

水平集演化中的奇点与改进的窄带算法*

于洪川[†], 王德军, 唐泽圣, 唐 龙

(清华大学 计算机科学与技术系 计算机软件研究所, 北京 100084)

Singular Points in Level Set Evolution and Revised Narrow Banding Algorithm

YU Hong-Chuan[†], WANG De-Jun, TANG Ze-Sheng, TANG Long

(Division of Computer Software, Department of Computer Science and Technology, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

+ Corresponding author: Phn: 86-10-62782609, E-mail: yhc@cad.cs.tsinghua.edu.cn

<http://vis.cs.tsinghua.edu.cn>

Received 2001-07-25; Accepted 2001-11-05

Yu HC, Wang DJ, Tang ZS, Tang L. Singular points in level set evolution and revised narrow banding algorithm. *Journal of Software*, 2003,14(4):811~817.

Abstract: In this paper, the process of level set evolution with distance function restriction is analyzed in detail. The concept of singular point is put forward, its important property is proposed and proved, and its influence to the level set evolution is analyzed. Based upon these results, the narrow banding algorithm is revised in order to avoid the singular points during evolutions. And the narrow bandwidth can be modified adaptively in the revised narrow banding algorithm. The experimental results indicate that the revised narrow banding algorithm is robust.

Key words: level set method, singular point, narrow banding algorithm, narrow bandwidth

摘 要: 对保持距离函数约束的水平集演化过程作了系统的分析,提出了奇点的概念,并给出了奇点的重要性及其证明,详细分析了奇点在水平集演化过程中的数值影响.在此基础上对窄带算法作了改进,以避免奇点的不良影响,同时窄带宽度具有自适应性.实验结果表明,改进的窄带算法具有较好的鲁棒性.

关键词: 水平集方法;奇点;窄带算法;窄带宽度

中图法分类号: TP391 文献标识码: A

水平集方法(level set method)主要是从界面传播等研究领域逐步发展起来的,它是处理封闭运动界面随时间演化过程中几何拓扑变化的有效的计算工具.Osher 和 Sethian^[1]首先提出依赖时间的运动界面的水平集描述.其主要思想是将移动的界面作为零水平集嵌入高一维的水平集函数中,这样,由闭超曲面的演化方程可以得到水平集函数的演化方程,而嵌入的闭超曲面总是其零水平集,最终只要确定零水平集即可确定移动界面演化的结果.这种方法自提出以来,已在界面演化、流体力学、燃烧、材料力学、图像处理、计算机视觉等领域得到广泛的应用.

目前,许多学者对水平集方法做了大量有益的研究和应用工作^[2-4],而较为重要的是保持距离函数约束的

* Supported by the Combined Foundation of the National Natural Science Foundation of China and the Research Grants Council of Hong Kong of China under Grant No.6001161942 (国家自然科学基金委员会与香港研究资助局联合资助项目)

第一作者简介: 于洪川(1969—),男,山东平度人,博士,助理研究员,主要研究领域为计算机视觉,医学图像处理.

水平集方法策略^[5,6].它是在原有水平集方程组中加入了距离函数约束,按此约束水平集方法在实现中的重要改变是沿零水平集法线方向上,速度函数项保持不变.这就是说,只要求计算零水平集上每一点的速度函数项,其他非零水平集上任意一点的速度函数项可以沿零水平集法线,通过赋零水平集上对应点的速度函数值来确定,因此在计算过程中极大地降低了计算复杂度.但我们通过研究发现,在非零水平集的某些区域存在某些点,它们按上述方法所赋予的速度函数值不惟一,我们称其为奇点.文献[5]已经注意到这类点的存在,并将它们的集合称为“骨架”(skeleton),通过提取奇点的集合来实现对区域形状骨架的提取,但忽略了考察奇点在曲线演化过程中的影响.我们通过研究发现,奇点对曲线演化过程影响甚大,通常会造曲线的拓扑改变,甚至消失,最终可能会导致曲线演化失败.因此有必要对奇点问题作系统研究,分析奇点的产生、所具有的性质、对水平集方法的数值影响以及解决方法等.

