

# 超立方体中基于极大安全通路矩阵的容错路由\*

王雷, 林亚平<sup>+</sup>, 陈治平, 文学

(湖南大学 计算机与通信学院, 湖南 长沙 410082)

## Fault-Tolerant Routing for Hypercube Multi-Computers Based on Maximum Safety-Path Matrices

WANG Lei, LIN Ya-Ping<sup>+</sup>, CHEN Zhi-Ping, WEN Xue

(College of Computer and Communication, Hu'nan University, Changsha 410082, China)

+ Corresponding author: Phn: +86-731-8821932, E-mail: yplin@hnu.net.cn, <http://www.hnu.net.cn>

Received 2003-03-13; Accepted 2003-09-05

Wang L, Lin YP, Chen ZP, Wen X. Fault-Tolerant routing for hypercube multi-computers based on maximum safety-path matrices. *Journal of Software*, 2004,15(7):994~1004.

<http://www.jos.org.cn/1000-9825/15/994.htm>

**Abstract:** Hypercube multi-computers system is of good performance in parallel and distributed computation. With the increasing size of a multi-computers system, the fault possibility of computers and their links increases. It is very important to seek for better fault-tolerant routing strategies to realize an effective fault-tolerant routing. A novel fault-tolerant routing algorithm in hypercube multi-computers system is proposed, in which each node uses a maximum safety path matrices (MSPMs) to record the optimal paths to the other nodes. It proves that MSPMs can record most of the optimal paths by  $n-1$  rounds of information exchanges between neighboring nodes. Furthermore, it proves that MSPMs is the final extension of the Optimal Path Matrices (OPMs) and the Extended Optimal Path Matrices (EOPMs) which also use the matrices to record the optimal paths in hypercube multi-computers system, so the problem of how to record the most of optimal paths in the  $n$  dimensional hypercube multi-computers system by using matrices is solved finally.

**Key words:** fault-tolerant routing; optimal path; maximum safety path matrices; hypercube; multi-computers system

**摘要:**  $n$ 维超立方体结构的多处理机系统在并行与分布式处理中具有良好的性能,随着多处理机系统规模的增大,系统出现链路与节点故障的概率也随之增大,因此设计容错性更强的路由算法对  $n$  维超立方体结构的多处理机系统具有重要意义.针对超立方体结构的多处理机系统中存在链路故障的情况,提出了用于最优通路记录的极大安全通路矩阵(maximum safety path matrices,简称 MSPMs)这一概念,给出了一种建立 MSPMs 及其容错路由算法.证明了 MSPMs 通过  $n-1$  轮邻节点之间的信息交换,能以矩阵的形式记录最多的最优通路;与基于最优通路矩阵(optimal path matrices,简称 OPMs)及扩展最优通路矩阵(extended optimal path matrices,简称 EOPMs)

\* Supported by the Natural Science Foundation of Hu'nan Province of China under Grant No.01JJY1007 (湖南省自然科学基金)

**作者简介:** 王雷(1973—),男,湖南长沙人,博士生,主要研究领域为计算机网络,机器学习;林亚平(1955—),男,教授,博士生导师,主要研究领域为计算机网络,机器学习;陈治平(1971—),男,博士,主要研究领域为机器学习;文学(1978—),男,硕士生,主要研究领域为计算机网络.

的容错路由算法相比,MSPMs是OPMs以及EOPMs的最大扩展,解决了如何用矩阵的形式来记录最多最优通路的问题.

**关键词:** 容错路由;最优通路;极大安全通路矩阵;超立方体;多处理机系统

**中图法分类号:** TP338 **文献标识码:** A

随着多处理机系统规模的扩大,系统中出现处理机故障或处理机间的链路故障的可能性也随之增加,因此,设计较好的容错路由策略,尽可能多地记录系统中存在的最优通路信息,使得当系统中存在故障的情况下仍能实现有效的路由,具有重要意义.超立方体网络是多处理机中常见的一种互连结构,针对超立方体结构多处理机系统的容错路由,人们做了大量的工作<sup>[1-10]</sup>.文献[1,2]利用概率的方法对超立方体网络的容错性进行了研究.文献[3,4]对具有大量节点故障的超立方体网络进行了研究,提出了两类局部连通条件.文献[5,6]提出了非安全向量(unsafety vectors)的概念及其容错路由算法.文献[7]提出了安全向量(safety vectors,简称SVs)的概念及其容错路由算法,文献[8]在文献[7]的基础上修改了SVs的定义,设计了针对距离为2的最优通路的计算方法,提出了扩展安全向量(extended safety vectors,简称ESVs)的概念及其容错路由算法.文献[9]在文献[7]的基础上改用矩阵来表示各邻节点的每条链路是否存在链路故障,重新设计了对最优通路的计算方法,提出了最优通路矩阵(optimal path matrices,简称OPMs)的概念及其容错路由算法.文献[10]在文献[9]的基础上修改了OPMs的定义,提出了扩展最优通路矩阵(extended optimal path matrices,简称EOPMs)的概念及其容错路由算法.文献[9,10]的结果表明,它们记录的最优通路信息都比SVs,ESVs要多,搜索最优通路的能力都比SVs,ESVs要强,因此它们都是对基于SVs的容错路由算法的扩展.

针对 $n$ 维超立方体结构的多处理机系统中存在链路故障的情况,本文提出了用于最优通路记录的极大安全通路矩阵(maximum safety path matrices,进程MSPMs)的概念,并给出了一种建立MSPMs及其容错路由算法.同时,还证明了MSPMs矩阵具有如下特性:对于 $n$ 维超立方体中的任意节点 $A$ , $MSPM_A[k][j]=1(1 \leq k \leq n, 0 \leq j \leq n-1) \Leftrightarrow$ 节点 $A$ 和所有与其距离为 $k$ 且第 $j$ 位与其第 $j$ 位互异的节点之间存在距离为 $k$ 的最优通路,从而MSPMs是SVs,ESVs,OPMs以及EOPMs的最大扩展,解决了 $n$ 维超立方体网络研究中如何使得各节点在仅通过邻节点间的 $n-1$ 轮信息交换的条件下,能够利用矩阵的形式最大限度地记录最优通路的信息,从而实现与目的节点之间的高效信息传递.

## 1 极大安全通路矩阵

### 1.1 预备知识

**定义 1(距离).** 对于 $n$ 维超立方体 $Q_n$ 中的节点 $A(w_{n-1} \dots w_1 w_0), B(w'_{n-1} \dots w'_1 w'_0)$ ,其中 $w_j, w'_j \in \{0, 1\}, j \in [0, n-1]$ ;定义 $A, B$ 之间的互异位的个数,即 $A, B$ 之间的Hamming距离为 $A, B$ 之间的距离;若 $A, B$ 之间的距离为 $k$ ,则称 $A, B$ 具有 $k$ 距离.

**定义 2( $k$ 距离最优通路).** 对于 $n$ 维超立方体 $Q_n$ 中的节点 $A, B$ ,若它们之间的距离为 $k$ ,且 $A, B$ 之间存在一条距离为 $k$ 的通路,则称 $A, B$ 之间存在 $k$ 距离最优通路,或简称为 $A, B$ 之间存在最优通路.

**定义 3(二进制字符串的操作约定).** 操作符 $+$ 表示二进制字符串的并,用操作符 $\&$ 表示二进制字符串的交,用操作符 $\sim$ 表示二进制字符串的补,用操作符 $\otimes$ 表示二进制字符串的异或,用 $2^i$ 表示第 $i$ 位为1其余 $n-1$ 位全部为0的二进制字符串.

