有理 B 样条曲线的区间隐式化*

樊旭川+, 陈发来

(中国科学技术大学 数学系,安徽 合肥 230026)

Interval Implicitization of Rational B-Spline Curves

FAN Xu-Chuan+, CHEN Fa-Lai

(Department of Mathematics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

+ Corresponding author: Phn: +86-551-3642979, E-mail: fanyii@mail.ustc.edu.cn, http://www.ustc.edu.cn

Received 2004-04-05; Accepted 2004-07-05

Fan XC, Chen FL. Interval implicitization of rational B-spline curves. *Journal of Software*, 2004,15(Suppl.): 239~245.

Abstract: Study the interval implicitization of rational B-spline curves, that is, finding a lower degree interval implicit B-spline curve which bounds a given B-spline curve such that the width of the interval implict B-spline curve is as small as possible. The problem is solved in two steps: finding an approximate implicit B-spline curve and finding the bounding implicit curves by solving some linear problems. Some examples are provided to demonstrate the algorithm.

Key words: B-spline curve; implicit B-spline curve; interval arithmetic; interval implicit B-spline curve; interval implicitization

摘 要: 研究有理 B 样条曲线的区间隐式化问题,即对给定的一条有理 B 样条曲线,寻求低次的区间隐式 B 样条包含给定的曲线,要求区间隐式 B 样条曲线的宽度尽量小,并且尽量避免多余分支的出现.将该问题分为求解近似隐式曲线和边界曲线两步,并将问题转化为求解局部的线性最优化问题.最后给出几个算例.

关键词: B 样条曲线;隐式 B 样条曲线;区间算法;区间隐式 B 样条曲线;区间隐式化

曲线(曲面)的参数表示和隐式表示是 CAGD 中的两种基本表达形式,它们各有自己的优缺点.如果能同时得到曲线(曲面)的这两种表达形式将是非常有用的.

任何有理参数曲线(曲面)理论上都可以精确转化为隐式形式,然而由于精确隐式化方法较为复杂,隐式方程通常具有较高次数,容易出现多分支,因此缺少实用价值.另外一方面,由于计算机浮点运算的误差,得到的通常也只是近似结果,所以可以直接考虑低次近似隐式化方法.近年来涌现了一系列相关工作[1~6].

---

* Supported by the National Science Fund for Distinguished Young Scholars under Grant No.60225002 (国家杰出青年基金); the Teaching and Research Award Program for Outstanding Young Teachers in Higher Education Institutions of MOE, China (国家教育部优秀青年教师奖励计划); the National Research Foundation for the Doctoral Program of Higher Education of China No.20010358003 (国家教育部博士点基金)

作者简介: 樊旭川(1978-),男,浙江缙云人,博士生,主要研究领域为区间算法在 CAGD 中的应用;陈发来(1966-),男,教授,博士生导师,主要研究领域为计算机辅助几何设计,图形学.

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

近似方法造成的微小误差可能会造成几何操作的不可靠性与不稳定性.为解决这些问题,区间分析方法被引入到 CAGD 中来,它在改进曲线曲面求交、实体造型和可视化的稳定性等方面得到了一系列的应用[7~12].

结合近似隐式化和区间算法这两方面,我们考虑区间隐式化方法,即寻求一条低次的区间隐式曲线包含给定的参数曲线.文献[13]考虑了有理 Bézier 曲线的区间隐式化问题,本文将讨论有理 B 样条曲线的区间隐式化.