窄带算法是水平集方法实现中常用的算法,其主要思想是只更新零水平集附近点的水平集函数值,而无须计算整个搜索空间中每一点的水平集函数值,以此来提高水平集方法的计算效率.但该算法存在明显的缺陷,即窄带宽度是人为设定的,过宽必然会加大计算量,过窄则必然影响水平集函数值的差分迭代,因此如何选取宽度成为提高窄带算法效率的关键.本文将奇点问题与窄带算法结合起来,所给出的改进算法既可以避免奇点的不良影响,又可以自适应地给出窄带宽度估计.

本文第1节给出奇点问题的提出背景.第2节对奇点问题作系统分析,首先证明奇点所具有的重要性质,然后结合窄带算法给出窄带宽度的估计方法,以此作为改进的窄带算法来克服奇点对水平集方程演化的影响.第3节将我们提出的理论和方法分别应用于医学图像分割实验中,并给出实验分析.第4节是结论.

1 问题的提出

考虑一族闭超曲面 $S(p, t) \in R^3$, 其中 p 是曲面参数, t 是时间参数. 根据欧氏最短流理论, $\frac{\partial S}{\partial t} = \beta N$, 初始条件为 $S|_{t=0} = S_0$, 其中 N 为演化曲面 S 的法向量, β 是速度函数, S_0 是初始闭曲面. 为求解该 PDE, 引入水平集方法作为数值计算方法. 该方法的本质是引入了水平集函数, $\phi: R^n \times R^+ \rightarrow R$, 它是演化界面的隐函数, $\forall t, \phi(S, t) = 0$. 初始水平集函数 $\phi|_{t=0}$ 定义为相对于 S_0 的有向距离函数. 文献[6]提出距离函数约束可以表示为 $|\nabla \phi| = 1$, 并且对水平集方程组:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} = F|\nabla \phi| \\ F|_{\phi=0} = \beta \\ \phi(\cdot, 0) = \text{dist}(\cdot, S_0) \end{cases} \quad (\text{其中 } \text{dist}(\cdot, S_0) \text{ 为相对于 } S_0 \text{ 的有向距离函数})$$

给出了该方程组的解保持为距离函数的充要条件 $\nabla \phi \cdot \nabla F = 0$. 文献[5]也有类似的结果.

考察以上条件不难看到, 无论是在初始过程还是在演化过程中, 零水平集中任意点的法线上, 速度函数应保持一致, 即都取零水平集上该点的速度函数值. 由于零水平集所对应的演化曲线是封闭曲线, 因此法线上的点应按照距离最近原则, 赋予零水平集上对应点的速度函数值.

这自然会带来二义性问题, 即存在某些非零水平集上的点, 按照到零水平集最短距离原则, 在零水平集上有多个距离相等的最近点, 我们称这些点为奇点. 文献[5]将这些点的集合称为“骨架”. 我们之所以要提出“奇点”的概念, 而不是沿用以往研究者所使用的“skeleton 中的点”, 是基于数学上的考虑, 即水平集函数在这类点处不是连续可微的, 水平集方程在这类点处没有定义. 事实上, 这些奇点对曲线演化影响较大, 如果不加以控制通常会导演化结果失败, 对此, 我们将在下一节中作详细分析.

2 奇点问题分析

2.1 奇点的性质

在上一节中我们根据二义性给出了奇点的直观定义,而奇点是在水平集方程演化过程中出现的,事实上,在奇点处 $|\nabla\phi|$ 不存在,水平集方程在该点处没有定义,以下命题将对此给出严格证明. 设 $S_0 \subset R^2$ 为光滑闭曲线, $S_0: \bar{r}(s) \in R^2, a \leq s \leq b, \bar{r}(a) = \bar{r}(b)$, 记 $\phi(x, y)$ 为 $(x, y) \in R^2$ 到 S_0 的距离函数, $\phi: R^2 \rightarrow R$, 有以下命题

命题 1. 对于 $P_0 = (x_0, y_0) \in R^2, \phi$ 在 P_0 处可微, 当且仅当在 S_0 上只有一点 $Q_0 \in S_0$, 使得

$$\phi(x_0, y_0) = \text{dist}(P_0, Q_0).$$

命题 1 的证明见附录.