为了描述方便,用 $sour, dest, cur$ 分别表示信息的源节点、目的节点和当前节点;用 $REL(A, B)$ 表示两个节点 $A, B$ 的相对地址,用 $REL_j(A, B)$ 表示 $REL(A, B)$ 的第 $j$ 位;用 $nei(A, i)$ 表示节点 $A$ 的第 $i$ 个邻节点;用 $Dist(A, B)$ 表示节点 $A$ 和节点 $B$ 之间的距离.

### 1.2 极大安全通路矩阵

**定义 4(极大安全通路矩阵).** 对于 $n$ 维超立方体 $Q_n$ 中的节点 $A$ ,它的极大安全通路矩阵有 $n$ 行 $n$ 列,记为

MSPM<sub>A</sub>,其中 MSPM<sub>A</sub>[k][j](1≤k≤n,0≤j<n)的值按如下规则计算:

$$\text{MSPM}_A[1][j]=\begin{cases} 1, & \text{若 } A \text{ 的第 } j \text{ 条链路畅通} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

当 k≥2 时,MSPM<sub>A</sub> 的第 k 行的值由 A 的邻节点的 MSPM 的第 k-1 行的值计算得出,方法如下:

$$\text{MSPM}_A[k]=[a_{n-1}, \dots, a_1, a_0]$$

其中 a<sub>i</sub> 按如下规则赋值(0≤i≤n-1):

$$a_i = \begin{cases} 1, & \text{若 } \lambda^i + \sum_{j=0}^{n-1} (b_j^i + c_j^i) > n - k \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

其中,条件因子 b<sub>j</sub><sup>i</sup>, c<sub>j</sub><sup>i</sup>, λ<sup>i</sup> 按如下规则赋值:

$$1) \quad b_j^i = \begin{cases} 1, & \text{若 } f_j^i + g_j^i = 2 \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

$$\text{其中, } f_j^i = \begin{cases} 1, & \text{若 } A \text{ 的第 } i \text{ 条链路故障} \\ \sim \text{MSPM}_{\text{nei}(A, i)}[k-1] \& (\sim 2^i) \text{ 的第 } j \text{ 项}, & \text{否则} \end{cases}$$

$$g_j^i = \begin{cases} 0, & \text{若 } A \text{ 的 } j \text{ 条链路故障或 } j = i \\ \text{MSPM}_{\text{nei}(A, j)}[k-1][i], & \text{否则} \end{cases}$$

$$2) \quad c_j^i = \begin{cases} 0, & \text{若 } A \text{ 的第 } i \text{ 条链路故障} \\ \text{MSPM}_{\text{nei}(A, i)}[k-1] \& (\sim 2^i) \text{ 的第 } j \text{ 项}, & \text{否则} \end{cases}$$

$$3) \quad \lambda^i = \begin{cases} 1, & \text{若 } \sum_{j=0}^{n-1} a_j^i \geq 1 \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

$$\text{其中, } a_j^i = \prod_{t=1}^r \{\text{MSPM}_{\text{nei}(A, m_t)}[k-1] \& [ \sim ( \prod_{w=1}^p 2^{s_w} ) ] \& [ \sim ( \prod_{w=1}^q 2^{l_w} ) ] \& (\sim 2^i) \} \text{ 的 } j \text{ 项};$$

m<sub>1</sub>, ..., m<sub>r</sub> { m<sub>t</sub> ∉ { s<sub>1</sub>, ..., s<sub>p</sub>, l<sub>1</sub>, ..., l<sub>q</sub>, i }, t ∈ [1, r], r ≤ n-p-q-1 } 为满足条件 MSPM<sub>nei(A, m<sub>t</sub>)</sub>[k-1][i] = 0 的 A 的所有畅通链路;

s<sub>1</sub>, ..., s<sub>p</sub> 为 MSPM<sub>nei(A, i)</sub>[k-1] 中为 1 的位;

l<sub>1</sub>, ..., l<sub>q</sub> { l<sub>t</sub> ∉ { s<sub>1</sub>, ..., s<sub>p</sub> }, t ∈ [1, q] } 为满足条件 MSPM<sub>nei(A, l<sub>t</sub>)</sub>[k-1][i] = 1 的 A 的所有畅通链路。

后面将证明按如上方法定义的 MSPMs 具有以下特性:对于 n 维超立方体中的任意节点 A, MSPM<sub>A</sub>[k][j]=1 (1≤k≤n,0≤j≤n-1) ⇔ 节点 A 和所有与其距离为 k 且第 j 位与其第 j 位互异的节点之间存在距离为 k 的最优通路。

我们依据 MSPMs 及链路状态矩阵的定义给出建立极大最优通路矩阵的描述算法如下:

Algorithm MSPMFilling() {

Collect link fault information to construct MSPM[1];

Send MSPM[1] via non-faulty link;

Receive all neighbors' MSPM[1];

For(k=2; k≤n; k++) { Receive all neighbors' MSPM[k-1];

Calculate MSPM[k] with all neighbors' MSPM[k-1] according to definition 4;

// 首先利用 MSPM[k-1] 计算出所有的条件因子, 然后再计算出 MSPM[k]

If(k!=n) send MSPM[k] out via non-faulty links. }

显然 MSPMs 赋值算法中的每个节点计算自身的 MSPMs[k] 时只需要用到自己邻节点的 MSPMs[k-1] 的信息, 因此 MSPMs 的赋值可以通过 n-1 轮邻节点之间的信息交换来完成; 又 MSPMs 为 n×n 矩阵, 且其各元素只取 0, 1, 故各节点的存储开销与 OPMs 及 EOPMs 同样为 n<sup>2</sup>bit。

对任意节点 A, 假设 MSPM<sub>A</sub>[k][j]=1 表示节点 A 和所有与其距离为 k 且第 j 位与其第 j 位互异的节点之间

一定存在距离为  $k$  的最优通路;对任意  $j \in [0, n-1], k \in [2, n], t \in [0, n-1], i \in [0, n-1]$ , 设  $U^i = \{\text{MSPM}_A[k][i]=1$  表示的所有节点所构成的集合}, 则可推出下述引理 1~引理 4 成立.

**引理 1.** 设  $U_j^i = \{\text{MSPM}_{\text{nei}(A, j)}[k-1][j]=1$  表示的所有节点所构成的集合}, 则  $U_j^i \cap U^i = \emptyset$  (空集).

证明:由定义 4 易知,  $U_j^i$  中所有节点均具有如下特征:与  $\text{nei}(A, j)$  具有  $k-1$  距离最优通路, 且第  $j$  位与  $\text{nei}(A, j)$  的第  $j$  位互异. 又由  $\text{nei}(A, j)$  为  $A$  的第  $j$  个邻节点, 故  $A$  和  $\text{nei}(A, j)$  的第  $j$  位互异  $\Rightarrow U_j^i$  中所有节点与  $\text{nei}(A, j)$  的第  $j$  位互异而与  $A$  的第  $j$  位相同  $\Rightarrow U_j^i$  中所有节点与  $\text{nei}(A, j)$  的距离为  $k-1$  而与  $A$  的距离为  $k-2$ ; 而  $U^i$  中的所有节点均与  $A$  具有  $k$  距离最优通路  $\Rightarrow U_j^i \cap U^i = \emptyset$ . □

**引理 2.** 设  $U_j^i = \{\text{MSPM}_{\text{nei}(A, j)}[k-1][t]=1 (j \neq i)$  表示的所有节点构成的集合},  $U_i^i = \{\text{MSPM}_{\text{nei}(A, i)}[k-1][j]=1$  表示的所有节点构成的集合}, 则  $U_j^i \cap U^i \subseteq U_i^i \cap U^i$ .

