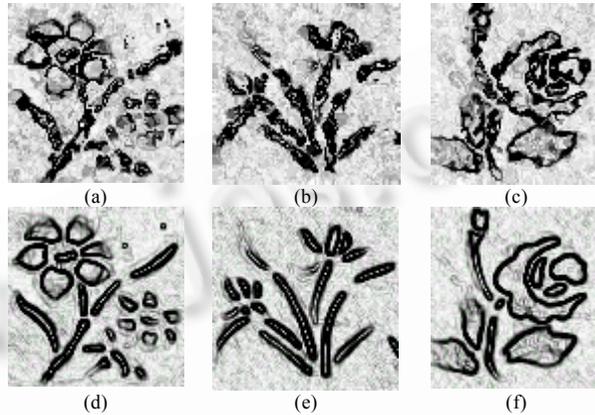


Fig.2 Results of noisy jacquard image segmentation with two algorithms: (a),(b),(c) and (d),(e),(f) are results of segmentation with GAC algorithm and MSFESM algorithm, respectively

图 2 两种算法的提花图像分割输出结果:(a),(b),(c)和(d),(e),(f)是分别采用 GAC 算法和 MSFESM 算法得到的分割结果

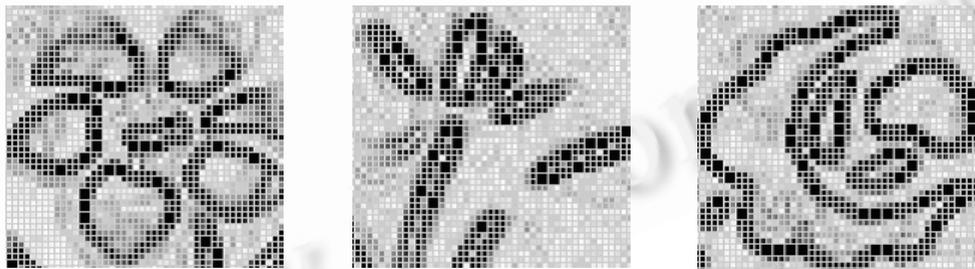


Fig.3 Nodes of Delaunay triangulation

图 3 Delaunay 三角剖分的节点

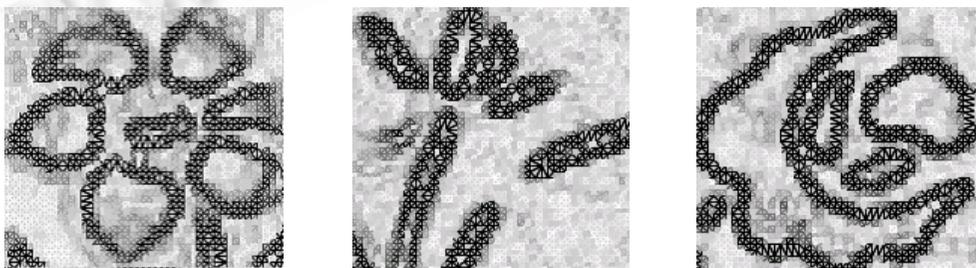


Fig.4 Triangular meshes generated by BL2D algorithm

图 4 BL2D 算法生成三角网格

表 1 比较了 GAC 算法和 MSFESM 算法在不同噪声环境下的分割性能,第 1 行是含噪图像和原始图像的相关度,第 2 行、第 3 行是分别采用 GAC 算法和 MSFESM 算法得到的含噪分割图像与原始分割图像间的相关度。从表中数据可以看出,在不同噪声环境下,两种算法都使相关度有所提高,但是 MSFESM 算法取得的相关度更高。

**Table 1** Correlation degree comparison between two algorithms under different noise environments

表 1 不同噪声环境下两种算法的相关度比较

	$\sigma=40$			$\sigma=60$			$\sigma=80$		
	Type I	Type II	Type III	Type I	Type II	Type III	Type I	Type II	Type III
Noisy image	0.87	0.71	0.80	0.68	0.59	0.62	0.48	0.39	0.43
GAC	0.90	0.82	0.85	0.72	0.64	0.73	0.55	0.46	0.52
MSFESM	0.95	0.88	0.92	0.84	0.72	0.80	0.67	0.53	0.61

图 5 是  $\sigma=40$  时,对图 1(a)中的加框花瓣区域经 GAC 算法和 MSFESM 算法得到含噪分割图像的 3 维像素显示。从图中可以看出,MSFESM 算法在取得和原始分割图像更高相关度的同时,还能够比 GAC 算法更好地保留图案细节的拓扑形状。

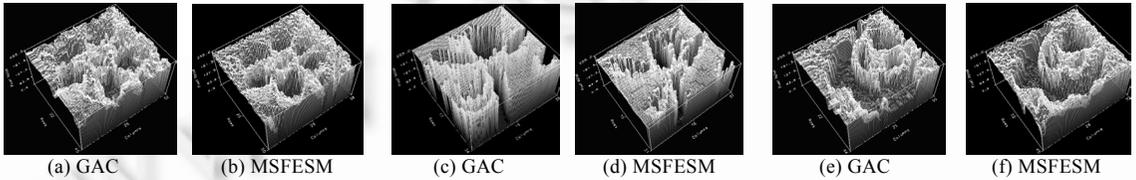


Fig.5 Segmentation comparison for different jacquard images between two algorithms ( $\sigma=40$ )

