

B-样条函数极小曲面造型*

满家巨^{1,2+}, 汪国昭²

¹(湖南师范大学 计算机科学系,湖南 长沙 410081)

²(浙江大学 数学系 计算机图象图形研究所,浙江 杭州 310027)

Approximating to Nonparameterized Minimal Surface with B-Spline Surface

MAN Jia-Ju^{1,2+}, WANG Guo-Zhao²

¹(Department of Computer Science, Hu'nan Normal University, Changsha 410081, China)

²(Institute of Computer Graphics and Imaging Processing, Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

+ Corresponding author: Phn: 86-731-8884651, Fax: 86-731-8884651, E-mail: jjman@public.cs.hn.cn

Received 2001-11-27; Accepted 2002-08-13

Man JJ, Wang GZ. Approximating to nonparameterized minimal surface with B-spline surface. *Journal of Software*, 2003,14(4):824~829.

Abstract: The minimal surfaces have been extensively employed in many areas such as architecture, aviation, ship manufacture, and so on. However, the complexity of the minimal surface equation prevents people from modeling the minimal surface in CAD/CAGD. In this paper, based on the nonlinear programming and the FEM (finite element method), the approximation to the solution of the minimal surface equation bounded by Bézier or B-spline curves is investigated. A global method, which is called numerical extension method, is appealed to in the whole iterative process and linearize the nonlinear finite element system by using a simple iteration. Some numerical results are given in this paper.

Key words: minimal surface; Bézier surface; B-spline surface; numerical extend; finite element

摘要: 极小曲面在建筑、航空、轮船制造等领域有着重要应用,但由于极小曲面表示复杂,给实际应用带来了很大的困难.研究了具有给定边界的极小曲面的 B-样条函数曲面逼近.基于非线性约束优化方法和有限单元方法,求极小曲面方程的近似解.在算法中使用数值延拓方法,使非线性问题的初值选择问题自动化,同时,使用一个简单的线性化策略对非线性问题进行线性化,给出了几个数值结果.

关键词: 极小曲面; Bézier 曲面; B-样条曲面; 数值延拓; 有限元

中图法分类号: TP391 **文献标识码:** A

极小曲面问题是微分几何领域中一个古老而活跃的主题^[1].该问题最早由 Lagrange 提出来并进行了研究. Lagrange 给出了极小曲面方程即所谓的 Euler-Lagrange 方程.后来,由于 Plateau 在极小曲面方面的工作,人们

* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.19971079 (国家自然科学基金); the National Grand Fundamental Research 973 Program of China under Grant No.G1998030600 (国家重点基础研究发展规划(973))

第一作者简介: 满家巨(1966—),男,湖南慈利人,博士,副教授,主要研究领域为计算机图形学,计算机辅助几何设计.

的注意力开始转移到所谓的 Plateau 问题上来,即给定一条闭的可求长的空间 Jordan 曲线,寻找以这条空间曲线为边界的具有极小面积的曲面.

极小曲面以平均曲率恒为 0 作为特征,因此除了在有限个点以外,极小曲面的 Gauss 曲率恒为负,所以,极小曲面具有很多优良的性质,其结构稳定,自然光顺,在建筑设计、飞机轮船制造、分子化学、晶体学等各个领域都有很重要的应用.例如,用极小曲面作房顶曲面,结构很稳定,美观大方,特别是有不积水的特点.

Enneper 曲面是一个著名的三次参数多项式极小曲面的例子.文献[2]使用 Enneper 曲面进行房顶曲面设计的研究,文献[3]证明了实际上 Enneper 曲面是惟一的一类三次参数多项式极小曲面.该文还给出了一个参数多项式曲面表示极小曲面的充分条件.虽然这些多项式极小曲面可以适用于 CAD/CAGD 系统,但它们的自由度太少,不便于控制,在实际应用中极不方便,所以研究具有给定边界的能够表达成 Bézier 曲面形式的极小曲面,对于将极小曲面引入 CAD/CAGD 系统具有积极的意义.

