离散时间的 Hopfield 网络稳定性研究*

叶世伟[1,2+], 郑宏伟[3], 王文杰[2], 马 琳[2], 史忠植[1]

[1](中国科学院 计算技术研究所 智能信息处理重点实验室,北京 100080)
[2](中国科学院 研究生院 信息科学与工程学院,北京 100039)
[3](四川师范大学 数学系,四川 成都 610066)

Research on Stability of Discrete Time Hopfield Network

YE Shi-Wei[1,2+], ZHENG Hong-Wei[3], WANG Wen-Jie[2], MA Lin[2], SHI Zhong-Zhi[1]

[1](Key Laboratory of Intelligent Information Processing, Institute of Computing Technology, The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)
[2](School of Information Science and Engineering , Graduate School, The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China)
[3](Department of Mathematics, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, China)
+ Corresponding author: Phn: 86-10-88256057, Fax: 86-10-88256066, E-mail: shwye@gscas.ac.cn
http://www.ict.ac.cn
Received 2002-06-04; Accepted 2002-08-16

Ye SW, Zheng HW, Wang WJ, Ma L, Shi ZZ. Research on Stability of Discrete Time Hopfield Network. *Journal of Software*, 2003,14(5):930~935.
http://www.jos.org.cn/1000-9825/14/930.htm

Abstract: In this paper, the convergent conditions in sequence or parallel update mode and the sufficient condition with only one global stable state for Hopfield network model with discrete time and continuous states when its neurons' activation function is non-decreasing (not being strictly monotone increasing) are discussed. With the definition of a new energy function and the research on the properties of monotonously increasing function, the sufficient conditions is presented to converge in parallel or sequential update mode when neuron's activation function is monotonously increasing (not be necessary to strictly increase). After obtained the condition for energy function to be convex with respect to the network states variables, it follows that a sufficient condition for network to have only one stable point with the minimum energy by regarding the operation of Hopfield network as solving a constrained convex optimal problem. When auto-connection weight value of each neuron in network is greater than the reciprocal of derivation of its activation function, the network will be convergent in sequence update mode. When the minimal eigenvalue of connection weights matrix is greater than the reciprocal of derivation of its neuron activation function, the network will be convergent in parallel update mode. If the energy function of network is convex, the network will have only one global stable point. These results extend the choice range of activation function of neuron when using Hopfield net to solution of optimization problem or to associative memory.

* Supported by the Opening Foundation of Key Laboratory of Intelligent Information Processing, Institute of Computing Technology, the Chinese Academy of Sciences under Grant No.IIP 2001-5 (中国科学院计算技术研究所智能信息处理实验室开放基金)

第一作者简介: 叶世伟(1968－),男,四川仁寿人,博士,副教授,主要研究领域为神经网络理论,机器学习.

Key words: discrete time and continuous state; Hopfield network; convergence; global unique minimum; constrained convex optimal problem

摘 要: 主要讨论离散时间连续状态的 Hopfield 网络模型中当神经元的激活函数为单调增函数(不一定严格单调增)时,并行和串行收敛的充分条件以及具有全局惟一稳定点的充分条件.通过定义新的能量函数和研究单调增函数(不一定严格单调增)的性质,给出了并行和串行收敛的充分条件.通过研究能量函数成为凸函数的条件,将 Hopfield 网络的运行看作约束凸优化问题求解,从而得出了仅有全局惟一极小点的充分条件.当网络神经元的自反馈大于该神经元激活函数导数的倒数时,串行运行收敛.当网络连接权值矩阵的最小特征值大于激活函数导数的倒数时,网络并行收敛.如果网络的能量函数为凸函数,则网络将仅有惟一一个全局稳定点.这些结果在应用 Hopfield 网络求解优化问题和联想记忆时拓广了神经元激活函数的选择范围.

