

一种分层马尔可夫图像模型及其推导算法*

汪西莉^{1,2+}, 刘芳³, 焦李成¹

¹(西安电子科技大学 雷达信号处理国家重点实验室,陕西 西安 710071)

²(陕西师范大学 计算机学院,陕西 西安 710062)

³(西安电子科技大学 计算机学院,陕西 西安 710071)

A Hierarchical Markov Image Model and Its Inference Algorithm

WANG Xi-Li^{1,2+}, LIU Fang³, JIAO Li-Cheng¹

¹(National Key Laboratory of Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071, China)

²(School of Computer Science, Shanxi Normal University, Xi'an 710062, China)

³(School of Computer Science, Xidian University, Xi'an 710071, China)

+Corresponding author: Phn: 86-29-8520611, E-mail: wxl_mm@163.net

<http://www.xidian.edu.cn>

Received 2002-09-11; Accepted 2002-12-16

Wang XL, Liu F, Jiao LC. A hierarchical Markov image model and its inference algorithm. *Journal of Software*, 2003,14(9):1558~1563.

<http://www.jos.org.cn/1000-9825/14/1558.htm>

Abstract: The noniterative algorithm of discrete hierarchical MRF (Markov random field) model has much lower computing complexity and better result than its iterative counterpart of noncausal MRF model, since it has causality property between layers. A new model based on the hierarchical MRF—half tree model is proposed for only one image can be obtained in image segmentation, whose MPM (maximizer of the posterior marginals) algorithm is inferred too. The proposed model not only inherits the advantages of general hierarchical MRF model but also does better: it makes large image more tractable within much less time, prevents data underflow appeared in computing, and alleviates the block artifacts occurred in hierarchical models. It is especially fit for large scale images.

Key words: discrete hierarchical Markov random field; half tree model; noniterative algorithm; iterative algorithm; maximizer of the posterior marginals (MPM)

摘要: 离散分层马尔可夫随机场(MRF)模型由于层间具有了因果性,因而其非迭代的推导算法比非因果的马尔可夫随机场模型的迭代算法复杂度低得多,结果更精确.针对图像分割问题中观测数据有限的情况,提出了一种新的基于离散分层 MRF 的半树模型,推导出了它的最大后验边缘概率(MPM)算法.半树模型不仅继承了一般分层模型快速、误分类少的优点,还避免了计算中遇到的数值下溢问题,减轻了分层模型带来的块现象,尤其适合大幅面图像的处理.

* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant Nos.60133010, 60073053 (国家自然科学基金); the National Research Foundation for the Doctoral Program of Higher Education of China (国家教育部博士点基金)

第一作者简介: 汪西莉(1969—),女,陕西西安人,博士生,副教授,主要研究领域为智能信息处理,模式识别.

关键词: 离散分层马尔可夫随机场;半树模型;非迭代算法;迭代算法;最大后验边缘概率

中图法分类号: TP391 文献标识码: A

离散 MRF(Markov random field)模型是贝叶斯图像分割中最常用的工具,其中非因果的 MRF 将图像中相邻像素的空间交互建模为基于平面网格上的 MRF,通过迭代的算法将图像的局部信息逐步传递到整个图像,以求得分割标号的最大后验概率(maximum a posteriori,简称 MAP)或最大后验边缘概率(maximizer of the posterior marginals,简称 MPM)估计.这种统计模型所具有的良好理论背景及结果使其得到了广泛的应用,但迭代算法的计算量相当大,且还会随着图像尺寸的增大或噪声的增多而增加,另外还没有考虑模型参数的估计.