极小曲面方程是一个非线性的二阶椭圆型方程,一般没有解析解,这给极小曲面在 CAD/CAGD 领域的应用带来极大的困难.极小曲面问题在二维情形就是两个平面区域之间的共形映射问题.共形映射和极小曲面问题都与相应的曲面 Dirichlet 能量有关.它们使曲面的面积和 Dirichlet 能量达到极小.文献[4]指出,仅仅对 Dirichlet 能量进行极小化,得不到满意的结果,因此引进了一个所谓的共形能量泛函,通过对该共形能量极小来计算共形映射和离散的极小曲面.

参数 Plateau 问题就是要寻找具有给定边界的曲面面积最小的参数曲面.Douglas 和 Rado 将问题转化为在等温参数或称共形参数化下,Dirichlet 能量极小的问题.Plateau 问题的解具有如下性质:

- (1) f 的各个坐标分量函数是 Ω 上的调和函数;
- (2) u, v 是等温参数,即满足 $f_u \cdot f_u - f_v \cdot f_v = f_u \cdot f_v = 0$.

因此,参数极小曲面问题实际上是在满足给定边界条件下,曲面参数化的最优化问题.这给参数极小曲面方程的求解带来了极大的困难.有许多文章研究参数 Plateau 问题的数值解^[4-9].

对于形如 $z = f(x, y)$ 的极小曲面问题,就是求解二阶非线性椭圆偏微分方程的问题.文献[10]研究了该方程的差分求解方法.本文研究矩形域上以给定的 Bézier 曲线或者 B-样条曲线为边界的极小曲面问题.对于极小曲面的近似 Bézier 解,我们采用对面积极小化的优化方法.对于极小曲面的近似 B-样条解,我们采用有限元方法进行求解.

1 问题描述

极小曲面方程是函数形式的 Plateau 问题的 Euler-Lagrange 方程,我们可以对其描述如下:

假定 $C: \varphi(x, y)$ 表示一条空间可求长的 Jordan 曲线, Ω 为 C 在平面上的投影 $\partial\Omega$ 所围成的区域.定义函数空间:

$$X: \{z = z(x, y): \Omega \rightarrow \mathbf{R} \mid z(\partial\Omega) = C\},$$

Plateau 问题就是要在 X 中寻求一个面积最小的曲面.曲面 $z = z(x, y)$ 的面积可以表示为

$$A(z) = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dx dy. \tag{1}$$

这个面积泛函的逗留点称为极小曲面,它应该满足 Euler-Lagrange 方程:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z_x}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z_y}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \right) = 0, \tag{2}$$

即极小曲面方程.这个方程是一个非线性的偏微分方程,方程的求解是一项非常困难的工作.文献[10]讨论了极小曲面方程的差分求解方法.但该方法计算量太大,涉及到大量的一阶和二阶导数的计算.另外,差分是离散的解,对于造型来说有很多不方便之处.由于 NURBS 是当前最流行的曲面造型方法,因此我们将讨论如何用 Bézier 曲面和 B-样条曲面逼近极小曲面方程的解.

2 以给定 Bézier 曲线为边界的近似极小曲面

考虑 Bernstein 多项式函数曲线 $f(x) = \sum_i^n b_i B_i^n(x)$. 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $\sum_{j=0}^n \frac{j}{n} B_j^n(x) = x$, 因此, 该函数曲线的控制点由 $(i/n, b_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$ 给出. 相应地, 对于函数 Bézier 曲面, 其控制网格是单位矩形 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ 上的均匀剖分的网格. 双三次 Bézier 曲面是实际应用中常用的曲面, 因此, 下面我们讨论用双三次 Bézier 曲面表示的近似极小曲面.

假定 Γ 是由 4 条给定的平面三次 Bézier 曲线围成的封闭曲线, 我们不能希望这条曲线张成的极小曲面仍然能表示成 Bézier 曲面的形式, 但是, 我们完全可以构造近似双三次 Bézier 曲面来逼近由 Γ 张成的极小曲面.