关键词: 离散时间连续状态; Hopfield 网络;收敛性;全局惟一极小;约束凸优化问题

中图法分类号: TP18 **文献标识码**: A

Hopfield 网络的提出已有 10 多年的历史.Hopfield 网络由于其简单性和代表性已获得了广泛研究和应用.Hopfield 网络大体上可分为时间连续状态连续(continuous time and continuous state,简称 CTCS)模型、时间离散状态连续(discrete time and continuous state,简称 DTCS)模型和时间离散状态离散(discrete time and discrete state,简称 DTDS)模型三大类.它的应用主要集中于联想记忆和优化计算.在这两个应用中,根本的问题就是网络运行的收敛性和神经元激活函数的选取.本文主要研究连接权值对称且神经元激活函数单调增的 DTCS 网络的收敛性和全局极小点的充分条件.当神经元激活函数为严格单调增函数且连续可微时,DTCS 网络的收敛性已有许多结果[1~4].但是当神经元的激活函数不一定严格单调增(且在一些点导数不存在)时,DTCS 网络运行的收敛性,还未给予讨论.而许多网络如盒中脑(brain state in box)模型,其神经元的激活函数仅为单调增的,精确地说,盒中脑模型的神经元激活函数在区间[−1,1]的左右两边分别取常数值,仅在[−1,1]内严格单调增加,这时许多网络运行的收敛性结果的研究还是相当弱的.这些现状严重阻碍了这些网络的应用以及对神经元激活函数选取的重视,同时已有的研究还表明,适当地选取神经元的激活函数,可以大大加速网络运行的收敛时间.当 DTCS 模型用于优化计算时,我们希望它收敛于仅有的惟一全局稳定的最小点,这时对于神经元激活函数严格单调增且连续可微时,应用针对一般动力系统稳定的条件,也得到了部分的结果[1].但这些结果所加条件都非常强而且难以验证,证明也相当繁琐.

通过定义新的能量函数,我们研究了网络中神经元的激活函数为单调增函数(不一定严格单调增)时并行和串行收敛的充分条件.通过研究能量函数成为凸函数的条件,将 Hopfield 网络的运行看作约束凸优化求解,从而得出了仅有全局惟一极小点的充分条件.这些条件都非常一般且易于验证.对网络权值所加的条件仅仅要求为对称的;激活函数为连续的单调增函数.很自然,这里所得到的结果是文献[2,3]的结果的自然推广.

本文第 1 节讨论单调增函数的一些性质.第 2 节给出了新的能量函数的定义,通过它研究了 DTCS 模型运行的收敛性和具有全局稳定惟一最小点的充分条件.第 3 节是结论.

1 单调函数的性质研究

为方便起见,我们首先研究单调函数的一些性质.

定义 1. 设 $f(\cdot)$为定义在 R 上的任意实值函数,$f(\cdot)$在 x_0 的左侧或右侧方向导数定义为

$$D^{-}f(x_0)=\lim_{t\to 0^-}\frac{f(x+t)-f(x)}{t},\ D^{+}f(x_0)=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}.$$

定义 2. 给定$\varphi(\cdot)$为实数域内的一元函数,其值域定义为 $R_\varphi=\{z:z=\varphi(x),x\in R\}$.

很明显,当$\varphi(x)$为连续一元函数时,R_φ必为 R 的凸区间;特别地,若 R_φ有界,则必为闭区间.

引理 1. 设$\varphi(\cdot)$为连续单调增的一元函数,其导数分段存在连续,在任何有限区间仅有有限个不可导点;同时,假设对任何 $x\in R,0\le D^{+}\varphi(x)\le k$ 和 $0\le D^{-}\varphi(x)\le k$.对任意的 $z=\varphi(x)\in R_\varphi$,那么

① $R(z)=xz-\int_{x(0)}^{x}\varphi(s)\mathrm{d}s$ 为仅与 z 有关的量,即为 z 的函数;

② 任意给定 $x,y\in R$,则 $\int_{y}^{x}(\varphi(s)-\varphi(y))\mathrm{d}s\ge\frac{1}{2k}(\varphi(x)-\varphi(y))^2$;

③ $P(z)=xz-\int_{x(0)}^{x}\varphi(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{2k}(z-z_0)^2$,则 $P(z)$为关于 z 的凸函数,其中 $z_0=\varphi(x(0))$.