证明:由定义 4 易知,  $U_j^i \cap U^i$  中包含且仅包含所有具有如下特征的节点:第  $i$  位与  $A$  的第  $i$  位互异但第  $j, t$  位与  $A$  的第  $j, t$  位相同且与  $A$  具有  $k$  距离最优通路;  $U_i^i \cap U^i$  中包含且仅包含所有具有如下特征的节点:第  $i$  位与  $A$  的第  $i$  位互异但第  $j$  位与  $A$  的第  $j$  位相同且与  $A$  具有  $k$  距离最优通路; 而第  $i$  位与  $A$  的第  $i$  位互异, 但第  $j, t$  位与  $A$  的第  $j, t$  位相同且与  $A$  具有  $k$  距离最优通路的节点肯定具有第  $i$  位与  $A$  的第  $i$  位互异, 但第  $j$  位与  $A$  的第  $j$  位相同的特征 ( $j \neq i$ )  $\Rightarrow U_j^i \cap U^i \subseteq U_i^i \cap U^i$ . □

**引理 3.** 设  $U_j^i = \{\text{MSPM}_{\text{nei}(A, j)}[k-1][i]=1 (j \neq i)$  表示的所有节点构成的集合},  $U_j^i = \{\text{MSPM}_{\text{nei}(A, j)}[k-1][t]=1$  表示的所有节点构成的集合}, 则  $U_j^i \cap U^i \subseteq U_j^i \cap U^i$ .

证明:由定义 4 易知,  $U_j^i \cap U^i$  中包含且仅包含所有具有如下特征的节点:第  $i$  位、第  $j$  位与  $A$  的第  $i$  位、第  $j$  位互异 ( $j \neq i$ );  $U_j^i \cap U^i$  中包含且仅包含所有具有如下特征的节点:第  $i$  位、第  $j$  位、第  $t$  位与  $A$  的第  $i$  位、第  $j$  位、第  $t$  位互异 ( $j \neq i$ )  $\Rightarrow U_j^i \cap U^i \subseteq U_j^i \cap U^i$ . □

**引理 4.** 设  $U_j^i = \{\text{MSPM}_{\text{nei}(A, j)}[k-1][i]=1 (j \neq i)$  表示的所有节点构成的集合},  $U_i^i = \{\text{MSPM}_{\text{nei}(A, i)}[k-1][j]=1 (j \neq i)$  表示的所有节点构成的集合}, 则  $U_i^i \cap U^i = U_j^i \cap U^i$ .

证明:由定义 3、定义 4 易知,  $U_j^i \cap U^i$  中包含且仅包含所有具有如下特征的节点:第  $i$  位、第  $j$  位与  $A$  的第  $i$  位、第  $j$  位互异 ( $j \neq i$ );  $U_i^i \cap U^i$  中包含且仅包含所有具有如下特征的节点:第  $i$  位、第  $j$  位与  $A$  的第  $i$  位、第  $j$  位互异 ( $j \neq i$ )  $\Rightarrow U_i^i \cap U^i = U_j^i \cap U^i$ . □

**定理 1.** 若  $\text{MSPM}_A[k][i]=1 (0 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq n)$ , 即  $\text{MSPM}_A$  的第  $k$  行第  $i$  列等于 1, 则节点  $A$  和所有与其距离为  $k$  且第  $i$  位与其第  $i$  位互异的节点之间一定存在距离为  $k$  的最优通路.

证明:我们对  $k$  用归纳法进行证明.

1.  $k=1$  时, 依据定义 4 易知定理成立.
2. 假设  $k=m-1 (m \geq 2)$  时定理成立. 即对任意节点  $A, \text{MSPM}_A[m-1][i]=1 (0 \leq i \leq n-1)$  时, 则所有与  $A$  在第  $i$  位互异、同时与  $A$  具有  $m-1$  距离的节点均一定与  $A$  具有  $m-1$  距离最优通路;
3. 对  $k=m (m \geq 2)$ , 下面分  $A$  的第  $i$  条链路畅通与故障两种情形分别证明定理也同样成立: 为了方便描述, 用  $\Psi(A, j, \{a_s, \dots, a_t\}, \{a_p, \dots, a_q\})$  表示所有与  $A$  距离为  $j$  且第  $a_s, \dots, a_t$  位与其互异但第  $a_p, \dots, a_q$  位与其相同的节点所构成的集合; 依据归纳假设, 设  $\Gamma_j^i = \{\text{MSPM}_{\text{nei}(A, j)}[m-1][i]=1$  表示的所有与  $A$  距离为  $m$  且第  $i$  位与  $A$  的第  $i$  位互异的节点所构成的集合}.

1)  $A$  的第  $i$  条链路畅通时: 再分  $\lambda^i=1$  与  $\lambda^i=0$  两种情况来证明:

(1)  $\lambda^i=0 \Rightarrow \sum_{j=0}^{n-1} (b_j^i + c_j^i) > n - m$ , 设  $\text{MSPM}_{\text{nei}(A, i)}[m-1]$  中除第  $i$  位外的  $n-1$  位中的第  $l_1, \dots, l_s$  位为 1;

a. 若  $s > n - m \Rightarrow$  对  $A$  中的第  $l_1, \dots, l_s$  位保持与  $A$  相同而对其余至多  $m-1$  位取反所得到的节点与  $A$  的距离至多为  $m-1 \Rightarrow \Psi(A, m, \{\}, \{\}) \subseteq \bigcup_{j=1}^s (\Psi(A, m, \{l_j, i\}, \{\}))$ ; 而依据引理 1~引理

4 可知,  $\Psi(A, m, \{l_j, i\}, \{\}) \subseteq \Gamma_i^i \Rightarrow \bigcup_{j=1}^s (\Psi(A, m, \{l_j, i\}, \{\})) \subseteq \bigcup_{i=1}^s (\Gamma_i^i)$ , 依据归纳假设易知,

定理的结论成立;

b. 若  $s \leq n-m$ , 由定义 4 中的条件因子  $b_j^i, c_j^i$  的定义可知, 除了  $A$  的第  $i$  条链路  $nei(A, i)$  以外, 至少有  $A$  的  $n-m-s+1$  条链路  $nei(A, j_1), \dots, nei(A, j_{n-m-s+1})$  ( $j_t \notin \{l_1, \dots, l_s, i\}, t \in [1, n-m-s+1]$ ) 使得  $MSPM_{nei(A, j_t)}[m-1][i] = 1$  ( $t \in [1, n-m-s+1]$ ), 对  $A$  的除第  $l_1, \dots, l_s, j_1, \dots, j_{n-m-s+1}$  位以外的  $m-1$  个位全部取反所得到的节点与  $A$  的距离至多为  $m-1 \Rightarrow \Psi(A, m, \{i\}, \{\}) \subseteq \bigcup_{j=1}^s (\Psi(A, m, \{l_j, i\}, \{\})) \cup \bigcup_{t=1}^{n-m-s+1} (\Psi(A, m, \{j_t, i\}, \{\}))$ ; 而依据引理 1~引理 4 易知有:  $\Psi(A, m, \{l_j, i\}, \{\}) \subseteq \Gamma_i^{l_j}, \Psi(A, m, \{j_t, i\}, \{\}) \subseteq \Gamma_{j_t}^i \Rightarrow \bigcup_{j=1}^s (\Psi(A, m, \{l_j, i\}, \{\})) \cup \bigcup_{t=1}^{n-m-s+1} (\Psi(A, m, \{j_t, i\}, \{\})) \subseteq \bigcup_{t=1}^s (\Gamma_i^{l_t}) \cup \bigcup_{t=1}^{n-m-s+1} (\Gamma_{j_t}^i)$ , 由归纳假设可知, 定理的结论成立.