1 区间算法与区间隐式 B 样条曲线

1.1 区间算法

区间是指实数集合 $[a,b]=\{x\in \mathrm{R}\mid a\le x\le b\}$,区间的宽度 $w([a,b])=b-a$,中心 $c([a,b])=(a+b)/2$.给定两个区间 $[a,b]$ 和 $[c,d]$,区间算法定义为

$$[a,b]\circ[c,d]=\{x\circ y\mid x\in[a,b],y\in[c,d]\} \tag{1}$$

其中 $\circ\in\{+,-,\times,\div\}$.具体说来即为

$$\begin{cases}[a,b]+[c,d]=[a+c,b+d]\\ [a,b]-[c,d]=[a-d,b-c]\\ [a,b]\times[c,d]=[\min(ac,ad,bc,bd),\max(ac,ad,bc,bd)]\\ [a,b]\div[c,d]=[\min(a/c,a/d,b/c,b/d),\max(a/c,a/d,b/c,b/d)],\ 0\notin[c,d]\end{cases} \tag{2}$$

1.2 区间隐式B样条曲线

区间隐式 B 样条曲线定义为

$$[f](x,y):=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}[f_{ij}]N_i^k(x)N_j^l(y)=[0] \tag{3}$$

式中 $f_{ij}=[\underline{f_{ij}},\overline{f_{ij}}]$ 是有界闭区间,$N_i^k(x)$, $N_j^l(y)$ 分别是 B 样条基函数,$x\in[\underline{x},\overline{x}]$, $y\in[\underline{y},\overline{y}]$,[0]是指任意的含 0 区间.该区间曲线的几何图形是如下的点集合:

$$\left\{(x,y)\ \middle|\ \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}g_{ij}N_i^k(x)N_j^l(y)=0,\ g_{ij}\in[f_{ij}]\right\} \tag{4}$$

易知该曲线的两条边界曲线分别为

$$\begin{cases}lf(x,y):=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\underline{f_{ij}}N_i^k(x)N_j^l(y)=0\\ uf(x,y):=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\overline{f_{ij}}N_i^k(x)N_j^l(y)=0\end{cases},\ (x,y)\in[\underline{x},\overline{x}]\times[\underline{y},\overline{y}] \tag{5}$$

由于对任意非零常数 a,$[f](x,y)=[0]$ 和 $a[f](x,y)=[0]$ 表示的是同一区间曲线,故对隐式曲线方程作规范化处理:

$$\max_{0\le i\le m,j\le 0\le n}|c([f_{ij}])|=1$$

式中 $c([f_{ij}])=\frac{1}{2}(\underline{f_{ij}}+\overline{f_{ij}})$.区间隐式 B 样条曲线的宽度定义为

$$w([f]):=\frac{1}{(m+1)(n+1)}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}w([f_{ij}]) \tag{6}$$

2 参数 B 样条曲线的区间隐式化

给定一条齐次形式的有理 B 样条曲线:

$$\boldsymbol{P}(t)=(x(t),y(t),w(t))=\sum_{i=0}^{n}w_i\boldsymbol{P}_iN_i^k(t),\quad t\in[\underline{t},\overline{t}] \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{P}_i=(x_i,y_i,1)$, $w_i,i=0,1,\dots,n$ 分别是曲线的控制点和相应的权值,$N_i^k(t)$ 是相应于给定节点序列 T 的B样条基函数,$\boldsymbol{P}(t)$ 的区间 B 样条隐式化是指:寻求一条区间隐式 B 样条曲线 $[f](x,y)$ 使得 $[f](x,y)$ 包含 $\boldsymbol{P}(t)$,即

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

$lf(\boldsymbol{P}(t)) \le 0 \le uf(\boldsymbol{P}(t))$, $\forall t \in [\underline{t}, \overline{t}]$,并且区间隐式B样条曲线的宽度尽量小.

我们将该问题分解为两个子问题:

1. 参数B样条曲线的近似隐式化(相应于求区间隐式曲线的中心曲线);
2. 调整近似隐式化曲线得到两条边界曲线.