证明:1) 对于给定的 z,若存在两个不同的 $x_1<x_2$,使得 $z=\varphi(x_1)=\varphi(x_2)$,由于$\varphi(\cdot)$为单调增加的函数,所以对 $s\in[x_1,x_2]$有$\varphi(s)=z$.从而我们有

$$x_2z-\int_{x(0)}^{x_2}\varphi(s)\mathrm{d}s=x_1z+(x_2-x_1)z-\int_{x(0)}^{x_1}\varphi(s)\mathrm{d}s-\int_{x_1}^{x_2}z\mathrm{d}s=x_1z-\int_{x(0)}^{x_1}\varphi(s)\mathrm{d}s.$$

由此可见,$R(z)$的定义和 x 的选择无关.

2) 首先假设 $y<x$,由于对任何 $s\in R,0\le D^+\varphi(s)\le k$ 和 $0\le D^-\varphi(s)\le k$,并且$\varphi(x)$连续,那么当 $y\le s\le x$ 时,有

$$x-s\ge\frac{1}{k}(\varphi(x)-\varphi(s))\quad(\text{注意到}\varphi(x)\text{连续且分段可微}).$$

另外,我们假设$\varphi(s)$在(y,x)内有 $n-1$ 个不可导的点,设为 $x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}$,同时令 $x_0=y,x_n=x$,则有

$$\sum_{i=0}^{n}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x-s)\mathrm{d}\varphi(s)\ge\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(\varphi(x)-\varphi(s))\mathrm{d}(\varphi(s)-\varphi(x))=\frac{1}{2k}(\varphi(x)-\varphi(y))^2,\tag{1}$$

$$\begin{aligned}\int_{y}^{x}(\varphi(s)-\varphi(y))\mathrm{d}s&=\sum_{i=0}^{n-1}(s-x)(\varphi(s)-\varphi(y))\Big|_{x_i}^{x_{i+1}}-\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(s-x)\mathrm{d}\varphi(s)(\text{在每个区间内导数存在})\\&=\sum_{i=0}^{n}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x-s)\mathrm{d}\varphi(s)(\text{利用}\varphi(s)\text{在}x_i\text{处连续}).\end{aligned}\tag{2}$$

由式(1)和式(2)可得,当 $y<x$ 时结论②成立.

其次,我们假设 $y>x$,由于对任何 $s\in R,0\le D^+\varphi(s)\le k$ 和 $0\le D^-\varphi(s)\le k$,从而对 $x\le s\le y$,

$$s-x\ge\frac{1}{k}(\varphi(s)-\varphi(x))\quad(\text{注意到}\varphi(x)\text{连续且分段可微}).$$

另外,我们假设$\varphi(s)$在(x,y)内有 $n-1$ 个不可导的点,设为 $x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}$,同时令 $x_0=x,x_n=y$,则有

$$\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(s-x)\mathrm{d}\varphi(s)\ge\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{1}{k}(\varphi(s)-\varphi(x))\mathrm{d}(\varphi(s)-\varphi(x))=\frac{1}{2k}(\varphi(x)-\varphi(y))^2.\tag{3}$$

$$\int_{y}^{x}(\varphi(s)-\varphi(y))\mathrm{d}s=\int_{x}^{y}(\varphi(y)-\varphi(s))\mathrm{d}s.\tag{4}$$

而且

$$\int_{x}^{y}(\varphi(y)-\varphi(s))\mathrm{d}s=\sum_{i=0}^{n-1}(s-x)(\varphi(y)-\varphi(s))\Big|_{x_i}^{x_{i+1}}+\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(s-x)\mathrm{d}\varphi(s)=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(s-x)\mathrm{d}\varphi(s).\tag{5}$$

由式(3)~式(5)可得,当 $y>x$ 时结论②成立.总之,结论②对任意给定的 x,y 都成立.

3) 对于给定的 z,由于 $z=\varphi(x)$为单调增函数,我们定义

$$x^-=\min_{\varphi(x)=z}x,\ x^+=\max_{\varphi(x)=z}x.$$

显然有 $x^-\le x^+$成立.

易验证下式成立:

$$D^-P(z)=x^--(z-z_0)/k\le x^+-(z-z_0)/k=D^+P(z).\tag{6}$$

现在我们证明当 $z_2<z_1$ 时,下列不等式成立:

$$P(z_2)\ge P(z_1)+D^-P(z_1)(z_2-z_1).\tag{7}$$

设 $x_1=\min_{\varphi(x)=z_1}x$,$\varphi(x_2)=z_2$,那么式(7)等价于

$$z_2\cdot x_2-\int_{x(0)}^{x_2}\varphi(s)\mathrm{d}s-\{z_1\cdot x_1-\int_{x(0)}^{x_1}\varphi(s)\mathrm{d}s\}-\{(z_2-z_0)^2-(z_1-z_0)^2\}/(2k)\ge[x_1-(z_1-z_0)/k](z_2-z_1),$$

即等价于

$$z_2\cdot x_2-z_1\cdot x_1-\int_{x_1}^{x_2}\varphi(s)\mathrm{d}s-\{(z_2-z_0)^2-(z_1-z_0)^2\}/(2k)\ge x_1\cdot z_2-x_1z_1-z_1(z_2-z_1)/k-z_0(z_2-z_1)/k,$$

亦即 $\int_{x_2}^{x_1}(\varphi(s)-\varphi(x_2))\mathrm{d}s\ge\frac{1}{2k}(z_1-z_2)^2$.这实际上由②证明了.所以由②的结论,我们实际证明了式(7).

同样,我们可以证明当 $z_2<z_1$ 时,下列不等式成立:

$$P(z_1)\ge P(z_2)+D^+P(z_2)(z_1-z_2). \tag{8}$$

实际上,设 $\varphi(x_1)=z_1, x_2=\max\limits_{\varphi(x)=z_2} x$,那么式(8)等价于

$$z_1\cdot x_1-\int_{x(0)}^{x_1}\varphi(s)\mathrm{d}s-\{z_2\cdot x_2-\int_{x(0)}^{x_2}\varphi(s)\mathrm{d}s\}-\{(z_1-z_0)^2-(z_2-z_0)^2\}/(2k)\ge[x_2-(z_2-z_0)/k](z_1-z_2),$$

即等价于

$$z_1\cdot x_1-z_2\cdot x_2-\int_{x_2}^{x_1}\varphi(s)\mathrm{d}s-\{(z_1-z_0)^2-(z_2-z_0)^2\}/(2k)\ge x_2\cdot z_1-x_2\cdot z_2-z_2(z_1-z_2)/k+z_0(z_1-z_2)/k,$$

亦即 $\int_{x_2}^{x_1}(\varphi(x_1)-\varphi(s))\mathrm{d}s\ge\frac{1}{2k}(z_1-z_2)^2$.这实际上已由②所证明,所以由②的结论,我们证明了式(8).

欲证 $P(z)$为关于 z 的凸函数,设 $z_1\in R_\varphi, z_2\in R_\varphi$使得 $z_2>z_1$,且令 $z_3=q_1\cdot z_1+q_2\cdot z_2$,其中 $q_1+q_2=1, q_1>0, q_2>0$.显然有 $z_1<z_3<z_2$,由式(8)可得

$$P(z_2)\ge P(z_3)+q_1\cdot D^+P(z_3)\cdot(z_2-z_1).$$

由式(6)我们有 $D^+P(z_3)\ge D^-P(z_3)$,从而有

$$P(z_2)\ge P(z_3)+q_1\cdot D^-P(z_3)(z_2-z_1). \tag{9}$$

由式(7)可得

$$P(z_1)\ge P(z_3)-q_2\cdot D^-P(z_3)\cdot(z_2-z_1). \tag{10}$$

由 $q_2\times(9)+q_1\times(10)$可得

$$P(z_3)\le q_1\cdot P(z_1)+q_2\cdot P(z_2),$$

这就意味着 $P(z)$为凸函数.这样③得到了证明. □

很明显,引理 1 的结论是非常强的,它是下面推理的基础.

2 网络稳定性分析

本节将假设 DTCS 网络模型的权值矩阵对称,神经元的激活函数满足引理 1 的假设,有下面的主要结果.

定理 1. 设离散时间连续状态的 Hopfield 网络的状态更新方程为

$$v(t+1)=\varphi(d-Wv(t)), \tag{11}$$

其中,权值矩阵 W 对称,神经元 i 的激活函数$\varphi_i(\cdot)$为连续单调增的一元函数,在任何有限区间内仅有有限个不可导点,且对任何 $x\in R, 0\le D^+\varphi_i(x)\le k_i$ 和 $0\le D^-\varphi_i(x)\le k_i, i=1,2,\ldots,n$.令 $K=\mathrm{diag}(1/k_1,1/k_2,\ldots,1/k_n)$;若 $K-W$ 的任意 m 阶主子阵为正定矩阵,则当同时更新的神经元个数不超过 m(包括 m)时,对任意初始值 $v(0)$,该系统将收敛到一个渐进稳定的平衡点.

证明:对任意的向量 $v\in R_\varphi$,存在 u 使得 $v=\varphi(u)$,定义能量函数如下:

$$E(v)=\frac{1}{2}v^TWv-v^Td+\sum_{i=1}^n[u_iv_i-\int_{u_i(0)}^{u_i}\varphi_i(s)\mathrm{d}s],$$

其中 $u(0)$为任意给定的向量值.由引理 1 的结论①可知能量函数 $E(v)$的定义和 u 的选择无关,所以上述定义是合理的.选择 $u(0)$使得 $v(0)=\varphi(u(0))$,由能量函数的表达式有

$$\begin{aligned}\Delta E(t)=E(t+1)-E(t)&=\frac{1}{2}v^T(t+1)Wv(t+1)-v^T(t+1)d+\sum_{i=1}^n u_i(t+1)v_i(t+1)-\sum_{i=1}^n\int_{u_i(0)}^{u_i(t+1)}\varphi_i(s)\mathrm{d}s-\\&\frac{1}{2}v^T(t)Wv(t)+v^T(t)d-\sum_{i=1}^n u_i(t)v_i(t)+\sum_{i=1}^n\int_{u_i(0)}^{u_i(t)}\varphi_i(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

其中 $u_i(t)=d_i-\sum_{i=1}^{n}w_{ij}v_j(t-1)$,根据更新方程,且 W 为对称矩阵,上式变为

$$\begin{aligned}\Delta E(t)&=\frac{1}{2}\Delta v^T(t)W\Delta v(t)-(v(t+1)-v(t))^T u(t+1)+v^T(t+1)u(t+1)-v^T(t)u(t)-\sum_{i=1}^{n}\int_{u_i(t)}^{u_i(t+1')}\varphi_i(s)\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{2}\Delta v^T(t)\,W\Delta v(t)-v(t)^T u(t+1)-v^T(t)u(t)-\sum_{i=1}^{n}\int_{u_i(t)}^{u_i(t+1)}\varphi_i(s)\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{2}\Delta v^T(t)\,W\Delta v(t)-\sum_{i=1}^{n}\int_{u_i(t)}^{u_i(t+1)}(\varphi_i(s)-\varphi_i(u_i(t)))\mathrm{d}s\\&=-\frac{1}{2}\Delta v^T(t)(K-W)\Delta v^T(t)-\sum_{i=1}^{n}\{\int_{u_i(t)}^{u_i(t+1)}(\varphi_i(s)-\varphi_i(u_i(t)))\mathrm{d}s-\frac{1}{2k_i}(\varphi_i(u_i(t+1))-\varphi_i(u_i(t)))^2\}\\&=-I_1-I_2.\end{aligned}$$

由假设神经元更新个数不超过 m 个,而 $K-W$ 的任意 m 阶主子阵为正定矩阵,从而有 $I_1\ge 0$,且 $I_1=0$ 有 $\Delta v(t)=0$.

应用引理的结论②,这样我们得到 I_2 的每个分量大于 0,从而 $I_2\ge 0$.因此能量函数单调减少,且能量函数不变时,状态也不变.从而网络运行收敛. □

定理 2. 设 $\varphi_i(\cdot)$ 为连续单调增的一元函数,且对任何 $x\in R,0\le D^+\varphi_i(x)\le k_i$ 和 $0\le D^-\varphi_i(x)\le k_i,i=1,2,\dots,n$,令 $K=\mathrm{diag}(1/k_1,1/k_2,\dots,1/k_n)$;若 $K+W$ 为正定矩阵,则对于任意给定的 $d\in R^n$,下列方程组

$$v=\varphi(d-Wv), \tag{12}$$

仅有惟一的解.