根据上述命题可知, 在奇点处水平集方程没有定义, 这将会导致水平集方程在演化过程中遇到奇点时变得不确定, 容易产生误差. 奇点一般可分为两类. 一类是永久奇点, 如图 1 所示, $C(\bar{r})$ 是演化曲线, C_1 是阴影部分的边界, 也即待提取的边界. 如果速度函数是关于 \bar{r} 的函数, 那么我们会发现, 在演化过程中, 零水平集始终保持为圆的形状, 朝着 C_1 进化, 而原点 O 始终为奇点, 因而称为永久奇点. 另一类是临时奇点, 如图 2 所示, $C(\bar{r})$ 是演化曲线, C_1 是阴影部分的边界, 也即待提取的边界. 显然初始时 $t=0$, Y -轴与阴影部分的交点是奇点, 而当 $t>0$ 时, 它们不再是奇点, 因而称为临时奇点.

事实上, 无论是哪一种奇点 \bar{x} , 按零水平集法线方向赋值约束, 都存在某些非奇点序列 $\{\bar{x}_i\}$,

$$\lim_{\bar{x}_i \rightarrow \bar{x}} (F(\bar{x}_i))$$

应是不同序列 $\{\bar{x}_i\}$ 对奇点处速度函数的赋值. 如果每个序列的极限值相同, 则奇点处速度函数可被赋值为该极限值. 这样做使速度函数的连续性和水平集函数的距离约束都可以得到保证. 对于永久奇点这种处理方法是十分有效的.

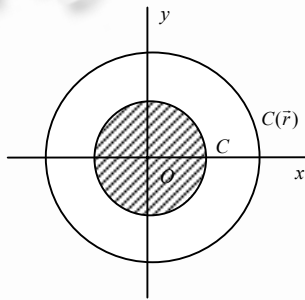


Fig.1 Permanent singular points
图 1 永久奇点

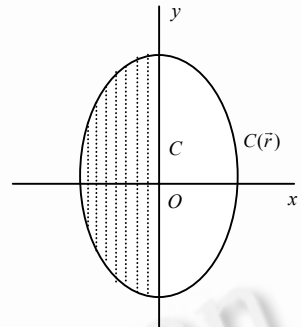


Fig.2 Temporary singular points
图 2 临时奇点

而对于临时奇点, 则很难找到极限相同的非奇点序列, 因此, 对该奇点处速度函数的赋值就变得十分复杂. 通常就是这类奇点对水平集方程演化影响较大, 下面我们详细讨论它们对水平集方程演化的影响.

2.2 改进的窄带算法

我们先分析奇点对水平集方程演化的影响, 然后再给出消除奇点的窄带算法. 在图 3 中, 阴影区域的形状需要被提取, $C_0(\bar{r})$ 是初始零水平集, 其左边部分与阴影部分轮廓相重合, 因此零水平集左侧部分点的速度函数取为 0 (因为零水平集已经达到目标位置), $F_L(\bar{r}, 0) = 0$, 而右侧部分点的速度函数应大于 0, $F_R(\bar{r}, 0) > 0$, 并且由于零水平集的形状而使奇点集中在 Y -轴与阴影相交部分.

考察水平集函数 $\phi=d$ 的 d -水平集演化过程, 当 $t=0$ 时, d -水平集对应的封闭曲线与 Y -轴的两个交点是 d -水平集上仅有的两个奇点, 当 $t=\Delta t$ 时, 由演化方程可知, $\phi(\bar{r}, \Delta t) = \phi(\bar{r}, 0) + \Delta t \times F(\bar{r}, 0)$, 显然, 对于左侧阴影部分中的每一点, 由于 $F = F_L(\bar{r}, 0)$, 则水平集函数不变, $\phi(\bar{r}, \Delta t) = \phi(\bar{r}, 0)$. 而对于右侧部分, 由于 $F = F_R(\bar{r}, 0)$, 则 $\phi(\bar{r}, \Delta t) > \phi(\bar{r}, 0)$.

此时 $\phi(\bar{r}, \Delta t)|_{\bar{r} \in C_1(\bar{r})} = 0$, 即零水平集从 $C_0(\bar{r})$ 演化到 $C_1(\bar{r})$ 处, $C_0(\bar{r})$ 与 $C_1(\bar{r})$ 左侧部分相重合. 对于 d -水平集可以看到, 其左侧部分有 $\phi(\bar{r}, \Delta t) = \phi(\bar{r}, 0) = d$, 右侧部分向内移动, 在虚线处 $\phi(\bar{r}, \Delta t) = d$, 由于水平集方程在奇点处没有定义, 按上述差分格式通常会导致演化曲线在奇点处断裂, 如图 3 所示, d -水平集与 Y -轴有 4 个交点. 由于分裂出的两个断点所赋速度函数值各不相同, 并且分裂出的两条非封闭曲线按照自身的几何性质收缩, 容易使

断点处的误差不断增大,这对于水平集方程演化是十分危险的,有时会导致收敛结果失败.因此,有必要研究避免奇点的解决方法.