假定非线性优化问题:

$$\min_{z \in X} \iint_{\Omega} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \tag{3}$$

的近似解为 $z(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 b_{ij} B_i^3(x) B_j^3(y)$, 其中 $b_{0j}, b_{3j}, b_{i0}, b_{i3}$ 由边界条件决定. 确定其余几个 Bézier 系数是一个非线性约束优化问题. 我们采用基于一维线性搜索的整体收敛的 Newton 迭代方法来求解. 其基本的迭代格式为

$$X^{i+1} = X^i + \lambda_i \cdot p_n.$$

步长 λ_i 采用回溯线性搜索方法确定, 下降方向 p_n 是 Newton 方向, 这种非线性优化方法是一个比较成功的具有整体收敛性的方法, 对于初值的选择没有苛刻的要求. 图 1 和图 2 分别是使用该算法的两个计算实例.

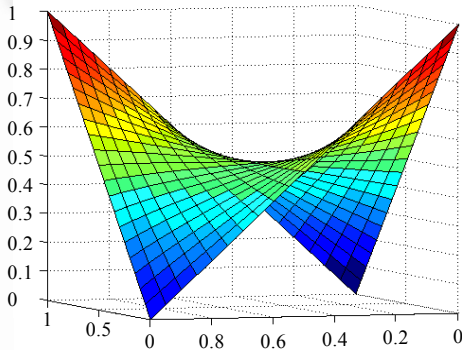


Fig.1 Approximating to Schwarz surface with nonparameterized bicubic Bézier surface
图 1 用双三次 Bézier 函数曲面逼近 Schwarz 极小曲面

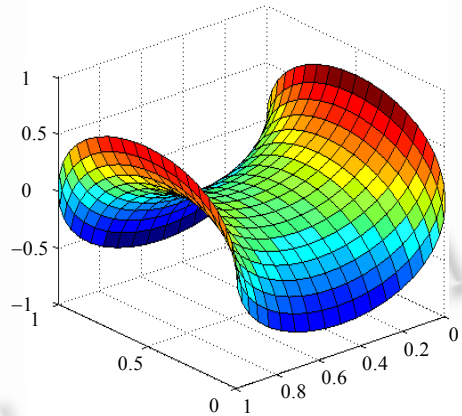


Fig.2 Approximating to the saddle bounded by four cubic parabola
图 2 以 4 条三次抛物线为边界的马鞍状极小曲面的逼近曲面

3 用 B-样条曲面表示极小曲面近似解

文献[1]讨论了极小曲面方程

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z_x}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z_x}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \right) = 0$$

的差分求解方法. 但该方法计算量比较大, 涉及到大量的一阶和二阶导数的计算.

有限元方法是求解偏微分方程的行之有效的办法^[11], 但由于极小曲面方程是一个强非线性的方程, 因此在使用有限元方法求解时存在几个本质上的困难, 一个是每次迭代都是一个强非线性方程组的求解问题, 计算量很大, 更大的困难在于刚度矩阵的集成. 因此, 如何选择一个线性化策略就是使用有限元方法有效求解极小曲面方程的关键. 本文使用一个有效的线性化策略, 将极小曲面方程的求解转化为一系列线性问题的求解, 从而给出

了一个非常简单的有限元方法,有关离散极小曲面方程及其解的存在性证明见文献[11].

在有限元方法中,一般都选择分片线性函数空间作为有限元空间,这使问题得到简化,而且自由度少,但是由于极小曲面方程的解至少是 C^2 连续的,因此我们选择双三次 B-样条函数空间作为有限元空间应该更好地逼近极小曲面方程的解,而且双三次 B-样条曲面形式更适合于各种造型应用.

偏微分方程的有限元方法是利用分片多项式函数求解方程近似解的一般方法.该方法首先确定适当的有限元子空间,然后利用各种方法将问题转化为线性的或非线性的方程组.由于均匀 B-样条函数没有端点插值性质,不能自动满足边界条件^[12],因此我们选择准均匀 B-样条函数空间作为有限元子空间.