2.1 近似隐式化

给定一条有理 B 样条曲线 $\boldsymbol{P}(t)$,首先求出包含 $\boldsymbol{P}(t)$ 的矩形域 $[\underline{x},\overline{x}]\times[\underline{y},\overline{y}]$ (可取为所有控制顶点的外接矩形),对该矩形域作剖分 $\underline{x}=x_0<x_1<\ldots<x_m=\overline{x}, \underline{y}=y_0<y_1<\ldots<y_n=\overline{y}$,设近似隐式曲线的次数为 $(k-1)\times(l-1)$,分别取节点序列 $T_x=\{\overbrace{x_0,\ldots,x_0}^{k},x_1,x_2,\ldots,\overbrace{x_m,\ldots,x_m}^{k}\}$ 和 $T_y=\{\overbrace{y_0,\ldots,y_0}^{l},y_1,y_2,\ldots,\overbrace{y_n,\ldots,y_n}^{l}\}$,则近似隐式曲线可表示为

$$f(x,y):=\sum_{i=0}^{m+k-2}\sum_{j=0}^{n+l-2} f_{ij}N_i^k(x)N_j^l(y)=0 \tag{8}$$

其中 $N_i^k(x),N_j^l(y)$ 分别是以 T_x, T_y 为节点序列的 k 阶和 l 阶 B 样条基函数, f_{ij} 为待定参数.令 $\boldsymbol{F}$ 是由所有的 f_{ij} 组成的列向量.为使隐式曲线逼近给定的参数曲线,我们考虑极小化以下几个量:

1. 近似隐式曲线与参数曲线的代数距离:

$$L(\boldsymbol{F}):=\int_{\underline{t}}^{\overline{t}} f(\boldsymbol{P}(t))^2\mathrm{d}t \tag{9}$$

2. 近似隐式曲线与参数曲线之间的法向差距.由于曲线在一个点的法向可以取两个相反的方向,当曲线出现自交时,参数曲线的法向在自交点附近的两侧方向不变,而隐式曲线的法向通常要变向,故我们首先只考虑参数曲线的切向与隐式曲线的法向的内积:

$$M(\boldsymbol{F}):=\int_{\underline{t}}^{\overline{t}}\left(\nabla f(\boldsymbol{P}(t))\cdot\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{P}(t)\right)^2\mathrm{d}t \tag{10}$$

3. 为减少隐式曲线出现多分支的可能性,考虑如下的能量:

$$T(\boldsymbol{F}):=\int_{\underline{x}}^{\overline{x}}\int_{\underline{y}}^{\overline{y}}\left(f_{xx}^2+2f_{xy}+f_{yy}^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{11}$$

易知 $L(\boldsymbol{F}), M(\boldsymbol{F}), T(\boldsymbol{F})$ 均为关于 $\boldsymbol{F}$ 的正定二次型.分别取大于 0 的权值 w_1,w_2 ,则目标 $g(\boldsymbol{F}):=L(\boldsymbol{F})+w_1M(\boldsymbol{F})+w_2T(\boldsymbol{F})$ 也是正定的二次型,求解线性方程组 $(\partial/\partial f_{ij})g(\boldsymbol{F})=0$ 即可得到目标 $g(\boldsymbol{F})$ 的极小值点 $\boldsymbol{F}$.但由于取 $f(x,y)\equiv 0$ 时, $g(0)=0$ 是极小点,此时并未能得到隐式曲线,我们还需要关于系数 $\boldsymbol{F}$ 的一个规范化约束条件.为了便于求解我们取 $f_{00}=1$,再求解相应的线性方程组得到近似隐式化曲线 $f_0(x,y)$.

上述方法得到的近似曲线还可以进一步迭代优化.设已经得到第 i 步的近似隐式曲线 $f_i(x,y)$,我们考虑以下两方面:

1. 近似隐式曲线与参数曲线的近似几何距离:

$$L'(\boldsymbol{F}):=\int_{\underline{t}}^{\overline{t}}\frac{f_i(\boldsymbol{P}(t))^2}{\max(\|\nabla f_i(\boldsymbol{P}(t))\|^2,\varepsilon)}\mathrm{d}t \tag{12}$$

式中 ε 是为了防止 $\|\nabla f_i(\boldsymbol{P}(t))\|^2$ 取值过小而造成曲线其他地方对 $L'(\boldsymbol{F})$ 的积分贡献被忽略,一般可取为约 10^{-5}~10^{-3};