通常在零水平集附近的某一区域里不会出现奇点,因而我们自然想到可以结合窄带算法来克服奇点的影响.窄带算法是为减少计算量而提出来的,具体实现可参阅文献[3],而窄带宽度的设定却没有明确的定义.如果

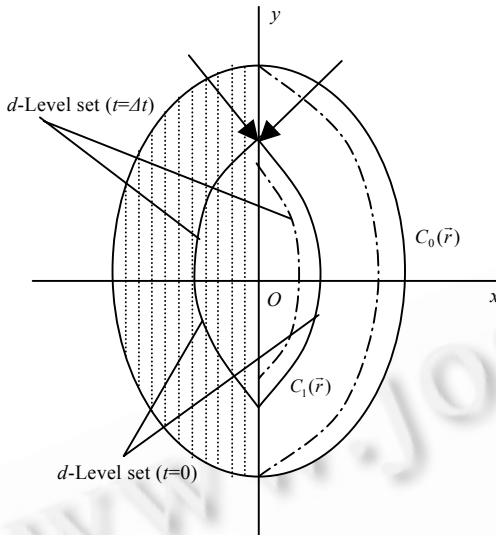


Fig.3 Singular points' influence to the level set evolution
图3 奇点对水平集演化的影响

设定的窄带宽度不包括奇点,则既达到了减少计算量的目的,又达到了避免奇点影响的效果,显然窄带宽度的确定不是随意的.文献[5]给出了提取“骨架”的方法,我们基于 skeleton 提取,有下面的命题:

命题 2. 对于某零水平集,如果窄带最大宽度 $h < \min\{\|\phi(\bar{x})\|: \bar{x} \in \text{skeleton}\}$, 则窄带内无奇点存在.

结果是显然的,证明从略.

综上所述,改进的窄带算法只是修改了构造窄带这一步骤,即先提取 skeleton,再通过命题 2 得到窄带宽度的最大估计,而不是预先设定窄带宽度.将此改进的窄带算法应用于水平集方法的实现中,可以有效地避免奇点的影响.当然也有例外,如果零水平集所对应的曲线出现尖角,则必然会导致奇点接近零水平集,尖角越小,奇点越接近零水平集,有时会出现奇点与零水平集间距小于 1

3 实验与分析

实验是对医学图像作边缘提取,分考虑窄带估计和不考虑窄带估计两种情况进行.

(1) 在不考虑窄带估计下考察水平集方程受奇点影响的演化过程.实验是对医学切片扫描图像作边缘提取,如图 4 所示.图 4(a)中折线是所选的初始零水平集,图 4(b)是经过一段时间演化后零水平集受奇点影响,发生断裂,并各自收缩成一封闭曲线,即曲线拓扑发生改变;图 4(c)是再经过一段时间演化后,零水平集分裂出的多个封闭曲线,逐渐消失,显然演化结果失败.

分析以上实验结果可以看到,零水平集受图像噪声、速度函数以及水平集方程作差分数值运算等因素的影响,变得不再光滑,因而奇点极易产生,造成演化曲线分裂,分裂的演化曲线按照自身的几何性质不断收缩,形成多个封闭曲线,并最终随时间演化而消失.当然也有分裂开的演化曲线,随时间的演化而相交,最终又合成一条封闭曲线,完成对边缘的提取.所有这些变化对于水平集方法都是合理的,因为水平集方法的一个突出特点是演化曲线具有很强的拓扑改变能力.