给定区间 $[a, b]$ 上的均匀剖分 $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, $t_i = \frac{i}{n}(b-a) + a$, 引入另外 4 个节点 $t_{-2} = t_{-1} = t_0$, $t_{n+2} = t_{n+1} = t_n$, 这一组节点决定了 $n+3$ 个 B-样条基函数,记为 $B_i(t)$, $i = -1, 0, \dots, n+1$. 容易证明,当 $t \in [a, b]$ 时,有 $\sum_{i=-1}^{n+1} b_i B_i(t) = t$, 其中, $b_{-1} = a$, $b_0 = a + \frac{b-a}{3n}$, $b_{n+1} = a$, $b_n = b - \frac{b-a}{3n}$, $b_i = \frac{i}{n}(b-a) + a$, $i = 1, \dots, n-1$. 由于这一性质,对于 B-样条函数曲线,与参数曲线一样,我们可以定义其控制多边形,以便于实际应用.对于矩形区域 $\Omega = [a, b] \times [c, d]$, 做 $n \times m$ 均匀剖分,对应的张量积 B-样条基函数为 $\{B_i(x)B_j(y)\}_{i,j=-1}^{n,m}$. 为方便起见,重新排列基函数为线性序列 $\{C_i\}_{i=0}^{n+2}$, 令 $X = span\{C_i\}$, 定义试探函数空间为

$$V = \{v(x, y) \in X \mid v(x, y) = 0 \text{ on } \partial\Omega\}.$$

我们的问题是在空间 X 中求解如下方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \right) = 0, & \text{in } \Omega \\ z(x, y) = \varphi(x, y), & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (4)$$

这等价于对任意 $v \in V$, $\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \right) \right) v dx dy = 0$, 因此,方程(2)对应的弱形式是

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \frac{z_x v_x + z_y v_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} dx dy = 0, & \text{in } \Omega \\ z(x, y) = \varphi(x, y), & \text{on } \partial\Omega \end{cases}.$$

对于 Ω 上的均匀矩形网格剖分,在每个单元 Ω_e 上有

$$\int_{\Omega_e} \frac{z_x v_x + z_y v_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} dx dy = 0, \quad \text{in } \Omega_e. \quad (5)$$

对于每个单元 Ω_e , 设对应的基函数向量记为 $C_e = [C_1^e, \dots, C_{16}^e]$, 相应的控制系数向量为 $b_e = [b_1^e, \dots, b_{16}^e]$, 对应于试探函数的控制系数向量为 $v_e = [v_1^e, \dots, v_{16}^e]$, 则有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \frac{z_x v_x + z_y v_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} dx dy &= \int_{\Omega_e} \frac{v_e (C_{ex}^T C_{ex} + C_{ey}^T C_{ey}) b_e}{\sqrt{1+b_e (C_{ex}^T C_{ex} + C_{ey}^T C_{ey}) b_e}} dx dy \\ &= v_e \left[\int_{\Omega_e} \frac{(C_{ex}^T C_{ex} + C_{ey}^T C_{ey})}{\sqrt{1+b_e (C_{ex}^T C_{ex} + C_{ey}^T C_{ey}) b_e}} dx dy \right] b_e \\ &= 0. \end{aligned}$$

由于 v 的任意性,有

$$\left[\int_{\Omega_e} \frac{(C_{ex}^T C_{ex} + C_{ey}^T C_{ey})}{\sqrt{1+b_e (C_{ex}^T C_{ex} + C_{ey}^T C_{ey}) b_e}} dx dy \right] b_e = 0. \quad (6)$$

在整个区域 Ω 上有

$$\sum_e \left[\int_{\Omega_e} \frac{(C_{ex}^T C_{ex} + C_{ex}^T C_{ex})}{\sqrt{1 + \mathbf{b}_e (C_{ex}^T C_{ex} + C_{ex}^T C_{ex}) \mathbf{b}_e}} dx dy \right] \mathbf{b}_e = 0. \quad (7)$$

方程组(7)是一个非线性的方程组,有许多求解非线性方程组的方法可以使用,最常见的是使用 Newton 迭代方法及其各种变形.在使用 Newton 迭代方法求解时,其刚度矩阵与自变量有关,随着迭代的动态变化,在迭代过程中还涉及到复杂的求导运算,因此刚度矩阵的集成和方程组的求解是一个十分困难的问题.