(2)  $\lambda^i = 1 \Rightarrow \sum_{j=0}^{n-1} (b_j^i + c_j^i) > n-m-1$ , 设  $MSPM_{nei(A, i)}[m-1]$  中除第  $i$  位以外的  $n-1$  位中的第  $l_1, \dots, l_s$  位为 1;

a. 若  $s > n-m$ , 仿照证明过程 3.1). (1). a 易知定理的结论成立;

b. 若  $s \leq n-m$ , 由定义 4 中的条件因子  $b_j^i, c_j^i$  的定义可知, 除  $A$  的第  $i$  条链路  $nei(A, i)$  外至少存在  $A$  的  $n-m-s$  条链路  $nei(A, j_1), \dots, nei(A, j_{n-m-s})$  ( $j_t \notin \{l_1, \dots, l_s, i\}, t \in [1, n-m-s]$ ) 使得  $MSPM_{nei(A, j_t)}[m-1][i] = 1$  ( $t \in [1, n-m-s]$ ); 而依据引理 1~引理 4 易知, 先对  $A$  的第  $i$  位取反, 然后对  $A$  的除第  $l_1, \dots, l_s, j_1, \dots, j_{n-m-s}, i$  位以外的  $m-1$  个位中任取  $m-1$  个位取反, 共得到 1 个与  $A$  距离为  $m$  且第  $i$  位与  $A$  的第  $i$  位互异的节点  $B \notin \bigcup_{t=1}^s (\Gamma_i^{l_t}) \cup \bigcup_{t=1}^{n-m-s} (\Gamma_{j_t}^i)$ ; 再由定义 4 中  $\lambda^i$  的定义  $\Rightarrow$  对  $A$  的所有除第  $l_1, \dots, l_s, j_1, \dots, j_{n-m-s}, i$  条链路以外的其他  $m-1$  条链路  $q_1, \dots, q_{m-1}$  的  $MSPM_{nei(A, q_t)}[m-1]$  ( $t \in [1, m-1]$ ) 的并中至少有 1 个位  $p_1$  为 1 且  $p_1 \notin \{l_1, \dots, l_s, j_1, \dots, j_{n-m-s}, i\}$ ; 而  $\Gamma_{q_1}^{p_1}$  的节点中不与  $\bigcup_{t=1}^s (\Gamma_i^{l_t}) \cup \bigcup_{t=1}^{n-m-s} (\Gamma_{j_t}^i)$  中的节点重复的个数共有  $C_{m-3}^{m-3} = 1$  个, 由于已证明只有 1 个与  $A$  距离为  $m$  且第  $i$  位与  $A$  的第  $i$  位互异的节点  $B \notin \bigcup_{t=1}^s (\Gamma_i^{l_t}) \cup \bigcup_{t=1}^{n-m-s} (\Gamma_{j_t}^i) \Rightarrow$  定理的结论成立.

2) 第  $i$  条链路故障时, 由定义 4 可知  $b_j^i = 0$  ( $0 \leq i \leq n-1$ ), 下面再分  $\lambda^i = 1$  与  $\lambda^i = 0$  两种情况来证明:

(1)  $\lambda^i = 0 \Rightarrow \sum_{j=0}^{n-1} c_j^i > n-m$ , 由定义 4 中的条件因子  $c_j^i$  的定义可知, 除了  $A$  的第  $i$  条链路  $nei(A, i)$  以外, 至少有  $A$  的  $n-m+1$  条链路  $nei(A, j_1), \dots, nei(A, j_{n-m+1})$  ( $j_t \neq i, t \in [1, n-m+1]$ ) 使得  $MSPM_{nei(A, j_t)}[m-1][i] = 1$  ( $t \in [1, n-m+1]$ ), 由引理 1~引理 4 可知, 对  $A$  的除第  $j_1, \dots, j_{n-m+1}$  位以外的至多  $m-1$  个位全部取反所得到的节点与  $A$  的距离至多为  $m-1$ , 而  $\bigcup_{t=1}^{n-m+1} (\Psi(A, m, \{j_t, i\}, \{\})) \subseteq \bigcup_{t=1}^{n-m+1} (\Gamma_{j_t}^i) \Rightarrow$  定理的结论成立.

(2)  $\lambda^i = 1 \Rightarrow \sum_{j=0}^{n-1} c_j^i > n-m-1$ , 由定义 4 中的条件因子  $c_j^i$  的定义可知, 除了  $A$  的第  $i$  条链路  $nei(A, i)$  以外, 至少有  $A$  的  $n-m$  条链路  $nei(A, j_1), \dots, nei(A, j_{n-m})$  ( $j_t \neq i, t \in [1, n-m]$ ) 使得  $MSPM_{nei(A, j_t)}[m-1][i] = 1$  ( $t \in [1, n-m]$ ), 易知先对  $A$  的第  $i$  位取反, 然后依据引理 1~引理 4 可知, 对  $A$  的除第  $j_1, \dots, j_{n-m}, i$  位以外的  $m-1$  个位任取  $m-1$  个位取反, 共得到 1 个与  $A$  距离为  $m$  且第  $i$  位与  $A$  的第  $i$  位互异的节点  $B \notin \bigcup_{t=1}^{n-m} (\Gamma_{j_t}^i)$ ; 再由定义 4 中  $\lambda^i$  的定义  $\Rightarrow$  对  $A$  的所有除第  $j_1, \dots, j_{n-m}, i$  条链路以外的其他  $m-1$  条链路  $q_1, \dots, q_{m-1}$  的  $MSPM_{nei(A, q_t)}[m-1]$  ( $t \in [1, m-1]$ ) 的并中至少有 1 个

位  $p_1$  为 1 且  $p_1 \notin \{j_1, \dots, j_{n-m}, i\}$ ; 而  $\Gamma_{q_t}^{p_1}$  的节点中不与  $\bigcup_{t=1}^{n-m} (\Gamma_{j_t}^i)$  中的节点重复的个数共有  $C_{m-3}^{m-3} = 1$  个(任意从除第  $j_1, \dots, j_{n-m}, i, p_1, q_t$  位之外的  $m-3$  位中取  $m-3$  位取反). 由于已证明只有 1 个与  $A$  距离为  $m$  且第  $i$  位与  $A$  的第  $i$  位互异的节点  $B \notin \bigcup_{t=1}^{n-m} (\Gamma_{j_t}^i) \Rightarrow$  定理的结论成立.  $\square$

**定理 2.** 若  $MSPM_A[k][i]=0(0 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq n)$ , 即  $MSPM_A$  的第  $k$  行第  $i$  列等于 0, 则至少有一个与  $A$  距离为  $k$  且第  $i$  位与  $A$  的第  $i$  位互异的节点和  $A$  之间不存在最优  $k$  距离通路.