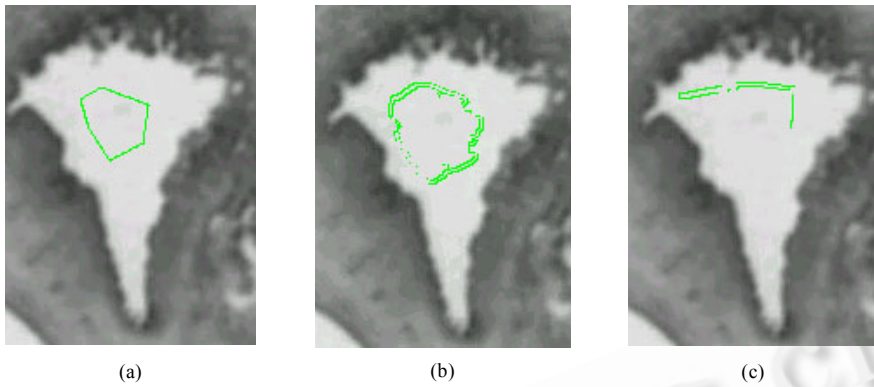


Fig.4 The evolving curve splitting and vanishing
图4 演化曲线分裂消失

(2) 当考虑窄带估计时,考察窄带宽度在演化过程中的自适应变化.实验是应用改进的窄带算法对医学 CT 图像作边缘提取,如图 5 所示.图 5(a)中有 3 条封闭曲线,中间一条是初始零水平集,内、外两条是所估计的窄带边界.图 5(b)~图 5(g)是在不同演化时刻,零水平集及其窄带位置,中间一条封闭曲线对应于零水平集.可以看到,在不同演化时刻,零水平集始终保持为封闭曲线,避免了奇点的影响.由于零水平集在演化过程中变得不光滑,在其附近容易出现奇点,因而窄带宽度变得很小,这表明,窄带宽度在一定程度上是可以自适应的.图 5(h)是演化结果,由于提取的边界比较光滑,零水平集附近没有出现奇点,因而窄带有所变宽.