非线性方程组的求解在本质上是一个线性化过程.我们注意到,随着迭代的进行,两次迭代值之间的误差越来越小,因此我们采用如下简单迭代过程:假设第 k 次迭代值 $\mathbf{b}^{(k)}$ 已经求得,在第 $k+1$ 次迭代过程中,我们使用前一次的迭代值来计算 $\sqrt{1 + \mathbf{b}_e (C_{ex}^T C_{ex} + C_{ex}^T C_{ex}) \mathbf{b}_e}$,即每次迭代过程都是求解如下的线性方程组:

$$\sum_e \left[\int_{\Omega} \frac{C_{ex}^T C_{ex} + C_{ex}^T C_{ex}}{\sqrt{1 + \mathbf{b}_e^k (C_{ex}^T C_{ex} + C_{ex}^T C_{ex}) \mathbf{b}_e^k}} dx dy \right] \mathbf{b}_e^{k+1} = 0.$$

这个迭代过程一直进行,直至达到给定的误差范围为止.数值结果表明,我们的迭代算法是线性收敛的.

通常在求解非线性问题时,初值的选择非常重要,它影响到算法的收敛性.通常的 Newton 迭代方法只具有局部收敛性,数值延拓方法能够较好地解决大范围收敛性问题.我们采用连续性方法,引入一个时间变量,将问题(2)转换为以下问题:

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \frac{z_x v_x + z_y v_y}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} dx dy, & \text{in } \Omega \\ z(x, y) = t \varphi(x, y), & \text{on } \partial \Omega \end{cases}, \quad (8)$$

其中 $t \in [0, 1]$.显然, $t=0$ 时问题(8)的解就是 $z=0$, $t=1$ 时问题(8)的解,也就是问题(5)的解.当 $t \rightarrow 1$ 时,问题(8)的解已经为问题(5)提供了一个足够好的初值.

连续延拓的方法本质上是求解力学问题时经常使用的逐次加载的方法.我们可以看出,从 $t=0$ 延拓到 $t=t_{m-1}$ 的计算结果为最后求解原来的问题(即 $t=1$)提供一个合理的初值.因此,在具体实现时,为了提高计算速度,我们在每次延拓中只需迭代 2~3 次即可,甚至迭代 1 次就可以了,在最后一次延拓中,则需要迭代多次,以得到满足精度要求的结果.实验还表明,对 t 做三次剖分就可以得到很好的结果.图 3 和图 4 给出了使用本文的算法计算的数值结果.结果显示的是 B-样条近似解的控制网格.表 1 给出了对应的迭代误差.结果表明,我们的方法至少是线性收敛的.

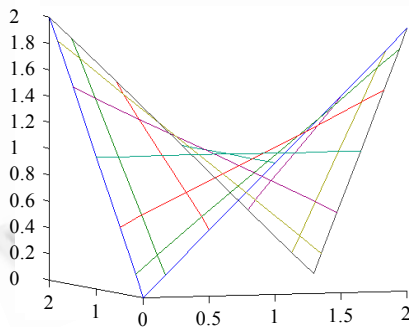


Fig.3 Nonparameterized B-Spline control net approximating to Schwarz's surface

图 3 Schwarz 极小曲面的 B-样条函数逼近的控制网格

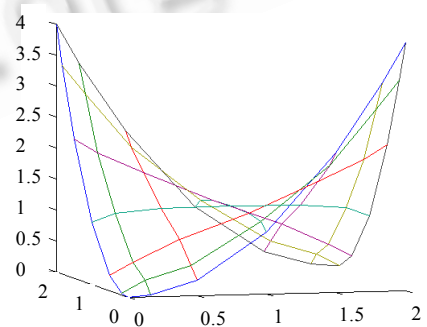


Fig.4 Nonparameterized B-Spline control net approximating to the saddle surface

图 4 马鞍面的 B-样条逼近控制网格

在前一节中我们使用的非线性约束优化方法,要求的时间代价比较高.实际上,Bézier 曲面是 B-样条曲面的特殊情况.因此,我们可以使用本节的方法计算极小曲面的 Bézier 曲面逼近,从而提高处理速度.