近年来提出的分层 MRF 模型(或称因果 MRF、多尺度 MRF 模型)很引人注目.该模型将图像建模为若干层(又称尺度)的 MRF,在层与层之间建立因果关系,这种因果关系一方面与图像的多分辨率一致,另一方面将平面网格上信息的迭代扩散转换为信息在不同层次间的传递,从而得到类似于马尔可夫链的非迭代的前向、后向算法.很多学者对连续的和离散的因果模型进行了研究^[1-5],提出了一些推导算法,在图像领域将其用于图像的重建、去噪、分割等.理论和实验结果说明,这种因果模型抓住了图像的性质,基于因果性的信息传递得到了更精确的统计结果,非迭代的推导算法大大减少了计算量.

离散分层 MRF 在实现时遇到了因概率值过小,计算机精度不够而导致下溢的问题,因此必须在计算中采取一些办法,另外,还存在大画面图像层次多过于繁琐等问题,为此我们提出了一种新的分层模型,称为半树模型,并给出了它的 MPM 算法.这种模型具有和传统的分层模型同样的特点,同时又避免了计算中的下溢问题,使大画面图像的处理更快,分割结果更平滑.最后给出了对人工合成图像和 SAR 图像分割的结果及分析.

1 分层马尔可夫图像模型及其性质

令观测图像对应的随机场为 Y ,它位于 2 维网格系统 S^n 中,对于所采用的灰度图像来说, Y 的取值 $y \in \Omega_Y$ 要被分割成具有各自统计特性的 M 个不同的类. X 是不可观测的随机场, X 中任意像素的取值 $x \in A, A = \{1, 2, \dots, M\}$. X 由多层随机场组成,记为 X^0, X^1, \dots, X^n , X^0 是最上层,只有一个节点,对应于最粗糙的尺度,最下层 X^n 的大小和 Y 相同,对应于最精细的尺度. X^n 的每一像素代表 Y 中对应像素所属类的标号,图像分割就是要确定图像中各像素类的标号. X^i 位于网格 S^i 中, X^i 中的一个像素对应于 X^{i+1} 中的 4 个像素,因此每层的像素数是上一层的 4 倍.分层 MRF 形成了四叉树结构,如图 1 所示.

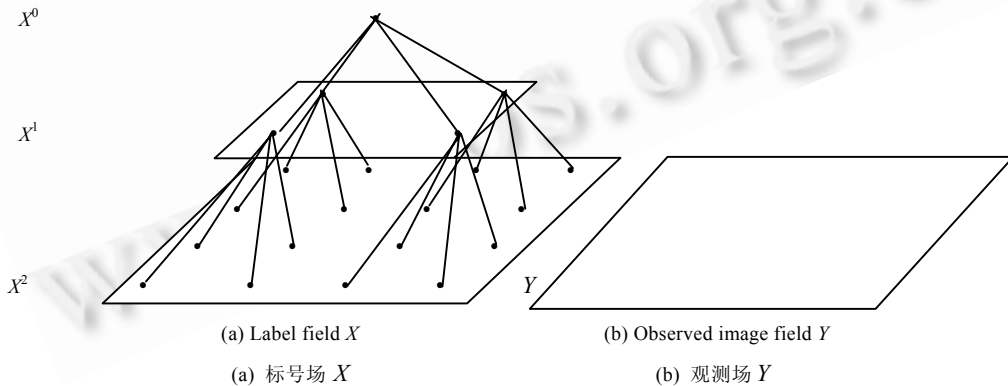


Fig.1 Hierarchical MRF image model

图 1 分层 MRF 图像模型

任意节点 $x^s, s \in S^1, \dots, S^{n-1}$, 都有 1 个父节点和 4 个子节点,分别记为 $x_{p(s)}, x_{c(s)}$.最上层的一个节点没有父节点,称为根节点,最下层的节点没有子节点,称为叶子节点.文中将这一模型也称为完整的树模型.已有文献中的分层 MRF 模型均指这种模型.

用条件分布 $P(Y = y | X = x)$ (简称 $P(y | x)$) 来描述观测数据对标号的依赖性,用先验分布 $P(X = x)$ (简称

$P(x)$ 来描述关于分割的先验信息,因此可根据贝叶斯理论求得 X 的后验分布.