图 5 两种算法对不同提花图像的分割比较( $\sigma=40$ )

## 5 结 语

本文针对提花织物图像的特点,分析了曲线演化形变分割模型的不足,提出了一种基于弱形式 MS 泛函模型的有限元分割算法 MSFESM。其特点主要有:(1) 采用弱形式 MS 泛函模型,克服了曲线演化形变模型在对提花织物图像进行局部分割定位和图案整体分割提取时的不足。(2) 采用各向异性网格对弱形式 MS 泛函进行有限元逼近,提高了网格对复杂图案曲线边缘方向逼近的灵活性。通过对网格的自适应调整,实现了对精细结构边缘的有效定位,同时也提高了逼近算法的精度。(3) 采用拟牛顿最小化算法控制多个局部极小元的产生,确保逼近过程中满足全局收敛性。实验结果表明,采用本文方法可以有效提高提花织物图案的局部分割定位和图案整体分割提取的能力,即使对于在噪声环境下的提花图案,本文方法仍能较为准确、可靠地进行分割。今后的工作包括如下两个方面:(1) 进一步研究权值参数  $\alpha$ 、 $\beta$  和阈值参数  $\gamma$ 、 $\mu$  对分割算法效果的影响;(2) 在确保提花图案分割精度的前提下,研究如何提高分割算法的运行速度。

## References:

- [1] Neubauer C. Segmentation of defects in textile fabric. In: Proc. of the 11th IAPR Int'l Conf. on Computer Vision and Applications. Hague: IEEE Computer Society, 1992. 688–691. [http://intl.ieeexplore.ieee.org/xpl/abs\\_free.jsp?arNumber=201654](http://intl.ieeexplore.ieee.org/xpl/abs_free.jsp?arNumber=201654)
- [2] Sari SH, Goddard JS. Robust defect segmentation in woven fabrics. In: Proc. of the IEEE Int'l Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition. Santa Barbara: IEEE Computer Society, 1998. 938–944. [http://ieeexplore.ieee.org/xpl/abs\\_free.jsp?arNumber=698717](http://ieeexplore.ieee.org/xpl/abs_free.jsp?arNumber=698717)
- [3] Sari SH, Goddard JS. Vision system for on-loom fabric inspection. IEEE Trans. on Industry Applications, 1999,35(6):1252–1259.
- [4] Xu CY, Prince JL. Snakes, shapes, and gradient vector flow. IEEE Trans. on Image Processing, 1998,7(3):359–369.
- [5] Caselles V, Kimmel R, Sapiro G. Geodesic active contours. Int'l Journal of Computer Vision, 1997,22(1):61–79.
- [6] Yezzi A, Kichenassamy S, Kumar A, Olver P, Tannenbaum A. A geometric snake model for segmentation of medical imagery. IEEE Trans. on Medical Imaging, 1997,16(2):199–209.

- [7] Zhu FP, Tian J, Lin Y, Ge XF. Medical image segmentation based on level set method. *Journal of Software*, 2002,13(9):1866–1872 (in Chinese with English abstract). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/13/1866.pdf>
- [8] Yu HC, Wang DJ, Tang ZS, Tang L. Singular points in level set evolution and revised narrow banding algorithm. *Journal of Software*, 2003,14(4):810–817 (in Chinese with English abstract). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/14/810.htm>
- [9] Petittot J. An introduction to the Mumford-Shah segmentation model. *Journal of Physiology-Paris*, 2003,97(2/3):335–342.
- [10] Carriero M, Leaci A, Tomarelli F. Calculus of variations and image segmentation. *Journal of Physiology-Paris*, 2003,97(2/3):343–353.
- [11] Braides A, Maso GD. Non-Local approximation of the Mumford-Shah functional. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 1997,5(4):293–322.
- [12] Gobbino M. Finite difference approximation of the Mumford-Shah functional. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1998,51(5):197–228.
- [13] Negri M. The anisotropy introduced by the mesh in the finite element approximation of the Mumford-Shah Functional. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 1999,20(10):957–982.
- [14] Bourdin B, Chambolle A. Implementation of an adaptive finite element approximation of the Mumford-Shah functional. *Numerische Mathematik*, 2000,85(4):609–646.
- [15] Laug P, Borouchaki H. The BL2D mesh generator: Beginner's guide, user's and programmer's manual. Technique Report, No.0194, Paris: National Institute for Research in Computer Science and Control, 1996.
- [16] Kissin E, Shulman VS. Classes of operator-smooth functions-II. Operator-Differentiable functions. *Integral Equations and Operator Theory*, 2004,49(2):165–210.

#### 附中文参考文献:

- [7] 朱付平,田捷,林瑶,葛行飞.基于 Level Set 方法的医学图像分割.软件学报,2002,13(9):1866–1872. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/13/1866.pdf>
- [8] 于洪川,王德军,唐泽圣,唐龙.水平集演化中的奇点与改进的窄带算法.软件学报,2003,14(4):810–817. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/14/810.htm>