2. 法向.在上式中我们用曲线 $f_i(x,y)=0$ 的法向量来近似 $f(x,y)$ 的法向量,故我们考虑这二者的法向之差的模:

$$M'(\boldsymbol{F}):=\int_{\underline{t}}^{\overline{t}}\left\|\nabla f(\boldsymbol{P}(t))-\nabla f_i\boldsymbol{P}(t)\right\|^2\mathrm{d}t \tag{13}$$

同样取大于 0 的权值 w_1,w_2 ,得到正定的二次型目标函数 $g(\boldsymbol{F}):=L'(\boldsymbol{F})+w_1M'(\boldsymbol{F})+w_2T(\boldsymbol{F})$.求解相应的线性方程组得到 $f_{i+1}(x,y)$.可以再反复使用本过程迭代优化.一般迭代 2~5 次即可.图 1 和图 2 分别是迭代优化前后的近似隐式化结果,虚线是参数B样条曲线,实线是近似隐式化曲线.

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

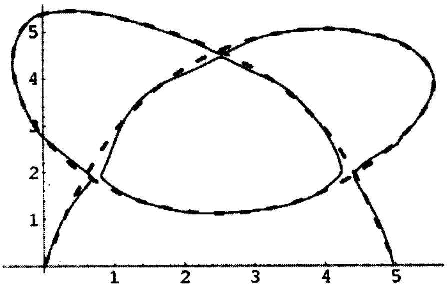

图 1

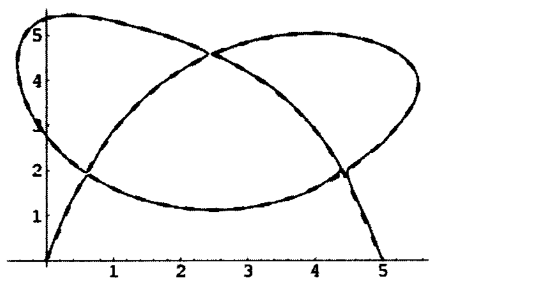

图 2

另外,当隐式B样条曲线的剖分网格较密时,给定的参数曲线 $\boldsymbol{P}(t)$ 通常只经过其中小部分网格域.我们可以只将隐式B样条曲线定义在参数曲线 $\boldsymbol{P}(t)$ 经过的网格域上,这样不仅可以大大减少控制参数 f_{ij} 的个数,而且可以在很大程度上避免多分支的出现.

2.2 求解边界隐式曲线

设我们已经得到近似隐式曲线 $f(x,y)$.求两条边界曲线的方法是一样的,我们只考虑 $lf(x,y)$:

$$lf(x,y):=\sum_{i=0}^{m+k-2}\sum_{j=0}^{n+l-2}(f_{ij}-\varepsilon_{ij}^{1})N_i^k(x)N_j^l(y)=0 \tag{14}$$

其中 $\varepsilon_{ij}{}^{1}\ge 0$.记

$$\varepsilon^{1}(x,y)=\sum_{i=0}^{m+k-2}\sum_{j=0}^{n+l-2}\varepsilon_{ij}^{1}N_i^k(x)N_j^l(y) \tag{15}$$

则 $lf(x,y)=f(x,y)-\varepsilon^{1}(x,y)$.我们需要求出 $lf(\boldsymbol{P}(t))\le 0(\forall t\in[\underline{t},\bar{t}])$ 的一组关于 ε_{ij}^{1} 的充分条件.首先我们有以下引理:

引理 1. 设 $g(x,y)$ 是 $m\times n$ 次多项式, $\boldsymbol{Q}(t)=(x(t)/w(t),y(t)/w(t)),\ t\in[0,1]$ 是 k 次有理曲线, $w(t)>0$.则 $w^{m+n}(t)g(\boldsymbol{Q}(t))=\sum_{i=0}^{(m+n)k}b_iB_i^{(m+n)k}(t)$, $g(\boldsymbol{Q}(t))\le 0,\forall t\in[0,1]$ 的一个充分条件是 $b_i\le 0,i=0,1,\dots,(m+n)k$.