分层模型具有如下一些重要的性质^[3-5],它们是后面进行推导必不可少的条件:

(1) 尺度间具有马尔可夫性质.随机场从上到下形成了马尔可夫链,即 X^i 的分布只依赖于 X^{i-1} ,与其他更粗糙的尺度无关,这是因为 X^{i-1} 已经包含了所有位于其上层的尺度所含有的信息.

(2) 随机场像素的条件独立性.若 X^i 中像素的父节点已知,则 X^i 中的像素彼此独立.这一性质使我们不必再考虑平面网格中相邻像素间的关系,而转为研究尺度间相邻像素(即父子节点)间的关系.

(3) 设在给定 X^n 的情况下, Y 中的像素彼此独立.

(4) 可分离性.若给定任一节点 x_s ,则以其各子节点为根的子树所对应的变量相互独立.

根据贝叶斯公式和上述性质, X,Y 的联合分布具有如下形式:

$$P(x, y) = P(x^0) \prod_{s \in S^n} P(y_s | x_s) \prod_{i=1}^n P(x^i | x^{i-1}).$$

分层 MRF 模型与图像分割中常用的非因果 MRF 模型的不同之处在于,这里的标号场 X 是由多层随机场构成的树型结构,而不只是一个随机场.分层模型所具有的上述性质使得推导出非迭代的计算公式成为可能.

2 半树模型

从只有一个节点的根到和图像大小一致的叶子节点,建立了完整的四叉树模型,各层间的马尔可夫链的因果关系使我们可以由非迭代的推导过程快速计算出 X 的最大后验概率或后验边缘概率.

完整的四叉树模型也存在一些问题.(1) 因概率值过小,计算机的精度难以保障而出现下溢,若层次多,这一问题更为突出.虽然可以通过取对数的方法将接近于 0 的小值转换成大的负值,但若层次过多、概率值过小,该方法也难以奏效,且为了这些转换所采用的技巧又增加了不少计算量.(2) 当图像较大而导致层次较多时,逐层的计算甚为繁琐,下溢现象肯定会出现,存储中间变量也会占用大量空间,在时间、空间上都有更多的开销.(3) 分层模型存在块效应,即区域边界可能出现跳跃,因为在该模型中,同一层随机场中相邻的像素不一定有一个父节点,同一层的相邻像素间又没有交互,从而可能出现边界不连续的现象.

为了解决这些问题,我们提出一种新的分层 MRF 模型——半树模型,其结构和图 1 类似,仍然是四叉树,只是层数比完整的四叉树大大减少,相当于将完整的四叉树截为两部分,只取下面的这部分.模型最下层仍和图像大小一致,但最上层则不止一个节点.

完整的四叉树模型所具有的性质完全适用于半树模型,不同点仅在于最上层,完整的树模型从上到下构成了完整的因果依赖性,而半树模型的层间因果关系被截断,该层节点的父节点及祖先均被删去,因此该层中的各节点不具有条件独立性,即不满足上述的性质 2,因而对这一层转为考虑层内相邻节点间的关系.半树模型和完整的树模型相比,层次减少了许多,这样,层次间的信息传递快了,概率值也不会因为过多层次的逐层计算而小到出现下溢.但第 0 层带来了新的问题,我们必须得考虑节点间的交互,才能得出正确的推导结果,也正是因为因为在第 0 层考虑了相邻节点间的影响,使得该模型的块现象要好于完整的树模型.

对于层次数的选取,我们认为不宜多,太多则达不到简化模型的目的,其优势体现不出来,但也不能太少,因为第 0 层的概率计算仍然要采用非迭代的算法,层数少表明第 0 层的节点数仍较多,计算费时,所以在实验中将层数取为完整层次数的一半或一半稍少.