证明: 由定理 1 可知, 若  $MSPM_A[k][i]=1(0 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq n)$ , 则节点  $A$  和所有与其距离为  $k$  且第  $i$  位与其第  $i$  位互异的节点之间一定存在距离为  $k$  的最优通路. 下面我们对  $k$  用归纳法证明定理 2 的结论成立.

1.  $k=1$  时, 依据定义 4 的定义易知定理成立.
2. 假设  $k=m-1(m \geq 2)$  时定理成立, 即对任意节点  $A, MSPM_A[m-1][i]=0(0 \leq i \leq n-1)$  时, 则至少有一个与  $A$  距离为  $m-1$  且第  $i$  位与  $A$  的第  $i$  位互异的节点与  $A$  之间不存在最优  $m-1$  距离通路;
3. 对  $k=m(m \geq 2)$ , 下面分  $A$  的第  $i$  条链路畅通与故障两种情形分别证明定理也同样成立:

(1)  $A$  的第  $i$  条链路畅通时, 再分  $\lambda^i=1$  与  $\lambda^i=0$  两种情况来证明:

1)  $\lambda^i=0 \Rightarrow \sum_{j=0}^{n-1} (b_j^i + c_j^i) \leq n-m$ , 设  $MSPM_{nei(A,i)}[m-1]$  中除第  $i$  位以外的  $n-1$  位中的第  $l_1, \dots, l_s$  位为 1(显然  $s \leq n-m$ ); 由定义 4 中的条件因子  $b_j^i, c_j^i$  的定义可知, 除了  $A$  的第  $i$  条链路  $nei(A, i)$  以外, 至多只有  $A$  的  $n-m-s$  条链路  $nei(A, j_1), \dots, nei(A, j_{n-m-s})(j_t \notin \{l_1, \dots, l_s, i\}; t \in [1, n-m-s])$  使得  $MSPM_{nei(A, j_t)}[m-1][i]=1(t \in [1, n-m-s])$ , 不妨设有  $A$  的  $k$  条链路满足上述条件, 则显然  $k \leq n-m-s$ . 由引理 1~引理 4 易知, 对  $A$  的除第  $l_1, \dots, l_s, j_1, \dots, j_k$  位以外的  $n-k-s \geq m$  个位中的任意  $m$  个位取反得到的与  $A$  距离为  $m$  且第  $i$  位与  $A$  的第  $i$  位互异的节点均不属于  $\bigcup_{t=1}^s (\Gamma_{l_t}^i) \cup \bigcup_{t=1}^k (\Gamma_{j_t}^i) \Rightarrow$  这些节点与  $A$  距离为  $m$  但不存在  $m$  距离最优通路.

2)  $\lambda^i=1 \Rightarrow \sum_{j=0}^{n-1} (b_j^i + c_j^i) \leq n-m-1$ , 设  $MSPM_{nei(A,i)}[m-1]$  中除第  $i$  位以外的  $n-1$  位中的第  $l_1, \dots, l_s$  位为 1(显然  $s \leq n-m-1$ ); 由定义 4 中的条件因子  $b_j^i, c_j^i$  的定义可知, 除了  $A$  的第  $i$  条链路  $nei(A, i)$  以外, 至多只有  $A$  的  $n-m-1-s$  条链路  $nei(A, j_1), \dots, nei(A, j_{n-m-1-s})(j_t \notin \{l_1, \dots, l_s, i\}; t \in [1, n-m-1-s])$  使得  $MSPM_{nei(A, j_t)}[m-1][i]=1(t \in [1, n-m-1-s])$ , 不妨设有  $A$  的  $k$  条链路满足上述条件, 则显然  $k \leq n-m-1-s$ . 易知先对  $A$  的第  $i$  位取反, 再对  $A$  的除第  $l_1, \dots, l_s, j_1, \dots, j_k, i$  位以外的  $n-k-s-1 \geq m$  个位中的任意  $m-1$  个位取反所得到的  $C_{n-k-s-1}^{m-1}$  个与  $A$  距离为  $m$  且第  $i$  位与  $A$  的第  $i$  位互异的节点不属于  $\bigcup_{t=1}^s (\Gamma_{l_t}^i) \cup \bigcup_{t=1}^k (\Gamma_{j_t}^i)$ ; 再由定义 4 中  $\lambda^i$  的定义  $\Rightarrow$  对  $A$  的所有除第  $l_1, \dots, l_s, j_1, \dots, j_k, i$  条链路的其他  $n-k-s-1 \geq m$  条链路  $q_1, \dots, q_{n-k-s-1}$  的  $MSPM_{nei(A, q_t)}[m-1](t \in [1, n-k-s-1])$  的并中至多有  $m$  个位  $p_1, \dots, p_m$  为 1 且  $p_t \notin \{l_1, \dots, l_s, j_1, \dots, j_k, i\}(t \in [1, m])$ ; 而  $\Gamma_{q_t}^{p_1}$  中的节点中不与  $\bigcup_{t=1}^s (\Gamma_{l_t}^i) \cup \bigcup_{t=1}^k (\Gamma_{j_t}^i)$  中的节点重复的个数共有  $C_{n-k-s-3}^{m-3}$  个, 再对另外某个  $t' \in [1, m]$ ,  $\Gamma_{q_{t'}}^{p_2}$  中的节点中不与  $\bigcup_{t=1}^s (\Gamma_{l_t}^i) \cup \bigcup_{t=1}^k (\Gamma_{j_t}^i) \cup \Gamma_{q_t}^{p_1}$  中的节点重复的个数至多有  $C_{n-k-s-4}^{m-3}$  个, ..., 依此类推, 故  $m$  个位  $p_1, \dots, p_m$  为 1 共记录了与  $A$  距离为  $m$  且第  $i$  位与  $A$  的第  $i$  位互异的节点不重复的个数至多为  $C_{n-k-s-3}^{m-3} + \dots + C_{n-k-s-4}^{m-3} = C_{n-k-s-2}^{m-2} < C_{n-k-s-1}^{m-1}$  个(因为  $k \leq n-m-1-s$ ); 而已证明共有  $C_{n-k-s-1}^{m-1}$  个与  $A$  距离为  $m$  且第  $i$  位与  $A$  的第  $i$  位互异的节点不属于  $\bigcup_{t=1}^s (\Gamma_{l_t}^i) \cup \bigcup_{t=1}^k (\Gamma_{j_t}^i) \Rightarrow$  至少有一个与  $A$  距离为  $m$  且第  $i$  位与  $A$  的第  $i$  位互异的节点和  $A$  之间不存在最优  $m$  距离通路.