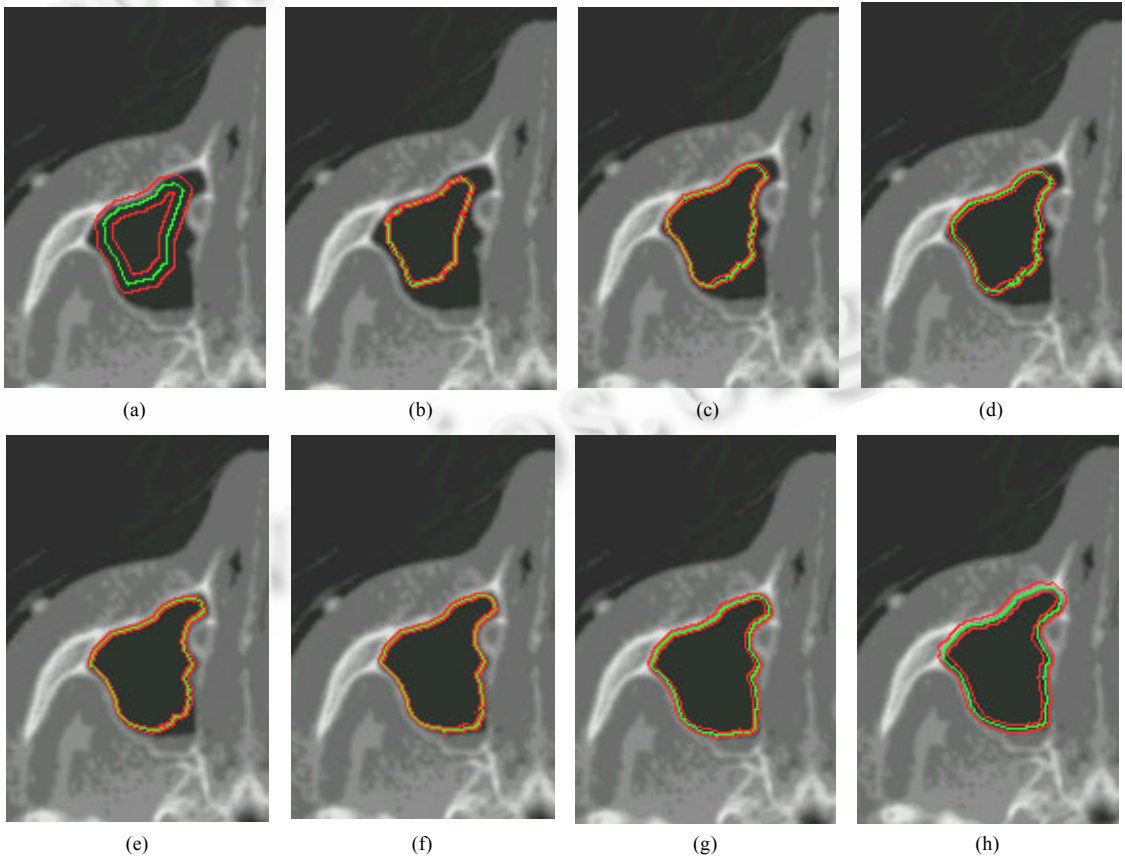


Fig.5 The narrow bandwidth vary during the curve evolution
图5 曲线演化过程中窄带变化

4 结 论

在本文中,我们对保持距离函数约束的水平集方法在实现过程中出现的奇点问题作了系统的分析.首先,证明了判别奇点的充要条件,并对奇点在水平集方程演化过程中的影响作了详细研究,并提出了改进的窄带算法,以避免奇点的影响.改进的窄带算法中的窄带宽度具有自适应性,可以有效地避免奇点.实验表明,改进的算法鲁棒性较强.

References:

- [1] Osher S, Sethian J. Fronts propagating with curvature dependent speed: Algorithms based on the Hamilton-Jacobi formulation. *Journal of Computational Physics*, 1988,79(1):12~49.
- [2] Chopp DL. Computing minimal surfaces via level set curvature flow. *Journal of Computational Physics*, 1993,106(1):77~91.
- [3] Chopp DL. Numerical computation of self-similar solutions for mean curvature flow. *Journal of Experimental Mathematics*, 1994, 3(1):1~15.
- [4] Sethian JA, Strain J. Crystal growth and dendritic solidification. *Journal of Computational Physics*, 1992,98(2):231~253.
- [5] Gomes J, Faugeras O. Level sets and distance functions. In: Vernon D, ed. *Proceedings of the 6th European Conference on Computer Vision*. LNCS 1842, Dublin: Springer-Verlag, 2000. 588~602.
- [6] Sethian JA. *Level Set Methods and Fast Matching Methods*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

附录: 命题 1 的证明.

命题 1. 对于 $P_0 = (x_0, y_0) \in R^2$, ϕ 在 P_0 处可微,当且仅当在 S_0 上只有一点 $Q_0 \in S_0$,使得

$$\phi(x_0, y_0) = \text{dist}(P_0, Q_0). \quad (1)$$

证明:(\Leftarrow) 设 S_0 上只有一点 Q_0 满足式(1),则由于 S_0 为有界闭曲线,存在 $\varepsilon > 0$,使得以 P_0 为圆心, $|\phi(P_0)| + \varepsilon$ 为半径的圆内只含 S_0 在 Q_0 附近的一段,记为 $(u(s), v(s)) = \vec{r}(s)$, $s_1 \leq s \leq s_2$, 并且 $\vec{r}(s_0) = Q_0$. 由于切线 $\vec{r}'(s_0)$ 与 $\overline{P_0 Q_0}$ 垂直,有

$$(x_0 - u(s_0))u'(s_0) + (y_0 - v(s_0))v'(s_0) = 0. \quad (2)$$

考虑

$$\phi^2(x, y) = (x - u(s))^2 + (y - v(s))^2, \quad (3)$$

其中 s 满足 $s_1 \leq s \leq s_2$, 通过极小化式(3)来确定参数 s ,即

$$\theta(x, y, s) = (x - u(s))u'(s) + (y - v(s))v'(s) = 0. \quad (4)$$

我们用隐函数定理来证明对于 (x_0, y_0) 附近的 (x, y) 存在惟一的 $s = s(x, y)$, $s_1 < s < s_2$, 满足 $\theta(x, y, s(x, y)) \equiv 0$, 如图 6 所示.