3 半树模型的 MPM 算法

图像分割即已知观测图像 y ,估计 X 的配置,采用贝叶斯估计器,可由一个优化问题来表示:

$$\hat{x} = \arg \min_x E[C(x, x') | Y = y],$$

其中代价函数 C 给出了真实配置为 x 而实际分割结果为 x' 时的代价.在已知 y 的情况下,最小化这一代价的期望,从而得到最佳的分割.代价函数取法不同得到了不同的估计器,若 $C(x, x') = 1 - \delta(x, x')$ (当 $x = x'$ 时 $\delta(x, x') = 1$,否则 $\delta(x, x') = 0$) 得到的是 MAP 估计器,它意味着 x 和 x' 只要在一个像素处有不同,则代价为 1,对误分类的惩罚比较重,

而在实际中存在一些误分类是完全允许的.若

$$C(x, x') = 1 - \delta(x, x') \text{ (当 } x=x' \text{ 时, } \delta(x, x')=1 \text{, 否则 } \delta(x, x')=0 \text{),}$$

则得到了 MPM 估计器,与 MAP 相比,它对误分类的惩罚不那么严格,更符合实际一些.MPM 估计器得到的估计值

$$\hat{x}_s = \arg \max_{x_s} P(x_s | y).$$

从联合概率 $P(x, y)$ 求后验边缘概率 $P(x_s | y)$ 是一个难题,一般采用 Monte Carlo 方法^[6]求解,其收敛速度很慢.而分层模型层间具有马尔可夫链的性质,与马尔可夫链的 Baum-Welch 算法类似,可通过向上、向下的两步扫描来求后验边缘概率,得到非迭代的算法.

用 $d(s)$ 代表以 s 为根的子树的叶子节点.根据贝叶斯公式及分层模型的性质,除了第 0 层,其他层的后验边缘概率有以下形式:

$$P(x_s | y) = \sum_{x_{\rho(s)}} P(x_s | x_{\rho(s)}, y) P(x_{\rho(s)} | y) = \sum_{x_{\rho(s)}} P(x_s | x_{\rho(s)}, y_{d(s)}) P(x_{\rho(s)} | y) = \sum_{x_{\rho(s)}} \frac{P(x_s, x_{\rho(s)} | y_{d(s)})}{\sum_{x_s} P(x_s, x_{\rho(s)} | y_{d(s)})} P(x_{\rho(s)} | y). \quad (1)$$

由这一递推公式得知,若可求出最上层的后验边缘概率及各父子节点的部分后验 $P(x_s, x_{\rho(s)} | y_{d(s)})$, 则可逐层推出各层节点的后验边缘概率.各层的先验 $P(x_s) = \sum_{x_{\rho(s)}} P(x_s | x_{\rho(s)}) P(x_{\rho(s)})$, 假设第 0 层 $P(x_s)$ 为均匀分布,则父子部分后验有以下形式:

$$P(x_s, x_{\rho(s)} | y_{d(s)}) = P(x_{\rho(s)} | x_s) P(x_s | y_{d(s)}) \propto P(x_s | x_{\rho(s)}) P(y_{d(s)} | x_s) P(x_{\rho(s)}) = P(y_{d(s)} | x_s) P(x_s | x_{\rho(s)}), \quad (2)$$

$$P(y_{d(s)} | x_s) = \sum_{x_{c(s)}} P(y_{d(s)} | x_{c(s)}, x_s) P(x_{c(s)} | x_s) = \prod_{t \in c(s)} \sum_{x_t} P(y_{d(t)} | x_t) P(x_t | x_s). \quad (3)$$

根据上面的推导,可将算法分为两步求后验边缘概率,首先向上逐层传递过程根据式(2)、式(3)计算 $P(y_{d(s)} | x_s)$ 和 $P(x_s, x_{\rho(s)} | y_{d(s)})$, 然后向下过程根据式(1)计算 $P(x_s | y)$.