证明:由 Bernstein 基函数的非负性和 $w(t)>0$ 立即可得. □

$lf(x,y)$ 实质是分片连续多项式,设它在剖分域 $D_{ij}=[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}]$ 中的多项式是 $lf_{ij}(x,y)$.参数B样条曲线 $\boldsymbol{P}(t)$ 实质是分段连续的有理曲线,可能有多段有理曲线段 $\boldsymbol{Q}_k(t)$ 落在 D_{ij} 内.我们只要使得 $lf_{ij}(\boldsymbol{Q}_k(t))\le 0$ 对所有的 i,j 和相应的曲线段 $\boldsymbol{Q}_k(t)$ 都成立,即可保证 $lf(\boldsymbol{P}(t))\le 0,\forall t\in[\underline{t},\bar{t}]$.根据这个思想,我们有如下算法(剖分域 $[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}]$ 简记为 (i,j)):

1. 求出 $\boldsymbol{P}(t)$ 的各段有理 Bézier 曲线,根据事先给定的剖分将各段 Bézier 曲线细分,得到一系列的 Bézier 曲线 $\{\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\dots,\boldsymbol{Q}_L\}$ 和相应的曲线段经过的剖分区域 $\{(i_1,j_1),(i_2,j_2),\dots,(i_L,j_L)\}$ (由于不能精确求出 Bézier 曲线和剖分线的交点,各曲线段的端点可稍微超出剖分域);
2. 考虑 $\boldsymbol{Q}_1(t)$.在剖分 (i_1,j_1) 内,根据引理 1,得到 $lf(\boldsymbol{Q}_1(t))\le 0$ 的一组充分条件.易知这些约束条件都是线性的;
3. 对所有 $\boldsymbol{Q}_l$ 和相应的 (i_l,j_l),做第2步处理,得到一系列关于 $\varepsilon_{ij}{}^{1}$ 的线性约束条件.令目标函数为 $\min\sum\varepsilon_{ij}{}^{1}$,求它在这些约束条件下的最优化问题,得到 $\varepsilon_{ij}{}^{1}$,即得到 $lf(x,y)$.

2.3 算法的改进

当剖分网格较细、给定的有理曲线次数较高时,以上方法最后得到的线性最优化问题具有较多的约束条件.我们利用B样条基的局部支集性质,将该最优化问题分解为局部最优化问题.为此给出以下引理:

引理 2. 设 $a(t)=\sum_{i=0}^{m}a_iB_i^m(t),b(t)=\sum_{j=0}^{n}b_jB_j^n(t)$, $c(t)=a(t)\cdot b(t)=\sum_{k=0}^{m+n}c_kB_k^{m+n}(t)$.若 $\alpha_i\ge 0(0\le i\le m)$, $b_j(0\le j\le n)$ 都是关于未定参数 d_l 的线性函数且系数都大于 0,则 $c_k(0\le k\le m+n)$ 也是关于未定参数 d_l 的线性

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

函数且系数都大于0.

证明:由 $B_i^n(t)B_j^n(t)=C_i^nC_j^m/C_{i+j}^{m+n}B_{i+j}^{m+n}(t)$ 易证. □

引理 3. 设 $f(x)=\sum_{i=0}^n d_iN_i^k(x)$ 是以 $T=\{X_0,X_1,...,X_{n+k}\}$ 为节点序列的 k 阶 B 样条函数, d_i 为未定参数. $x(t)=\sum_{j=0}^m x_jw_jB_j^m(t)$, $w(t)=\sum_{j=0}^m w_jB_j^m(t)$, $w_j>0, X_I\le x_j<X_{I+1}\ (0\le j\le m)$.记 $M=m(k-1)$,则

$$f(x(t)/w(t))w(t)^{k-1}=\sum_{N=0}^M g_NB_N^M(t)$$

其中 $g_N=\sum_{i=I}^{I+k-1}\alpha_{iN}d_i$, α_{iN} 是常数,且 $\alpha_{iN}\ge 0$.