(2)  $A$  的第  $i$  条链路故障时,由定义 4 可知,  $b_j^i=0(0 \leq i \leq n-1)$ ,下面再分  $\lambda^i=1$  与  $\lambda^i=0$  来证明:

- 1)  $\lambda^i=0 \Rightarrow \sum_{j=0}^{n-1} c_j^i \leq n-m$ ,由定义 4 中的条件因子  $c_j^i$  的定义可知,除了  $A$  的第  $i$  条链路  $nei(A,i)$  以外,至多只有  $A$  的  $n-m$  条链路  $nei(A, j_1), \dots, nei(A, j_{n-m}) (j_t \neq i, t \in [1, n-m])$  使得  $MSPM_{nei(A, j_t)}[m-1][i]=1 (t \in [1, n-m])$ ,不妨设有  $A$  的  $k$  条链路满足上述条件,则显然  $k \leq n-m$ .由引理 1~引理 4 可知,对  $A$  的除第  $j_1, \dots, j_k$  位以外的  $n-k \geq m$  个位中任意  $m$  个位取反得到的与  $A$  距离为  $m$  且第  $i$  位与  $A$  的第  $i$  位互异的节点不属于  $\bigcup_{t=1}^k (\Gamma_{j_t}^i) \Rightarrow$  至少有一个与  $A$  距离为  $m$  且第  $i$  位与  $A$  的第  $i$  位互异的节点与  $A$  之间不存在最优  $m$  距离通路.
- 2)  $\lambda^i=1 \Rightarrow \sum_{j=0}^{n-1} c_j^i \leq n-m-1$ ,由定义 4 中的条件因子  $c_j^i$  的定义可知,除了  $A$  的第  $i$  条链路  $nei(A,i)$  以外,至多只有  $A$  的  $n-m-1$  条链路  $nei(A, j_1), \dots, nei(A, j_{n-m-1}) (j_t \neq i, t \in [1, n-m-1])$  使得  $MSPM_{nei(A, j_t)}[m-1][i]=1 (t \in [1, n-m-1])$ ,不妨设有  $A$  的  $k$  条链路满足上述条件,则显然  $k \leq n-m-1$ .易知先对  $A$  的第  $i$  位取反,再对  $A$  的除第  $j_1, \dots, j_k, i$  位以外的  $n-k-1 \geq m$  个位中任取  $m-1$  个位取反所得到的  $C_{n-k-1}^{m-1}$  个与  $A$  距离为  $m$  且第  $i$  位与  $A$  的第  $i$  位互异的节点不属于  $\bigcup_{t=1}^k (\Gamma_{j_t}^i)$ ;再由定义 4 中  $\lambda^i$  的定义  $\Rightarrow$  对  $A$  的所有除第  $j_1, \dots, j_k, i$  条链路以外的其他  $n-k-1 \geq m$  条链路  $q_1, \dots, q_{n-k-1}$  的  $MSPM_{nei(A, q_t)}[m-1] (t \in [1, n-k-1])$  的并中有  $m$  个位  $p_1, \dots, p_m$  为 1,且  $p_t \notin \{j_1, \dots, j_k, i\} (t \in [1, m])$ ;而  $\Gamma_{q_t}^{p_t}$  中的节点中不与  $\bigcup_{t=1}^k (\Gamma_{j_t}^i)$  中的节点重复的个数共有  $C_{n-k-3}^{m-3}$  个;再对另外某个  $t' \in [1, m]$ ,  $\Gamma_{q_{t'}}^{p_{t'}}$  中的节点中不与  $\bigcup_{t=1}^k (\Gamma_{j_t}^i) \cup \Gamma_{q_t}^{p_t}$  中的节点重复的个数共有  $C_{n-k-4}^{m-3}$  个, ..., 依此类推,故  $m$  个位  $p_1, \dots, p_m$  为 1 共记录了与  $A$  距离为  $m$  且第  $i$  位与  $A$  的第  $i$  位互异的节点不重复的个数至多为  $C_{n-k-3}^{m-3} + \dots + C_{m-3}^{m-3} = C_{n-k-2}^{m-2} < C_{n-k-1}^{m-1}$  个(因为  $k \leq n-m-1$ );而已证明有  $C_{n-k-1}^{m-1}$  个与  $A$  距离为  $m$  且第  $i$  位与  $A$  的第  $i$  位互异的节点不属于  $\bigcup_{t=1}^{n-m-1} (\Gamma_{j_t}^i) \Rightarrow$  至少有一个与  $A$  距离为  $m$  且第  $i$  位与  $A$  的第  $i$  位互异的节点与  $A$  之间不存在最优  $m$  距离通路  $\Rightarrow$  定理的结论成立. □

**定理 3.** 对于  $n$  维超立方体  $Q_n$  中的节点  $A, MSPM_A[k][j]=1(1 \leq k \leq n, 0 \leq j \leq n-1) \Leftrightarrow$  节点  $A$  和所有与其距离为  $k$  且第  $j$  位与其第  $j$  位互异的节点之间存在距离为  $k$  的最优通路.

证明:(1) 依据定理 1 易知,  $MSPM_A[k][j]=1 \Rightarrow$  节点  $A$  和所有与其距离为  $k$  且第  $j$  位与其第  $j$  位互异的节点之间存在距离为  $k$  的最优通路;

(2) 节点  $A$  和所有与其距离为  $k$  且第  $j$  位与其第  $j$  位互异的节点之间存在距离为  $k$  的最优通路,依据定理 2,若  $MSPM_A[k][j]=0 \Rightarrow$  至少有一个与  $A$  距离为  $k$  且第  $j$  位与  $A$  的第  $j$  位互异的节点与  $A$  之间不存在最优  $k$  距离通路  $\Rightarrow$  矛盾.故  $MSPM_A[k][j]=1$ . □

由定义 4 还可以很容易地推出下列判断定理,限于篇幅,证明从略.

**推论 1.** 若  $A$  的第  $j$  条链路畅通且  $MSPM_{nei(A, j)}[k-1]$  中除第  $j$  位外至少有  $n-k+1$  个位为 1,则  $MSPM_A[k][j]=1$ .

**推论 2.** 若  $A$  除第  $j$  条链路以外至少有  $n-k+1$  条链路畅通,且它们的  $MSPM_A[k-1]$  均满足  $MSPM_A[k-1][j]=1$ ,则  $MSPM_A[k][j]=1$ .

再由定义 4 及文献[9,10]中的  $OPM_A, EOPM_A$  的定义可知,  $MSPM_A$  的定义中条件因子  $c_j^i, \lambda^i (0 \leq i, j \leq n-1)$  同时为 0 时即可推导出  $OPM_A, EOPM_A$  成立,因此  $MSPM_A$  是  $OPM_A, EOPM_A$  的最大扩展.

### 1.3 MSPMs与SVs,ESVs,OPMs,EOPMs数据对比示例

表 1 列出了图 1 所示的一个有故障的四维超立方体中节点 1000,0110,1110,1100,0000 的 SVs,ESVs,OPMs, EOPMs, MSPMs 对比数据.