由于第 0 层具有非因果的结构,其后验边缘概率要借助于非因果 MRF 的算法来求得,这里采用常用的 Gibbs 采样^[6,7].由第 0 层的后验概率 $P(x^0 | y)$ 来采样,进而求出后验边缘概率. $P(x^0 | y)$ 的形式为

$$\left. \begin{aligned} P(x^0 | y) &\propto P(y | x^0) P(x^0) \\ &= \sum_{x^1} P(y | x^1) P(x^1 | x^0) P(x^0) \\ &= \sum_{x^1} \left[\prod_{s \in S^1} P(y_{d(s)} | x_s) P(x_s | x_{\rho(s)}) \right] P(x^0) \\ &= \prod_{s \in S^1} \sum_{x_s} P(y_{d(s)} | x_s) P(x_s | x_{\rho(s)}) P(x^0) \\ &= \prod_{t \in S^0} \prod_{s \in c(t)} \sum_{x_s} P(y_{d(s)} | x_s) P(x_s | x_{\rho(s)}) P(x^0) \\ &= \prod_{t \in S^0} P(y_{d(t)} | x_t) P(x^0). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$P(x^0)$ 采用 Potts 类型先验: $P(x^0) = \exp[-\beta \sum_{s,t} (1 - \delta(x_s, x_t))]$, $s, t \in \eta^0$, η^0 为 X^0 的邻域系统, β 为常数,则由式

(4)可求得 $P(x^0 | y)$.

将半树模型的 MPM 算法记为 HT-MPM,它分为向上算法和向下算法两步,向上算法自下而上根据式(2)、式(3)逐层计算 $P(y_{d(s)} | x_s)$ 和 $P(x_s, x_{\rho(s)} | y_{d(s)})$, 对最下层 $P(y_{d(s)} | x_s) = P(y_s | x_s)$. 向下算法自上而下根据式(1)逐层计算 $P(x_s | y)$, 对最上层由 $P(x^0 | y)$ 采样 $x^0(1), \dots, x^0(n)$, 根据采样结果计算后验边缘概率:

$$P(x_s | y) \approx \frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^n \delta(x_s^0(i) - x_s),$$

最后得到 x_s 的估计值 $\hat{x}_s = \arg \max_{x_s} P(x_s | y)$.

HT-MPM 算法为了求最上层的后验边缘概率,采用了迭代的 Gibbs 采样,因而 HT-MPM 算法并不是完全非

迭代的.虽然增加了一步迭代的采样,但由于被采样的第 0 层比原始图像大小已小了很多,若加上其他因素:层次少,向上、向下传播速度更快,不会出现下溢因而不用对概率取对数等,该算法并不比完全非迭代的算法耗时,从实验结果也可以看出这一点来.

4 实验结果及分析

我们采用均为灰度图像的人工合成图像和一幅 Ku-Band SAR 图像进行了实验.图像取值范围均为 {0,1,...,255},都有 4 个类,各类服从高斯分布.人工图像大小为 256×256,完整层次有 9 层.SAR 图像大小为 512×512,完整层次有 10 层,SAR 图像的 4 类分别代表目标(机场跑道)、浅色均匀背景区、深色均匀背景区和点状背景区.

记完整的树模型的 MPM 算法为 CT-MPM.在参数固定的情况下,分别用 CT-MPM 和 HT-MPM 算法对两幅图像进行分割,并用非分层模型的 ICM 算法做了对比实验,ICM 算法是迭代的 MRF 算法中运算速度最快的,它求得的是 X 的 MAP 估计.程序采用 C 语言在 PIII 微机实现.HT-MPM 中层数取为 3,参数β=2.5,采样 100 个.两算法中转换概率为^[4]:若 $i = j$,

$$P(x_s = j | x_{\rho(s)} = i) = \alpha,$$

否则,

$$P(x_s = j | x_{\rho(s)} = i) = \frac{1 - \alpha}{M - 1},$$

M 为类数.数据条件似然:

$$P(y_s | x_s = k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} \exp\left\{-\frac{(y_s - \mu_k)^2}{2\sigma_k^2}\right\},$$

$k = \{1,2,\dots,M\}, s \in S^n, \mu_k, \sigma_k^2$ 为各类的均值、方差.实验中 $\alpha = 0.95$.表 1 及图 2 给出了分割结果.