证明:首先由B样条基的局部支集性质可以得知, g_N 只与控制系数 $\{d_i:I-k+1\le i\le I\}$ 有关.考虑B样条函数的 de Boor 算法:

$$\begin{cases} d_i^0=d_i, & I-k+1\le i\le I \\ d_i^j=(1-\alpha_i^j)d_{i-1}^{j-1}+\alpha_i^jd_i^{j-1}, & I-k+1+j\le i\le I \\ d_I^{k-1}=f(x(t)/w(t)) \end{cases}$$

其中:

$$\alpha_i^j=\frac{x(t)/w(t)-X_i}{X_{i+k-1}-X_i}.$$

记 $g_i^j(t):=d_i^jw(t)^j$.我们对 j 归纳证明:

$g_i^j(t)$ 是关于 t 的次数不超过 mj 的多项式,设 $g_i^j(t)=\sum_{N=0}^{mj}g_{iN}^jB_N^{mj}(t)$,则 g_{iN}^j 是关于参数 $\{d_i:I-k+1\le i\le I\}$ 的线性函数且系数都非负.

$j=0$ 时, $g_i^0(t)=d_i^0=d_i$,显然成立.

设对 $j-1$ 命题成立,考虑 j 时,

$$\begin{aligned}\alpha_i^j&=\frac{x(t)/w(t)-X_i}{X_{i+k-1}-X_i}=\frac{1}{w(t)}\cdot\frac{x(t)-X_iw(t)}{X_{i+k-1}-X_i}\\&=\frac{1}{w(t)}\cdot\frac{\sum_{j=0}^m x_jw_jB_j^m(t)-X_i\sum_{j=0}^m w_jB_j^m(t)}{X_{i+k-1}-X_i}\\&=\frac{1}{w(t)}\cdot\sum_{j=0}^m\frac{x_j-X_i}{X_{i+k-1}-X_i}w_jB_j^m(t)\end{aligned}$$

由于 $X_I\le x_j$ 且 $i\le I$,故 $x_j-X_i\ge 0$,于是 $\alpha_i^jw(t)$ 的 Bernstein 基表示形式的系数都非负.对 $(1-\alpha_i^j)w(t)$ 同样可以证明有此性质.又:

$$g_i^j(t)=d_i^jw(t)^j=((1-\alpha_i^j)d_{i-1}^{j-1}+\alpha_i^jd_i^{j-1})w(t)^j=(1-\alpha_i^j)w(t)g_{i-1}^{j-1}(t)+\alpha_i^jw(t)g_i^{j-1}(t)$$

由引理2和归纳假设,命题对 j 时也成立.

取 $i=I, j=k-1$,则有

$$f(x(t)/w(t))w(t)^{k-1}=d_I^{k-1}w(t)^{k-1}=g_I^{k-1}(t)$$

引理得证. □

引理3可直接推广至2维情形(证明略).

引理 4. 设 $g(t)=\varepsilon^1(Q(t))\cdot(w(t))^{(k-1)+(l-1)}$,其中 $\varepsilon^1(x,y)$ 定义式在第2.2节(15), $Q(t)=(x(t)/w(t),y(t)/w(t))$ 是有理 Bézier 曲线,且 $Q(t)$ 的控制顶点都在矩形域 $[x_I,x_{I+1}]\times[y_J,y_{J+1}]$ 内.将 $g(t)$ 化为 Bernstein 基形式 $g(t)=\sum_{N=0}^M g_NB_N^M(t)$,则 $g_N=\sum_{i=I}^{I+k-1}\sum_{j=J}^{J+l-1}\alpha_{ijN}\varepsilon_{ij}^1$,其中 α_{ijN} 是常数, $\alpha_{ijN}\ge 0$.

根据以上性质,将上述算法的最后一步求解最优化问题改为:

1. 首先将所有约束条件分组,经过同一个剖分 $[x_I,x_{I+1}]\times[y_J,y_{J+1}]$ 的所有约束条件归到同一组.对所有 i,j 初始化 $\varepsilon_{ij}=0$.

2. 取一组约束条件,取目标函数为所有在这组约束条件出现过的 ε_{ij}^1 的和,并在这组约束条件中添加条件

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

$\varepsilon_{ij}^1 \ge \varepsilon_{ij}$,求解线性规划问题得到 ε_{ij}^1.