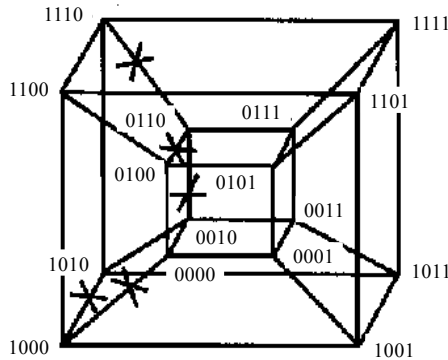


Fig.1 A 4-D hypercube with fault links

图 1 一个有故障的三维超立方体

Table 1 Data of part of nodes in Fig.1 for SVs, ESVs, OPMs, EOPMs and MSPMs

表 1 图 1 部分节点的 SVs,ESVs,OPMs,EOPMs 和 MSPMs 数据

	Node 1000	Node 0110	Node 1110	Node 1100	Node 0000
SVs	(0001)	(0001)	(0001)	(1001)	(0001)
ESVs	(0001)	(0001)	(0101)	(1011)	(0011)
OPMs	[0101]	[0001]	[0111]	[1111]	[0111]
	[0000]	[0000]	[1001]	[0101]	[1001]
	[0001]	[0000]	[1111]	[1111]	[1111]
	[1111]	[1111]	[1111]	[1111]	[1111]
EOPMs	[0101]	[0001]	[0111]	[1111]	[0111]
	[0101]	[0001]	[1111]	[0101]	[1001]
	[0001]	[0000]	[1111]	[1111]	[1111]
	[1111]	[1111]	[1111]	[1111]	[1111]
MSPMs	[0101]	[0001]	[0111]	[1111]	[0111]
	[0101]	[0001]	[1111]	[0101]	[1001]
	[0001]	[0001]	[1111]	[1111]	[1111]
	[1111]	[1111]	[1111]	[1111]	[1111]

由表 1 的结果可以看出,在节点 0110 处,按照 OPM<sub>0110</sub>[3]=(0000),EOPM<sub>0110</sub>[3]=(0000)的定义,它们未能反映节点 0110 和与其 Hamming 距离为 3 的节点 1000,1011,1101,0001 之间最优通路的存在.而按照 MSPM<sub>0110</sub>[3]=(0001)的定义,它反映了节点 0110 和节点 1011,1101,0001 之间 3 距离最优通路的存在,这与节点 0110 和与其 Hamming 距离为 3 的节点 1011,1101,0001 之间实际上存在最优通路的事实相符.

## 2 路由算法与性能分析

### 2.1 路由算法

我们可以把 MSPM<sub>A</sub>[k] 看成一个位串,用以判断与 A 距离为 k 的任一节点 B 与 A 之间是否存在最优通路.方法是寻找一个 j,使其满足 MSPM<sub>A</sub>[k][j]=1 且 REL<sub>j</sub>(A,B)=1.若 j 存在,则说明 B 与 A 之间有最优通路,否则,无法确定 B 与 A 之间是否存在最优通路.故此我们引入同文献[9]的类似操作:

$$OPSearch(A,B)=MSPM_A[Dist(A,B)]\&REL(A,B).$$

它的非 0 结果表示上述要找的 j 存在,因此 B 与 A 之间存在最优通路.当节点 A 需要把消息沿最优通路传递给节点 B 时,A 应该在它的邻节点中寻找满足 OPSearch(C,B)≠0,Dist(C,B)=Dist(A,B)-1 的邻节点 C.只要 OPSearch(A,B)≠0,则满足此条件的 C 肯定存在,因此 A 就可以将消息传递到该邻节点 C,依次类推,使得该消息一直沿最优通路传递到 B.

显然文献[9]的定理 1 的结论:“对于任意两个邻节点 A 和 B,OPSearch(A,B)≠0 时,A 与 B 之间存在最优通路”,对于极大安全通路矩阵同样适用,本文不再证明.



极大安全通路矩阵记录了系统中的最优通路信息,下一步我们需要建立基于极大安全通路矩阵(MSPMs)的容错路由算法,并利用它来帮助我们将信息尽量沿最优通路传递.该算法的基本目标如下:

- (1) 在  $O(n)$  的时间内判定出源节点和目标节点之间是否存在最优通路;
- (2) 若它们之间存在最优通路,则应将消息传递到合适的邻节点,使消息继续沿最优通路(长度为  $\text{Dist}(\text{sour}, \text{dest})$ )传递;
- (3) 若它们之间不存在最优通路,则应该把消息传递到合适的邻节点,使其沿次最优通路(长度为  $\text{Dist}(\text{sour}, \text{dest})+2$ )传递.

能够达到上述目标的基于极大安全通路矩阵(MSPMs)的容错路由算法描述如下:

```

Algorithm MSPM_Route{
    If ( $\text{cur}==\text{dest}$ ) Send to node and return (SUCCESS);
    For( $\text{link}=0;\text{link}<n;\text{link}++$ )
        //寻找最优通路(长度为  $\text{Dist}(\text{sour},\text{dest})$ )
        {If ( $\text{OPSearch}(\text{nei}(\text{cur},\text{link}),\text{dest})!=0$  and  $\text{Dist}(\text{nei}(\text{cur},\text{link}),\text{dest})==\text{Dist}(\text{cur},\text{dest})-1$ ){
            Send message with this link;
            Return (SUCCESS);}}
    For ( $\text{link}=0;\text{link}<n;\text{link}++$ ){
        //寻找次最优通路(长度为  $\text{Dist}(\text{sour},\text{dest})+2$ )
        If ( $\text{OPSearch}(\text{nei}(\text{cur},\text{link}),\text{dest})!=0$  and  $\text{Dist}(\text{nei}(\text{cur},\text{link}),\text{dest})==\text{Dist}(\text{cur},\text{dest})+1$ ){
            Send message with this link;
            Return (SUCCESS);}}
    Return (FALSE)}

```

## 2.2 性能分析与比较

基于以上这几种算法,下面给出了图1中7个存在链路故障节点的最优通路数及系统中实际存在的最优通路数,见表2和表3.

**Table 2** Comparative data of part of nodes in Fig.1 for ESVs, OPMs, EOPMs and MSPMs Algorithms

表2 图1部分节点的ESVs,OPMs,EOPMs和MSPMs算法的比较数据

	Optimal paths with distance 2				
	Optimal paths existed actually	Optimal paths recorded by ESVs	Optimal paths recorded by OPMs	Optimal paths recorded by EOPMs	Optimal paths recorded by MSPMs
Node 1000	5	0	0	5	5
Node 0110	3	0	0	3	3
Node 1110	6	6	5	6	6
Node 1100	5	0	5	5	5
Node 0000	5	0	5	5	5
Node 0010	5	0	5	5	5
Node 0100	6	6	5	6	6
Total	35	12	25	35	35

**Table 3** Comparative data of part of nodes in Fig.1 for ESVs, OPMs, EOPMs and MSPMs Algorithms

表3 图1部分节点的ESVs,OPMs,EOPMs和MSPMs算法的比较数据

	Optimal paths with distance 3				
	Optimal paths existed actually	Optimal paths recorded by ESVs	Optimal paths recorded by OPMs	Optimal paths recorded by EOPMs	Optimal paths recorded by MSPMs
Node 1000	3	0	3	3	3
Node 0110	3	0	0	0	3
Node 1110	4	0	4	4	4
Node 1100	4	4	4	4	4
Node 0000	4	4	4	4	4
Node 0010	4	0	4	4	4
Node 0100	4	0	4	4	4
Total	26	8	23	23	26

从图1及表2、表3可以看出如下事实:MSPMs记录的最优通路信息包含了ESVs,OPMs,EOPMs所记录

的最优通路信息.从表 2 所列示的 7 个节点中可以看出,对距离为 2 的最优通路数,ESVs,OPMs,EOPMs,MSPMs 的记录数分别占实际存在数的 34%,71%,100%,100%;在表 3 所列示的 7 个节点中,对距离为 3 的最优通路数,ESVs,OPMs,EOPMs,MSPMs 的记录数分别占实际存在数的 30%,88%,88%,100%.因此,MSPMs 与 OPMs,EOPMs 相比,具有更好的记录最优通路的性能.