Table 1 Segmentation results

表 1 分割结果

Algorithm	Synthetic image number of error label	Synthetic image runing time (s)	SAR image runing time (s)
ICM	4 484	10	38
CT-MPM	252	11	54
HT-MPM	240	9	43

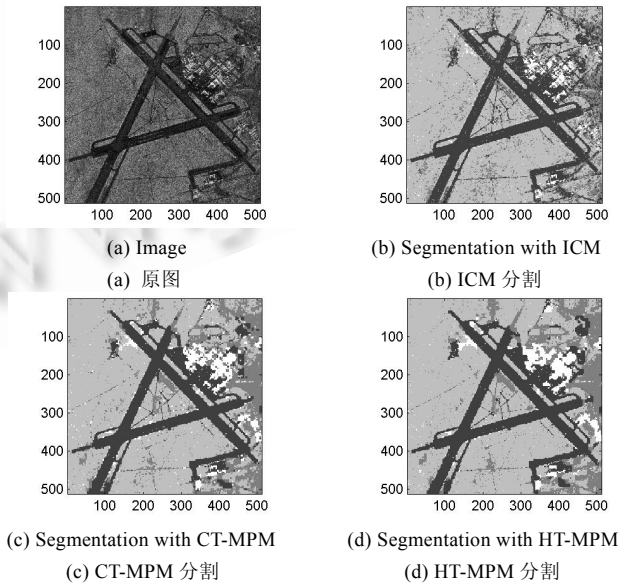


Fig.2 SAR image and the segmentation results with the three algorithms

图 2 SAR 图像及 3 种算法的分割结果图

因为人工图像的实际分割结果是已知的,可将所得结果与其比较以得到误分类像素数.从实验结果可以看出,如果图像噪声少、尺寸小,则 3 个算法都可以在较短时间内得到较好的分割结果,若图像噪声多、或尺寸比较大,则 CT-MPM 和 HT-MPM 算法仍可在数 10s 内得到误差小的分割结果,而迭代算法则不行.虽然对 SAR 图像不能得到精确的误分类像素数,但从图中可以看出:用 CT-MPM 和 HT-MPM 算法对 SAR 图像的分割结果明显好于采用 ICM 算法得到的结果,HT-MPM 算法得到的结果更平滑,它具有很强的抗噪能力.

5 结束语

本文介绍了基于离散分层 MRF 的半树模型,由于层间的因果关系,使我们可以得到半迭代的 MPM 算法.半树模型解决了通常的离散分层 MRF 模型所遇到的问题,其 MPM 算法在减少计算时间的同时提高了图像分割的质量,对大幅面图像优势更为明显.

References:

- [1] Krishnamachari S, Chellapa R. Multiresolution Gauss-Markov random field models for texture segmentation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1997,6(2):251~267.
- [2] Luetgen MR, Karl WC, Willsky AS. Efficient multiscale regularization with applications to the computation of optical flow. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1994,3(1):41~64.
- [3] Laferte J-M, Perez P, Heitz F. Discrete Markov image modeling and inference on the quadtree. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2000,9(3):390~404.
- [4] Bouman CA, Shapiro M. A multiscale random field model for Bayesian image segmentation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1994,3(2):162~177.
- [5] Crouse MS, Nowak RD, Baraniuk RG. Wavelet-Based statistical signal processing using hidden Markov models. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1998,46(4):886~902.
- [6] Chellappa R, Jain A. *Markov Random Fields and Application*. San Diego: Academic Press, 1991.
- [7] Geman S, Geman D. Stochastic relaxation, gibbs distributions, and the bayesian restoration of images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1984,6(6):721~741.