3. 令 $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^1$.对每一组约束条件进行第 2 步求解对应的规划问题.最后得到的 ε_{ij} 即为所求.

该解在理论上保证满足原来的所有系数都为正的约束条件.由于曲线落在该剖分内不能保证控制顶点也落在该剖分内,所以不能完全保证约束条件的系数都大于 0.但通常在一个剖分内的曲线段较为简单(否则我们需要将该剖分进一步细分),所以很少出现小于 0 的系数.算例也表明通常很少有小于 0 的系数,且绝对值都非常小,一般可以忽略.我们可以将最后所得结果代入约束条件检验,假如确实存在不能满足的约束条件,可以对所得结果再作微小的调整.算例表明,这个解只比第 2.2 节算法所得结果略差一些,但求解的规划问题是局部的,大大少于原全局问题的变量数以及约束条件数.特别是剖分网格较多时,用此方法可以节省计算时间和存储空间.图 3 是用局部方法的结果,图 4 是是全局方法的结果.可以看出,两种方法所得结果几乎完全一致.

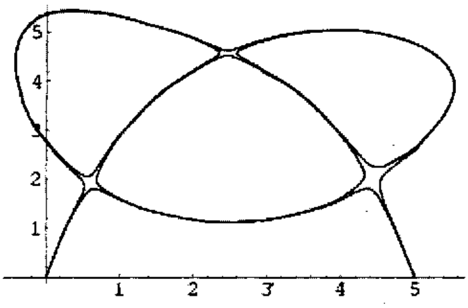

图 3

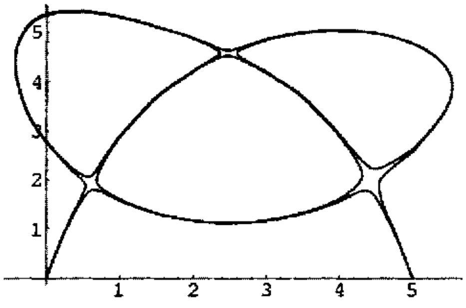

图 4

3 实例及分析

我们用参数曲线和隐式曲线的近似几何距离

$$d(P(t), f(x,y))^2 := \int_{t}^{\bar{t}} \frac{f(P(t))^2}{\max(\|\nabla f(P(t))\|^2, \varepsilon)} dt \tag{16}$$

来衡量近似隐式化结果的好坏,用区间隐式曲线的宽度来衡量区间隐式化结果的好坏.

例 1:考虑本文第 2 节用于演示的例子.给定的参数曲线是含 10 个控制顶点的 4 阶有理 B 样条,隐式函数 $f(x,y)$ 采用双二次、剖分为 7×6 的 B 样条.我们得到的近似隐式曲线(图 2)与给定参数曲线的近似几何距离约为 0.000 03.区间隐式曲线(图 4)宽度约为 0.000 13.

例 2:给定含 8 个控制顶点的 3 阶有理 B 样条曲线 $P(t)$ (图 5 中的虚线),采用双二次、剖分为 4×4 的隐式 B 样条逼近,得到的近似隐式曲线(如图 5 中实线所示)与给定曲线的近似几何距离约为 0.000 2,区间隐式曲线(如图 6 所示)的宽度约为 0.000 7.两条边界曲线已经靠得非常近,看起来只有 1 条曲线.

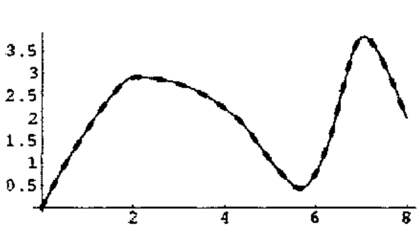

图 5

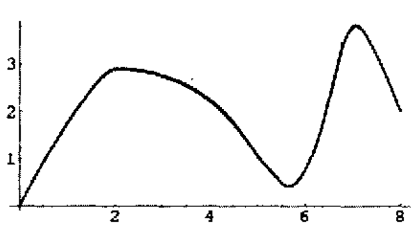

图 6

例 3:对于形状特别简单的有理 B 样条曲线,如果我们减少剖分数为 1×1,此时的隐式 B 样条事实上即为一条代数曲线,用本文的方法可以求出包含给定 B 样条曲线的区间代数曲线.