下面再分别比较 3 种算法的时间复杂度.由第 2.4 节、第 3.1 节中给出的 MSPMs 的赋值与路由算法及文献[9,10]可知,MSPMs,OPMs,EOPMs 的路由算法一致,因此三者的路由时间复杂度是相同的;而对三者的赋值时间复杂度,由第 3.1 节 MSPMs 的赋值算法可知,MSPMs 中每个节点需要  $n-1$  轮邻节点之间的信息交换才能完成最终赋值,而在每一轮中,各节点需要计算来自其  $n$  个邻节点发送过来的  $n$  维链路状态向量,因此 MSPMs 的赋值算法的总时间复杂度为  $O(n^3)$  bit;再由文献[9,10]易知,OPMs,EOPMs 中每个节点也分别需要  $n-1$  轮邻节点之间的信息交换才能完成最终赋值,而在每一轮中,各节点同样需要计算来自其  $n$  个邻节点发送过来的  $n$  维链路状态向量,因此时间复杂度也分别均为  $O(n^3)$  bit;故算法 MSPMs 的总时间复杂度与算法 OPMs,EOPMs 的总时间复杂度相同.

**定理 4.** MSPMs 是 SVs,ESVs,OPMs 以及 EOPMs 的最大扩展.

证明:由定理 3 及文献[8~10]中 SVs,ESVs,OPMs 以及 EOPMs 的定义易知,定理的结论成立.  $\square$

### 3 结 语

本文研究  $n$  维超立方体结构的多处理机系统中存在链路故障情况下的容错路由问题,提出了极大安全通路矩阵(MSPMs)的概念,并基于此概念,给出了建立 MSPMs 及其容错路由算法.与已有的基于最优通路矩阵及扩展最优通路矩阵概念的容错路由算法相比,基于 MSPMs 的容错路由算法具有更好的性能,能够记录更多的最优通路,是基于 OPMs 及 EOPMs 的容错路由算法的极大扩展,从而使得系统在故障数量较多时仍能有效地把绝大多数源、目的节点之间有最优通路的信息沿最优通路安全、高效地进行传递.如何求解用非安全向量或非安全矩阵的形式来记录最优通路的上界,以及如何结合概率的方法来研究超立方体网络中的容错性问题,是我们下一步将要进行的工作.

### References:

- [1] Al-Sadi J, Day K, Ould-Khaoua M. Fault-Tolerant routing in hypercubes using probability vectors. *Parallel Computing*, 2001, 27(10):1381~1399.
- [2] Al-Sadi J, Day K, Ould-Khaoua M. Probability-Based fault-tolerant routing in Hypercubes. *The Computer Journal*, 2001,44(5): 368~373.
- [3] Wang Guo-Jun, Chen Jian-Er, Chen Song-Qiao. Designing efficient routing algorithms on hypercube networks with a large number of faulty nodes. *Chinese Journal of Computers*, 2001,24(9):909~916 (in Chinese with English abstract).
- [4] Chen Jian-Er, Wang Guo-Jun, Chen Song-Qiao. Locally subcube\_connected hypercube networks: Theoretical analysis and experimental results. *IEEE Trans. on Computers*, 2002,51(5):530~540.
- [5] Al-Sadi J, Day K, Ould-Khaoua M. Unsafety vectors: A new fault-tolerant routing for the binary  $n$ -cube. *Journal of Systems Architecture*, 2002,47(9):783~793.
- [6] Al-Sadi J, Day K, Ould-Khaoua M. Unsafety vectors: A new fault-tolerant routing for  $k$ -ary  $n$ -cubes. *Microprocessors and Microsystems*, 2001,25(5):239~246.
- [7] Wu J. Adaptive fault-tolerant routing in cube-based multicomputers using safety vectors. *IEEE Trans. on Parallel and Distributed Systems*, 1998,9(4):321~334.
- [8] Gao F, Li ZC, Min YH, Wu J. A fault-tolerant routing strategy based on extended safety vectors in hypercube multicomputers. *Chinese Journal of Computers*, 2000,23(3):248~254 (in Chinese with English abstract).
- [9] Gao F, Li ZC. Fault-Tolerant routing in hypercube multicomputers using optimal path matrices. *Chinese Journal of Computers*, 2000,23(3):242~247 (in Chinese with English abstract).
- [10] Tian SH. A fault-tolerant routing strategy based on extended optimal path matrices in hypercube multi-computers. *Chinese Journal of Computers*, 2002,25(1):87~92 (in Chinese with English abstract).

**附中文参考文献:**

- [3] 王国军,陈建二,陈松乔.具有大量错误节点的超立方体网络的高效路由算法的设计与讨论.计算机学报,2001,24(9):909~916.
- [8] 高峰,李忠诚,闵应骅,吴杰.超立方体多处理机系统中基于扩展安全向量的容错路由.计算机学报,2000,23(3):248~254.
- [9] 高峰,李忠诚.用最优通路矩阵实现超立方体多处理机系统的容错路由.计算机学报,2000,23(3):242~247.
- [10] 田绍槐.超立方体多处理机系统中基于扩展最优通路矩阵的容错路由.计算机学报,2002,25(1):87~92.

---

### 敬告作者

《软件学报》创刊以来,蒙国内外学术界厚爱,收到许多高质量的稿件,其中不少在发表后读者反映良好,认为本刊保持了较高的学术水平.但也有一些稿件因不符合本刊的要求而未能通过审稿.为了帮助广大作者尽快地把他们的优秀研究成果发表在我刊上,特此列举一些审稿过程中经常遇到的问题,请作者投稿时尽量予以避免,以利大作的发表.

1. 读书偶有所得,即匆忙成文,未曾注意该领域或该研究课题国内外近年来的发展情况,不引用和不比较最近文献中的同类结果,有的甚至完全不列参考文献.

2. 做了一个软件系统,详尽描述该系统的各个方面,如像工作报告,但采用的基本上是成熟技术,未与国内外同类系统比较,没有指出该系统在技术上哪几点比别人先进,为什么先进.一般来说,技术上没有创新的软件系统是没有发表价值的.

3. 提出一个新的算法,认为该算法优越,但既未从数学上证明比现有的其他算法好(例如降低复杂性),也没有用实验数据来进行对比,难以令人信服.

4. 提出一个大型软件系统的总体设想,但很粗糙,而且还没有(哪怕是部分的)实现,很难证明该设想是现实的、可行的、先进的.

5. 介绍一个现有的软件开发方法,或一个现有软件产品的结构(非作者本人开发,往往是引进的,或公司产品),甚至某一软件的使用方法.本刊不登载高级科普文章,不支持在论文中引进广告色彩.

6. 提出对软件开发或软件产业的某种观点,泛泛而论,技术含量少.本刊目前暂不开办软件论坛,只发表学术文章,但也欢迎材料丰富,反映现代软件理论或技术发展,并含有作者精辟见解的某一领域的综述文章.

7. 介绍作者做的把软件技术应用于某个领域的工作,但其中软件技术含量太少,甚至微不足道,大部分内容是其他专业领域的技术细节,这类文章宜改投其他专业刊物.

8. 其主要内容已经在其他正式学术刊物上或在正式出版物中发表过的文章,一稿多投的文章,经退稿后未作本质修改换名重投的文章.

本刊热情欢迎国内外科技界对《软件学报》踊跃投稿.为了和大家一起办好本刊,特提出以上各点敬告作者.并且欢迎广大作者和读者对本刊的各个方面,尤其是对论文的质量多多提出批评建议.