Table 1 The errors corresponding to Fig.3 and Fig.4 respectively
表 1 对应于图 3 和图 4 的迭代误差

Times of iteration	Errors corresponding to Fig.3	Errors corresponding to Fig.4
1	5.7500	3.0672
2	9.7532e-004	0.0580
3	1.7594e-006	0.0050
4	3.8842e-009	8.8376e-004
5	1.1111e-011	2.2787e-004
6	4.7761e-014	5.5285e-005
7	6.6649e-015	1.3033e-005
8	5.9026e-015	3.0372e-006

4 结 论

由于极小曲面的重要意义,将极小曲面引入 CAGD 是很有意义的工作.由于极小曲面表达复杂,我们希望寻求适合 CAGD 系统使用的极小曲面的表达方式.为此我们讨论了矩形域上极小曲面方程的 Bézier 函数曲面和 B-样条函数曲面近似解.对于任意区域上的问题,在直接应用 B-样条函数空间求解时很难处理边界条件.文献 [13]利用区域几何描述函数作为权函数研究了 Dirichlet 问题的加权 B-样条函数逼近.这个方法也可以用来解决任意区域上的极小曲面方程.由于参数极小曲面问题所存在的特殊困难,我们不能直接应用本文的方法.虽然有很多文献讨论了参数极小曲面问题的数值求解方法,但他们都是基于分片线性逼近的方法.极小曲面本身至少是二阶光滑的,因此,如何使用参数样条曲面逼近参数极小曲面仍然是一个需要继续研究的问题.

References:

- [1] Nitsche JCC. Lectures on Minimal Surface, Volume I. Cambridge University Press, 1988.
- [2] Jin WB. Modeling and applications of some special surfaces [PH.D. Thesis]. Hangzhou: Zhejiang University, 1999 (in Chinese with English abstract).
- [3] Man JJ, Wang GZ. Polynomial minimal surface in Isothermal parameter. Chinese Journal of Computers, 2002,25(2):197~201 (in Chinese with English abstract).
- [4] Hutchinson JE. Computing conformal maps and minimal surfaces. Proceedings of Center for Mathematical Analysis, Canberra, 1991,26:140~161.
- [5] Dziuk G, Hutchinson JE. The discrete Plateau problem. Mathematics of Computation, 1999,68(2):1~23.
- [6] Hinze M. On the numerical approximation and computation of minimal surface continua bounded by one-parameter families of polygonal contours. Applied Numerical Mathematics, 1997,25(1):89~116.
- [7] Pinkall U, Polthier K. Computing discrete minimal surface and their conjugates. Experiment Mathematics, 1993,2(1):15~36.
- [8] Tsuchiya T. On two methods for approximating minimal surfaces in parametric form. Mathematics of Computation, 1986,46(4): 517~529.
- [9] Walter L, Wilson JR. On discrete Dirichlet and Plateau problem. Numerical Mathematics, 1961,(3):359~373.
- [10] Concus P. Numerical solution of the minimal surface equation. Mathematics of Computation, 1967,21:340~350.
- [11] Ciaret PG. The Finite Element Method for Elliptic Problems. North-Holland: North Holland Publishing Company, 1978.
- [12] Prenter PM. Splines and Variational Methods. John Wiley & Sons, Inc., 1975.
- [13] Holligm K, Reif U, Wipper J. Weighted extended B-spline approximation of Dirichlet. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2001,39(2):442~462.

附中文参考文献:

- [2] 金文标.若干特殊曲面的造型和应用[博士学位论文].杭州:浙江大学,1999.
- [3] 满家巨,汪国昭.等温参数多项式极小曲面.计算机学报,2002,25(2):197~201.