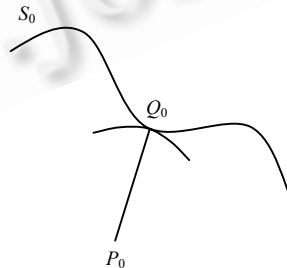


Fig.6
图 6

对于 $u_0 = u(s_0), v_0 = v(s_0)$, 有

$$\theta(x_0, y_0, s_0) = (u_0 - x_0)u'_0 + (v_0 - y_0)v'_0 = 0, \quad (5)$$

求导后,

$$\frac{\partial \theta}{\partial s}(x_0, y_0, s_0) = (u'(s_0))^2 + (v'(s_0))^2 + ((u_0 - x_0)u''_0 + (v_0 - y_0)v''_0), \tag{6}$$

下面证明式(6)不为 0. 当 $s \neq s_0$ 时, 有

$$\begin{aligned} 0 < (u(s) - x_0)^2 + (v(s) - y_0)^2 - ((u_0 - x_0)^2 + (v_0 - y_0)^2) \\ = ((u(s) - u_0)^2 + 2(u(s) - u_0)(u_0 - x_0)) + ((v(s) - v_0)^2 + 2(v(s) - v_0)(v_0 - y_0)). \end{aligned} \tag{7}$$

由于 $u(s) - u_0 = u'_0 \Delta s + \frac{1}{2}u''_0(\Delta s)^2 + O((\Delta s)^3)$, $\Delta s = s - s_0$, 有

$$(u(s) - u_0)^2 + 2(u(s) - u_0)(u_0 - x_0) = 2u'_0(u_0 - x_0)\Delta s + (u'_0)^2 + u''_0(u_0 - x_0)(\Delta s)^2 + O((\Delta s)^3).$$

对于 $v(s)$ 也有相似结论, 将所得到的方程式代入式(7), 得到 $0 <$

$$\frac{\partial \theta}{\partial s}(x_0, y_0, s_0)(\Delta s)^2 + O((\Delta s)^3), \text{ 即 } \frac{\partial \theta}{\partial s} \Big|_{(x_0, y_0, s_0)} + O(|\Delta s|) > 0. \text{ 令 } \Delta s \rightarrow 0, \text{ 得到 } \frac{\partial \theta}{\partial s}(x_0, y_0,$$

$s_0) > 0$. 于是由隐函数定理可知, 对于 (x_0, y_0) 附近任意点 (x, y) 存在惟一的 $s = s(x, y)$, 使得 $\theta(x, y, s(x, y)) = 0$, 因而式(3)关于 (x, y) 可微, 即 $\phi(x, y)$ 在 P_0 附近可微.

(\Rightarrow) 设 $\phi(x, y)$ 在 P_0 处可微, 若有 $Q_1, Q_2 \in S_0, Q_1 \neq Q_2$, 使得 $\phi(P_0) = \text{dist}(P_0, Q_1) = \text{dist}(P_0, Q_2)$, 如图 7 所示. 记

$$\begin{cases} Q_1 = (u(s_1), v(s_1)) = (u_1, v_1) \\ Q_2 = (u(s_2), v(s_2)) = (u_2, v_2) \end{cases},$$

有

$$\begin{cases} (u_1 - x_0)u'_1 + (v_1 - y_0)v'_1 = 0 \\ (u_2 - x_0)u'_2 + (v_2 - y_0)v'_2 = 0 \end{cases} \tag{8}$$

$$\phi(x, y) = \sqrt{(u(s(x, y)) - x)^2 + (v(s(x, y)) - y)^2}. \tag{10}$$

不妨设 $u_1 \neq u_2, v_1 = v_2$ (若 $v_1 \neq v_2$ 可做旋转得到), 考虑:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\phi(x_0 + \Delta x, y_0) - \phi(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

若 $\Delta x < 0$, 则 $(x_0 + \Delta x, y_0)$ 距 Q_1 比距 Q_2 点要近, 即 s 在 s_1 附近, 由式(10)有

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{(u'_1 s'_x - 1)(u_1 - x_0) + v'_1 s'_x (v_1 - y_0)}{\phi},$$

又由式(8)得到 $\frac{\partial \phi}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{-u_1 + x_0}{\phi}$. 若 $\Delta x > 0$, 类似可得到, $\frac{\partial \phi}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{-u_2 + x_0}{\phi}$, 于是可推知 $u_1 = u_2$, 即 $Q_1 = Q_2$, 与 $Q_1 \neq Q_2$ 矛盾, 得证. □

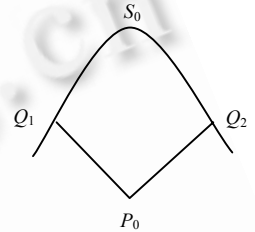


Fig. 7
图 7