给定含 9 个控制顶点的 4 阶有理 B 样条曲线(图 7 中的虚线),采用双二次剖分数 1×1 的隐式 B 样条逼近.得到的近似隐式曲线(图 7 中的实线)与给定曲线的近似几何距离约为 0.006,区间隐式曲线(图 8)的宽度约为 0.01.

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

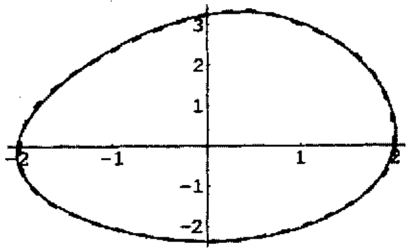

图 7

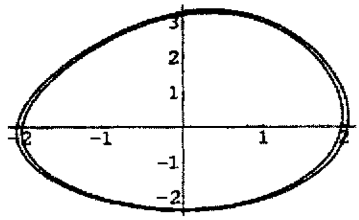

图 8

4 结 论

本文所用方法能很好地求得包含给定有理B样条曲线的低阶区间隐式B样条曲线.实例表明,对于结构较为简单的有理B样条曲线,可以很好地用低次区间隐式B样条曲线包含它,但在曲线的自交点附近,逼进效果较差.本文方法尚需人工调整权参数 w_1,w_2,权值的选取对多余分支的出现有很大影响.如何自动选取合适的权值是一个值得进一步考虑的问题.

References:

[1] Velho L, Gomes J. Approximate conversion from parametric to implicit surfaces. Computer Graphics Forum, 1996,15(5):327~337.

[2] Pottmann H, Leopoldseder S, Hofer M. Approximation with active B-spline curves and surfaces. In: Proc. of the Pacific Graphics 2002. IEEE Computer Society, 2002. 8~25.

[3] Sederberg TW, Zheng J, Klimaszewski K, Dokken T. Approximate implicitization using monoid curves and surfaces. Graphical Models and Image Processing, 1999,61(4):177~198.

[4] Gao XS, Li M, Approximate implicitization of planar parametric curves using quadratic splines. MM Research Preprints, 2002,21(12):52~63.

[5] Wurm E, Juttler B. Approximate implicitization via curve fitting. In: Kobbelt L, Schröder P, Hoppe H, eds. Symp. on Geometry Processing. New York: Eurographics/ACM Siggraph, 2003. 240~247.

[6] Chen FL. Approximate implicitization of rational curves. Chinese Journal of Computers, 1998,21(9):855~859 (in Chinese with English abstract).

[7] Sederberg TW, Farouki RT, Approximation by interval Bézier curves. IEEE Computer Graphics Application, 1992,12(5):87~95.

[8] Hu CY, Maekawa T, Sherbrooke EC, Patrikalakis NM. Robust interval algorithm for curve intersections. Computer Aided Design, 1996,28(6-7):495~506.

[9] Hu CY, Patrikalakis NM, Ye XZ. Robust interval solid modeling—Part I: Representations. Computer Aided Design, 1996,28(10): 807~817.

[10] Hu CY, Patrikalakis NM, Ye XZ. Robust interval solid modeling—Part II: Boundary evaluations. Computer Aided Design, 1996, 28(10):819~830.

[11] Patrikalakis NM. Robustness issues in geometric and solid modeling. Computer Aided Design, 2000,32(11):629.

[12] Chen FL, Low WP. Degree reduction of interval Bézier curves. Computer Aided Design, 2000,32(10):571~582.

[13] Chen FL, Deng L. Interval implicitization of rational curves. Computer Aided Geometry Design, 2004,21(4):401~415.

附中文参考文献:

[6] 陈发来.有理曲线的近似隐式化表示.计算机学报,1998,21(9):855~859.

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn