

散乱分布数据曲面重构的光顺-有限元方法*

蔡中义^{1,2+}, 李明哲²

¹(吉林大学 汽车动态模拟国家重点实验室, 吉林 长春 130025)

²(吉林大学 锻压工艺研究所, 吉林 长春 130025)

A Smoothing-Finite Element Method for Surface Reconstruction from Arbitrary Scattered Data

CAI Zhong-Yi^{1,2+}, LI Ming-Zhe²

¹(State Key Laboratory of Automobile Dynamic Simulation, Jilin University, Changchun 130025, China)

²(Roll Forging Institute, Jilin University, Changchun 130025, China)

+ Corresponding author: Phn: 86-431-5705246, E-mail: zhongyi_cai@sina.com

<http://www.jlu.edu.cn>

Received 2001-06-26; Accepted 2002-01-18

Cai ZY, Li MZ. A smoothing-finite element method for surface reconstruction from arbitrary scattered data. *Journal of Software*, 2003,14(4):838~844.

Abstract: A finite element method to reconstruct 3D surface from the scattered data is presented in the paper. Based on the theories of optimal approximation and data smoothing, a positive definite functional is constructed and minimized by using the finite element best-fitting technique, then the optimal solution is obtained and the 3D surface is reconstruct by eight-node isoparametric finite element interpolation. The influence of noise in input data is eliminated effectively by the smoothing-finite element method. The number of input data required in the presented method is less than that in finite element fitting. The surface reconstructed is of high approximating precision and good smoothness. Numerical results show that this method is simple and expedient to use.

Key words: surface reconstruction; scattered data; finite element; smoothing; optimal approximation

摘要: 提出了一种基于散乱分布的数据点重构三维曲面的有限元方法.根据最佳逼近与数据光顺理论建立正定的目标泛函,采用有限元最佳拟合使泛函极小化,求得最优解.通过八节点等参数有限元插值计算,重新构造出三维曲面.这种光顺-有限元方法有效地抑制了输入数据上误差噪声的影响,与有限元拟合方法相比,所需的输入数据点少,重构的曲面逼近精度高、光顺性好.数值实验表明,该方法简单,便于应用.

关键词: 曲面重构;散乱数据;有限元;光顺;最佳逼近

中图分类号: TP391 文献标识码: A

* Supported by the Key Science-Technology Project of the National 'Tenth Five-Year-Plan' of China under Grant No.2001BA203B11 ("十五"国家重点科技攻关项目); the Visiting Scholar Foundation of Key State Laboratory in University of China under Grant No.2000204 (高等学校国家重点实验室访问学者基金项目)

第一作者简介: 蔡中义(1963-),男,吉林松原人,博士,教授,主要研究领域为板材成形有限元数值模拟,模具 CAD/CAM.

工程上许多复杂的零件都是由自由曲面构成的,基于散乱数据点重构三维曲面是 CAD/CAM 领域倍受关注的研究课题.目前已有许多这方面的研究工作^[1-13],已提出的曲面重建方法主要包括插值方法^[3]、拟合方法^[4]、三角片逼近方法^[5]、神经网络方法^[6]等等.有限元方法由 Lawson^[7]引入 CAGD 中,通过对散乱数据进行插值构造了曲面,Farin^[8]等人对这种方法进行了改进.

Segalman^[9]等人将有限元拟合方法用于实验数据的处理,通过一个选定的光顺参数控制光顺程度,进行光力学的变形分析.这种方法所需的输入数据点比较少,数据点可以任意形式分布,并可用于处理不规则曲线边界的问题.本文基于这一思想,从新的角度建立由散乱数据点重构三维曲面的方法.根据 Lagrange 乘子法建立目标泛函,采用八节点等参元及 Newton-Raphson 方法对目标泛函极小化,从而得到重构的曲面.由于结合了光顺技术,这种方法对原始数据的噪声误差具有明显的抑制效果,从而提高了曲面的精度与光顺性.

1 数据光顺与逼近

1.1 逼近条件

在区域 Ω 内分布 T 个数据点,数据点 \mathbf{x}_i 的相对噪声误差表示为

$$E_{rr}(\mathbf{x}_i) = [\hat{u}(\mathbf{x}_i) - u(\mathbf{x}_i)] / u(\mathbf{x}_i), \quad (1)$$

其中 $u(\mathbf{x}_i)$, $\hat{u}(\mathbf{x}_i)$ 分别为点 \mathbf{x}_i 处曲面的精确值与数据值.

噪声误差式(1)是一个二维随机场,假定其具有无偏性,则有

$$\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \left[\frac{\hat{u}(\mathbf{x}_i) - u(\mathbf{x}_i)}{u(\mathbf{x}_i)} \right]^2 = \sigma_{\text{rms}}^2, \quad (2)$$

其中 σ_{rms} 为噪声误差的均方根估计值.

1.2 光顺准则

真实的曲面 $u(\mathbf{x})$ 在区域 Ω 上通常是连续变化的,几何上比较光顺,而由式(2)直接构造的曲面往往带有激烈的起伏波动,这是由输入数据的噪声误差造成的.因此,需要附加光顺条件,消除噪声影响.光顺条件可由二阶导数平方和最小^[14]来保证,即

$$\min \int_{\Omega} \sum_{r=1}^D \sum_{s=1}^D \left(\frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_r \partial x_s} \right)^2 d\Omega, \quad (3)$$

其中 D 为区域 Ω 的维数.

1.3 目标泛函

满足最佳逼近条件式(2)及光顺条件式(3)的条件极值问题可由 Lagrange 乘子法建立目标泛函:

$$\Phi(u, \lambda) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{r=1}^D \sum_{s=1}^D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_r \partial x_s} \right)^2 d\Omega + \frac{\lambda}{2} \left\{ \sum_{i=1}^T \left[\frac{u(\mathbf{x}_i)}{\hat{u}(\mathbf{x}_i)} - 1 \right]^2 - \omega T \sigma_{\text{rms}}^2 \right\}, \quad (4)$$

其中 λ 为 Lagrange 乘子, ω 为光顺控制因子.为使问题简化,式(4)中以输入数据 $\hat{u}(\mathbf{x}_i)$ 替代了式(2)中的数据点精确值 $u(\mathbf{x}_i)$.

根据使上述泛函取得极小值的极值函数构造的曲面不仅逼近原始数据点,而且抑制了噪声干扰,具有足够的光顺性.

2 有限元极值解

2.1 有限元方程

对于一维问题($D=1$),由泛函式(4)的 Euler-Lagrange 方程可解出类似于 Reinsch^[14]给出的三次光顺样条函数的解析解.对于二维($D=2$)、三维($D=3$)问题,泛函式(4)变得很复杂,解析解很难求得,这里采用八节点等参数有限

元方法^[15]求其数值解.

将数据点所分布的区域 Ω 分成 N_e 个有限单元,共有 M 个自由度.根据有限元插值方法,泛函式(4)可表示成如下形式:

$$\Phi(U, \lambda) = \sum_{e=1}^{N_e} \left\{ \frac{1}{2} U_e^T K_1^e U_e + \frac{\lambda}{2} [U_e^T K_2^e U_e - 2U_e^T P_e + T(1 - \omega \sigma_{ms}^2)] \right\}. \quad (5)$$

其中:

$$K_1^e = \int_{\Omega_e} \sum_{r=1}^D \sum_{s=1}^D \frac{\partial^2 N^T}{\partial x_r \partial x_s} \frac{\partial^2 N}{\partial x_r \partial x_s} d\Omega, \quad (6)$$

$$K_2^e = \tilde{N}^T A^{-2} \tilde{N}, \quad (7)$$

$$P_e = \tilde{N}^T V_e. \quad (8)$$

式中 U 为全部有限元的节点值构成的列向量; U_e 为单元 e 内的节点值构成的列向量; $V_e = (\hat{u}_1^{-1} \hat{u}_2^{-1} \dots \hat{u}_{T_e}^{-1})^T$ 为单元 e 内数据点输入值的倒数构成的列向量; $A = \text{Diag}[\hat{u}_1 \hat{u}_2 \dots \hat{u}_{T_e}]$ 为单元 e 内由数据点输入值构成的对角矩阵; N 为单元的形函数行向量; \tilde{N} 为 T_e 行形函数矩阵,其每一行对应单元 e 内一个数据点处的形函数行向量; T_e 为单元 e 内包含的数据点数.

由泛函式(5)的极值条件,一阶变分为 0,得到有限元方程:

$$\begin{cases} (\lambda^{-1} K_1 + K_2)U = P \\ U^T K_2 U - 2U^T P + T(1 - \omega \sigma_{ms}^2) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

其中, K_1 , K_2 及 P 分别为 $M \times M$ 阶矩阵及 M 行列向量,其形式与有限元结构分析的刚度矩阵及载荷向量类似,称其为“拟刚度矩阵”及“拟载荷向量”,分别由区域 Ω 的 N_e 个 K_1^e , K_2^e 及 P_e 组拼而成.

式(9)包括 $M+1$ 个方程,由该方程组可确定出 U 的 M 个未知数及 Lagrange 乘子 λ .

2.2 光顺-有限元及有限元拟合与插值

这种重建曲面的方法结合了对原始数据的光顺处理,因此称其为光顺-有限元方法,原始输入数据是该方法的基本已知量.重建曲面的光顺程度可以通过调整式(4)中光顺因子 ω 的大小来改变, ω 增大,曲面的光顺程度增加,逼近程度降低.另一方面,随着 λ 的增大,式(4)的逼近项作用增强,当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时,式(4)完全退化成有限元最小二乘拟合问题,这时非线性方程组(9)退化为线性方程组:

$$K_2 U = P. \quad (10)$$

随着 λ 的减小,光顺项的作用增强,当 $\lambda = 0$ 时,重建的曲面退化为平面.

对于有限元最小二乘拟合问题,每个单元内的数据点数通常不能少于单元的自由度数,否则,可能会导致有限元方程的系数矩阵奇异,无法求解.当总的的数据点数刚好等于有限元的总自由度数时,有限元最小二乘拟合问题又退化成有限元插值问题,这时,重建的曲面严格通过给定的数据点.

在光顺-有限元方法中,由于光顺项的作用,当某些单元内的数据点少于单元的自由度数时,有限元方程的系数矩阵仍不产生奇异,方程仍能求解.通常所采用的有限单元数量越多,描述曲面的效果越好,由于光顺-有限元方法单元内的数据点数可以少于单元自由度数,因此,这种方法可以采用比最小二乘拟合更少的原始数据点,因此具有更强的描述曲面的能力.

3 有限元极值解

式(9)是关于 λ 的非线性方程组,必须采用迭代方法来求解.为加快求解迭代速度,取 $\lambda = 10^\beta$,由式(9)定义:

$$F(\beta) = \sum_{i=1}^T \left[\frac{u(x_i)}{\hat{u}(x_i)} - 1 \right]^2 = P^T (10^{-\beta} K_1 + K_2)^{-T} [K_2 (10^{-\beta} K_1 + K_2)^{-1} - 2I] P + T, \quad (11)$$

$F(\beta)$ 是反映逼近程度的函数,Lagrange 乘子中的参数 β 由以下非线性方程来求解:

$$F(\beta) - T\omega \sigma_{ms}^2 = 0. \quad (12)$$

由式(9)和式(11)得到

$$dF/d\beta = -2\ln 10 \lambda^{-2} \mathbf{K}_1^T \mathbf{U}^T (\lambda^{-1} \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2)^{-1} \mathbf{K}_1 \mathbf{U}. \tag{13}$$

对于任意向量 \mathbf{U} , 由于

$$\mathbf{U}^T (\lambda^{-1} \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2) \mathbf{U} = \int_{\Omega} \sum_{r=1}^D \sum_{s=1}^D \left(\frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_r \partial x_s} \right)^2 d\Omega + \sum_{i=1}^T \left(\frac{u(\mathbf{x}_i)}{\hat{u}(\mathbf{x}_i)} \right)^2, \tag{14}$$

从而 $\lambda^{-1} \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2$ 为正定矩阵, 其逆也正定, 故 $dF/d\beta < 0$ 恒成立, 因此, $F(\beta)$ 是单调递减函数.

图 1(a)给出了目标曲面为方程式(19), 5×5 个八节点等参单元, 169 个散乱分布的模拟数据点对应的函数 $F(\beta)$; 图 1(b)给出了目标曲面为方程式(20), 7×7 个八节点等参单元, 225 个均匀分布的模拟数据点对应的函数 $F(\beta)$. 从中可看出函数的单调递减性.

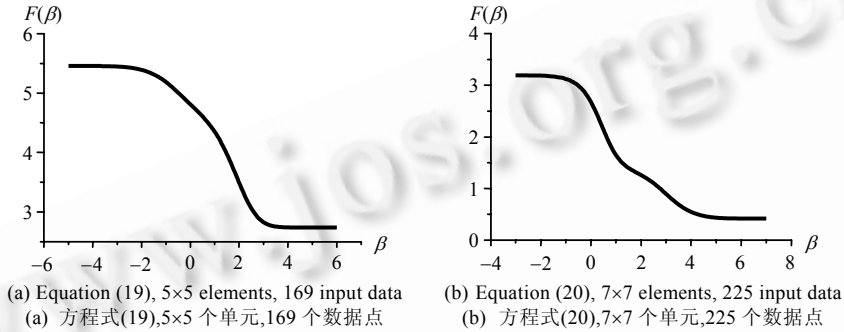


Fig.1 $F(\beta)$ curve
图 1 $F(\beta)$ 曲线

当 \mathbf{K}_2 非奇异时, 其最小值为

$$F_{\min}(\beta) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} F(\beta) = T - \sum_{i=1}^T \mathbf{V}_e^T \tilde{\mathbf{N}} \tilde{\mathbf{N}}^{-T} \mathbf{A}^2 \tilde{\mathbf{N}}^{-1} \tilde{\mathbf{N}}^T \mathbf{V}_e. \tag{15}$$

由 \mathbf{A} 及 \mathbf{V}_e 的定义不难发现, 只要适当地选择光顺控制因子 ω , 当 β 趋于比较大的正数时, 必有 $F(\beta) - T\omega\sigma_{\text{rms}}^2 < 0$ 成立. 另外, 当 β 趋于绝对值比较大的负数时, 由泛函式(4)确定的极值曲面趋于平面, 由式(11)的第 1 个方程式不难断定, 这时函数 $F(\beta)$ 的值将变得很大, 故必有 $F(\beta) - T\omega\sigma_{\text{rms}}^2 > 0$. 因此, 方程式(12)有惟一根存在.

采用 Newton-Raphson 迭代法, 由式(9)得到计算参数 β 的迭代格式如下:

$$\begin{cases} \mathbf{U}_k = (10^{-\beta_k} \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2)^{-1} \mathbf{P} \\ \beta_{k+1} = \beta_k + \frac{10^{2\beta_k} \mathbf{U}_k^T \mathbf{K}_2 \mathbf{U}_k - 2\mathbf{U}_k^T \mathbf{P} + T(1 - \omega\sigma_{\text{rms}}^2)}{2 \ln 10 \mathbf{U}_k^T \mathbf{K}_1^T (10^{-\beta_k} \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2)^{-1} \mathbf{K}_1 \mathbf{U}_k} \end{cases} \tag{16}$$

4 应用实例

4.1 输入数据模拟与计算精度评定

数据点的数值由精确值迭加随机噪声来模拟, 计算公式为

$$\hat{u}(x_i, y_i) = (1 + r_i E_{\max}) u(x_i, y_i), \tag{17}$$

其中 $u(x_i, y_i)$ 为数据点 i 的精确值, r_i 为随机数, $-1 \leq r_i \leq 1$, E_{\max} 为噪声幅度.

计算精度由下式计算的均方根误差 E_{rms} 来度量:

$$E_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \left(\frac{P_{\text{cal}} - P_{\text{exc}}}{P_{\text{ave}}} \right)^2}, \tag{18}$$

其中 P_{cal} 为样点 i 的计算值, P_{exc} 为样点 i 的精确值, P_{ave} 为测量区域内精确值的平均值.

4.2 计算结果及分析

对球面及 Gaussin 函数曲面进行仿真实验.球面方程为

$$u(x, y) = \sqrt{(10-x)^2 + (10-y)^2} - 5, \quad x \in [-6, 6], \quad y \in [-6, 6]. \quad (19)$$

取 5×5 个八节点等参单元, 10×10 个模拟数据点.由式(17)在数据点生成带有噪声的数据,此处取 $E_{\max}=0.3$, 此时实际噪声的均方值为 $\sigma_{\text{rms}}=16.71\%$.图 2(a)为精确球面,图 2(b)为由式(17)迭加随机噪声后的数据曲面,图 2(c)为有限元最小二乘拟合 ($\lambda^{-1}=0$) 的曲面.取光顺因子 $\omega=1$, 初值 $\beta_0=0$, 由式(16)经三次迭代后收敛于 $\beta=-0.1935$ ($\lambda=0.6405$).图 2(d)为光顺-有限元处理后重建的曲面.

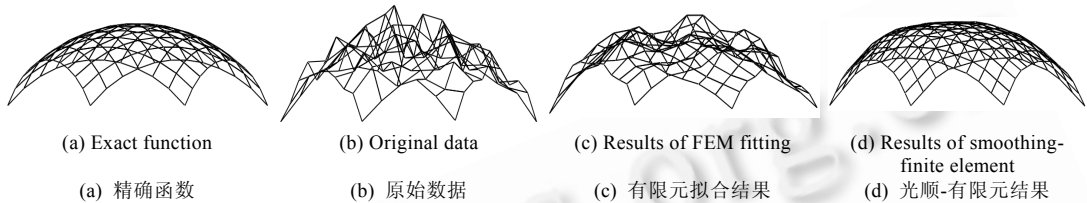


Fig.2 Reconstruction example of sphere
图 2 球面重建实例

可以看出,有限元最小二乘拟合的曲面误差比较大,而光顺-有限元重建的曲面则与真实曲面极为接近.尽管原始数据带有 $\sigma_{\text{rms}}=16.71\%$ 的随机误差,但重建的曲面由式(18)计算出的误差仅为 6.092% , $\partial u / \partial x$ 的误差为 29.014% , $\partial u / \partial y$ 的误差为 35.172% .

Gaussin 函数方程为

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) + 1, \quad x \in [-1, 1], \quad y \in [-1, 1]. \quad (20)$$

取 7×7 个八节点等参单元, 15×15 个模拟数据点.由式(17)在数据点生成带有噪声的数据,取 $E_{\max}=0.1$, 此时实际噪声的均方值为 $\sigma_{\text{rms}}=5.727\%$.图 3(a)为精确曲面,图 3(b)给出了由式(17)迭加随机噪声后的数据曲面,图 3(c)为有限元最小二乘拟合 ($\lambda^{-1}=0$) 的曲面.取光顺因子 $\omega=1$, 初值 $\beta_0=0$, 由式(16)经六次迭代后收敛于 $\beta=2.175$ ($\lambda=149.48$).图 3(d)为光顺-有限元处理后重建的曲面.

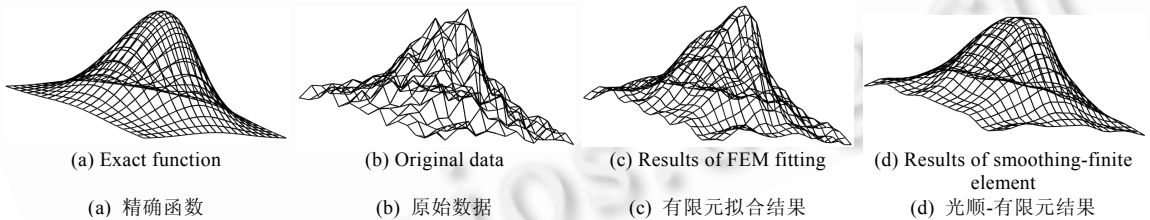


Fig.3 Reconstruction example of Gaussin surface
图 3 Gaussin 曲面重建实例

原始数据带有 $\sigma_{\text{rms}}=5.727\%$ 的随机误差,重建曲面的误差仅为 2.175% , $\partial u / \partial x$ 的误差为 57.124% , $\partial u / \partial y$ 的误差为 44.847% .可以看出,有限元方法重建的曲面与真实曲面的逼近精度比较好.

图 4 给出了 4 种有限元计算格式.通过这 4 种计算格式,以检验光顺-有限元处理散乱数据的效果.图 4(a)采用 5×5 个八节点等参单元, 100 个均匀分布的数据点;图 4(b)采用 5×5 单元, 100 个散乱分布的数据点;图 4(c)采用 5×5 单元, 169 个散乱分布的数据点;图 4(d)采用 7×7 单元, 324 个散乱分布数据点.

目标曲面为式(19)的球面,由式(17)在数据点生成带有随机噪声的数据,取 $E_{\max} = 0.3$, $\omega = 1$.表 1 给出了曲面函数值及一阶偏导数的计算精度.可以看出,基于散乱的数据点,光顺-有限元能重建出比较理想的曲面.另外,对于有限元最小二乘拟合问题,每个单元内的数据点数通常需大于或等于单元的自由度数,否则,可能导致有限元方程的系数矩阵奇异,无法求解.对于八节点等参元,单元内不应少于 8 个数据点.但由表 1 可以看出,采用光顺-有限元方法,当单元内取 4 个甚至个别单元取两个数据点时,仍可求解,这是由于光顺项作用的结果.

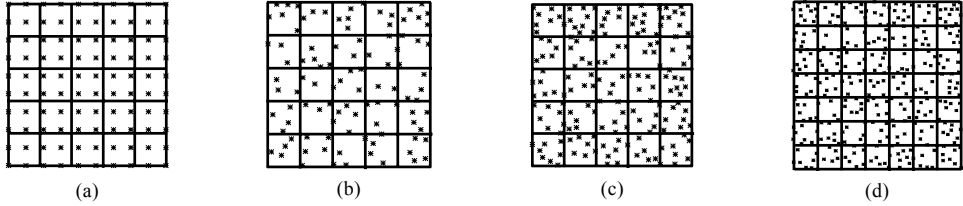


Fig.4 Finite element meshes and distribution of input data locations in four calculation modes
图 4 4 种计算格式的有限元网格及数据点分布

光顺因子 ω 的取值直接影响 Lagrange 乘子 λ , 随着 ω 的减小, λ 会增大, 逼近效应有所增强, 曲面与原始数据越来越接近, 而光顺效应减弱. 如果原始数据包含有较大的噪声信号, 则曲面上将有较多的起伏波动. 反之, 随着 ω 的增大, λ 会减小, 这时光顺效应有所增强, 而逼近效应减弱, 曲面与原始数据的偏离越来越多, 但曲面却越来越光顺.

表 2 给出了 5×5 个八节点等参单元, 169 个散乱分布的数据点, 目标曲面为式(19)的球面, 由式(17)在数据点生成带有随机噪声的数据, $E_{\max} = 0.3$, 初值 $\beta_0 = 0$, 4 种光顺因子下计算的迭代次数、 β 值及曲面函数值与一阶偏导数的计算精度.

当 $\beta \leq -15.5$ ($\lambda \leq 10^{-15.5}$) 时, 逼近项的作用完全消失, 重构的曲面退化成平面.

Table 1 Calculated results of four modes in Fig.4

Calculating mode	No. of input data in each element	β	E_{rms} (%)		
			u	$\partial u / \partial x$	$\partial u / \partial y$
Fig.4(a)	4	-0.194	6.092	29.014	35.172
Fig.4(b)	2~6	-1.027	7.355	38.531	44.327
Fig.4(c)	4~10	-0.689	7.081	31.055	45.517
Fig.4(d)	4~10	-5.223	6.870	42.345	29.734

Table 2 The effect of smoothing parameter ω on calculating precision

ω	Iteration times	β	E_{rms} (%)		
			u	$\partial u / \partial x$	$\partial u / \partial y$
0.72	8	1.818	8.796	73.456	64.306
0.81	5	1.327	8.330	54.141	51.753
0.90	4	0.550	7.474	39.807	44.790
1.00	3	-0.689	7.081	31.055	45.517

4.3 不规则曲面重建实例

图 5 是一个不规则曲面重建的实例. 方形区域内分布 225 个测点(如图 5(a)所示), 图 5(b)是直接由原始数据构成的曲面. 方形区域分割成 7×7 个八节点等参单元, 包含 176 个有限元节点, 每个单元包含 4~8 个数据点. 取 $\omega = 0.95$, $\beta_0 = 0$, 收敛精度取为 $\epsilon = 10^{-5}$, 经五次迭代后收敛于 $\beta = -2.305$. 图 5(c)给出的是由有限元拟合的曲面, 图 5(d)给出的是由光顺-有限元方法重建的曲面. 可以看出, 光顺-有限元方法重建的曲面比较光滑, 而有限元拟合的曲面却包含了较多的起伏波动.

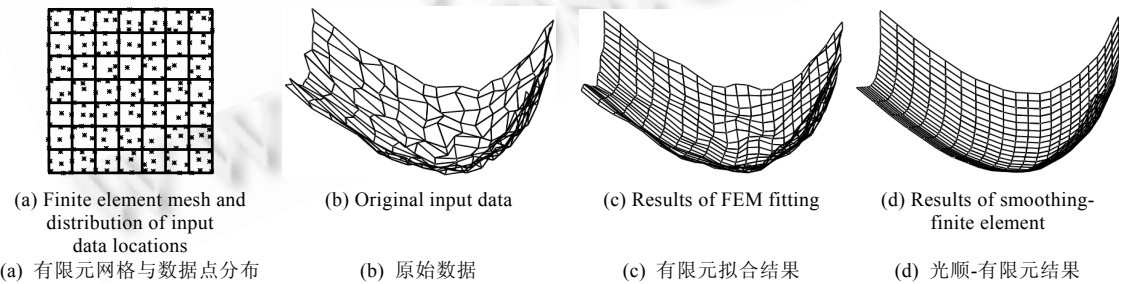


Fig.5 Reconstruction of an irregular surface

图 5 不规则曲面的重建

5 总结与结论

(1) 本文提出了一种基于不规则分布的数据点重建三维曲面的光顺-有限元方法. 该方法根据数据光顺与最佳逼近相结合的概念建立目标泛函, 采用有限元法求解, 并通过 Newton-Raphson 方法计算 Lagrange 乘子.

- (2) 计算实例表明,该方法具有比较好的滤除误差噪声的效果,重建的曲面具有较高的逼近精度和光顺性.
- (3) 该方法对数据点分布形式没有任何特殊要求,对均匀及散乱分布数据点的曲面重建问题同样适用.
- (4) 采用这种方法所需的数据点数远少于拟合与插值方法,因而其描述曲面的能力更强.
- (5) 该方法采用了八节点等参数单元,对数据点所分布的区域形状没有任何限制,可用于任意不规则边界的曲面重建问题.

References:

- [1] Jetter K, Stocker J, Ward JD. Error estimates for scattered data interpolation on spheres. *Mathematics of Computation*, 1999, 68(226):733~747.
- [2] Hoppe H, DeRose T, Duchamp T, McDonald J, Stuetzle W. Surface reconstruction from unorganized points. *Computer Graphics*, 1992,26(2):71~78.
- [3] Peters J. Local smooth surface interpolation: a classification. *Computer Aided Geometric Design*, 1990,7(1-4):191~196.
- [4] Liu DY, Hu KS. Fitting of Bézier surface. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 1984,7(2):250~256 (in Chinese with English abstract).
- [5] Mo CL, Tan JR, Zhang SY. Adaptive linear neural network based fractal generation of free surface. *Journal of Software*, 2001, 12(4):592~598 (in Chinese with English abstract).
- [6] Wang Q, Wang RQ, Bao HJ, Peng QS. A fast progressive surface reconstruction algorithm for unorganized points. *Journal of Software*, 2000,11(9):1221~1227 (in Chinese with English abstract).
- [7] Lawson CL. Software for C^1 surface interpolation. In: Rice JR, ed. *Mathematical Software III*. New York: Academic Press, 1977.
- [8] Farin G. Smooth interpolation to scattered 3D data. In: Barnhill RE, Boehm W, eds. *Surface in CAGD*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1983.
- [9] Segalman DJ, Woyak DB, Rowlands RE. Smooth spline-like finite-element differentiation of full-field experimental data over arbitrary geometry. *Experimental Mechanics*, 1979,19(12):429~437.
- [10] Sarkar B, Menq CH. Smooth-Surface approximation and reverse engineering. *Computer-Aided Design*, 1991,23(9):623~628
- [11] Franke R. Scattered data interpolation: tests of some methods. *Mathematics of Computation*, 1988,57(181):181~200.
- [12] Whelan T. A representation of a C^2 interpolant over triangles. *Computer Aided Geometric Design*, 1986,3(1):53~66.
- [13] Celniker G, Gossard D. Deformable curve and surface finite elements for free-form shape design. *Computer Graphics*, 1991, 25(4):257~266.
- [14] Reinsch CH. Smoothing by spline functions. *Numerische Mathematik*, 1967,10:177~183.
- [15] Cook RD, Malkus DS, Plesha ME. *Concepts and Applications of Finite-Element Analysis*. 3rd ed., New York: John Wiley & Sons, Inc., 1989.

附中文参考文献:

- [4] 刘鼎元,胡康生. Bézier 曲面拟合. *应用数学学报*, 1984,7(2):250~256.
- [5] 莫灿林,谭建荣,张树有. 基于自适应神经网络的自由曲面分形生成. *软件学报*, 2001,12(4):592~598.
- [6] 王青,王融清,鲍虎军,彭群生. 散乱数据点的增量快速曲面重建算法. *软件学报*, 2000,11(9):1221~1227.