证明:用反证法.记 $\varphi_i(\cdot)=\varphi_i(\cdot)/k_i,\varphi(x)=(\varphi_1(x_1),\varphi_2(x_2),\dots,\varphi_n(x_n))^T$,则由题设对任意两个实数 a,b 有

$$(\varphi_i(a)-\varphi_i(b))(a-b)\ge(\varphi_i(a)-\varphi_i(b))^2. \tag{13}$$

不妨假设有两个不同的向量 u 和 v 满足方程组(12).令 $x=d-Wu$,则

$$Ku=\varphi(x), \tag{14}$$

且由此有 $x-\varphi(x)=d-(K+W)u$.

设 $A=K+W$,由题设 A 为正定矩阵,从而有

$$x-\varphi(x)=d-Au. \tag{15}$$

同理,设 $y=d-Wv$,则

$$Kv=\varphi(y), \tag{16}$$

$$y-\varphi(y)=d-Av. \tag{17}$$

由式(14)和式(16)可得

$$K^{-1}(\varphi(x)-\varphi(y))=u-v. \tag{18}$$

由式(15)和式(17)可得

$$x-y-(\varphi(x)-\varphi(y))=A(v-u). \tag{19}$$

在式(18)和式(19)两边分别内积,则有

$$\text{左边}=\sum_{i=1}^{n}k_i\{(x_i-y_i)(\varphi(x_i)-\varphi(y_i))-(\varphi(x_i)-\varphi(y_i))^2\}.$$

利用式(13)可得

$$\text{左边}\ge 0;\text{右边}=-(u-v)A(u-v)<0.$$

由此导出矛盾.从而定理的结论成立. □

结合定理 1 和定理 2 的结论,我们可以得到,当 $K+W$ 和 $K-W$ 同时为正定时,离散时间连续状态的 Hopfield 网络优化下列约束优化问题

$$\min_v E(v)=\frac{1}{2}v^TWv-v^Td+\sum_{i=1}^{n}\left[u_iv_i-\int_{u_i(0)}^{u_i}\varphi_i(s)\mathrm{d}s\right]\quad\text{s.t.}\quad v\in R_\varphi,$$

改写为

$$E(v)=\frac{1}{2}v^T(W+K)v-v^T\tilde{d}+\sum_{i=1}^{n}(P_i(v_i)-\frac{(v_i-v_i(0))^2}{2k_i})+c.$$

其中 $\widetilde{d}_i = d_i - v_i(0)/k_i$,c 为常数.由假设 $W+K$ 为正定矩阵和引理的结论③我们知道,$E(v)$为关于 v 为严格凸函数;又当φ_i为单调增函数时 $R_{\varphi i}$ 为闭凸集,从而仅有惟一极小点.再由题设 $K-W$ 为正定的及定理 1 我们知道,网络运行收敛于惟一的全局极小点. □

3 结 论

本文在相当弱的假设下得到了激活函数为单调函数时,网络运行的收敛性和网络存在惟一极小点的一个充分条件.很明显,定理 2 的用途主要是利用 Hopfield 网络模型进行优化计算时应注意的原则.从本文定理的结论来看,如果利用 Hopfield 网络进行联想记忆,神经元的激活函数的选择也是很重要的.我们下一步的工作就是针对 Hopfield 模型用作联想记忆的编码问题如何选取具体的神经元激活函数.

References:

[1] Bhaya A, Kaszkurewicz E, Kozyakin VS. Existence and stability of a unique equilibrium in continuous-valued discrete-time asynchronous Hopfield NN. IEEE Transactions on NN,1996,7(3):620~628.

[2] Koiran P. Dyna1mics of discrete time, continuous state Hopfield network. Neural Computation,1994,6(4):459~468.

[3] Wang LP. Discrete-Time convergence theory and updating rules for Neural network with energy functions. IEEE Transactions on NN, 1997,8(2):455~447.

[4] Yan PF, Zhang CS. Artificial Neural networks and Simulation Evolution Computing. Beijing: Tsinghua University Press, 2000 (in Chinese).

附中文参考文献:

[4] 阎平凡,张长水.人工神经网络与模拟进化计算.北京:清华大学出版社,2000.