1000-9825/2003/14(02)0300 ©2003 Journal of Software 软 件 学 报 Vol.14, No.2

网络流量的有效测量方法分析*

刘湘辉[1+], 殷建平[1], 唐乐乐[1], 赵建民[2]

[1](国防科学技术大学 计算机学院,湖南 长沙 410073)
[2](浙江师范大学 计算机学院,浙江 金华 321004)

Analysis of Efficient Monitoring Method for the Network Flow

LIU Xiang-Hui[1+], YIN Jian-Ping [1], TANG Le-Le[1], ZHAO Jian-Min[2]

[1](School of Computer, National University of Defence Technology, Changsha 410073, China)
[2](School of Computer Science, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, China)
+ Corresponding author: Phn: 86-731-4574618, E-mail: lpxh2001@163.net
http://www.nudt.edu.cn
Received 2002-05-10; Accepted 2002-10-11

Liu XH, Yin JP, Tang LL, Zhao JM. Analysis of efficient monitoring method for the network flow. *Journal of Software*, 2003,14(2):300~304.

Abstract: In this paper, the problem of efficient monitoring for the network flow is regarded as the problem to find out the minimum weak vertex cover set for a given graph $G=(V,E)$. An approximation algorithm is presented. It is proved that the algorithm has a ratio bound of $2(\ln d+1)$, where d is the maximum degree of the vertices in graph G. It is showed that the running time of the algorithm is $O(|V|^2)$.
Key words: weak vertex cover; NP-hard; approximation algorithm; flow conservation

摘 要: 把网络流量的有效测量问题抽象为求给定图 $G=(V,E)$的最小弱顶点覆盖集的问题.给出了一个求最小弱顶点覆盖集的近似算法,并证明了该算法具有比界 $2(\ln d+1)$,其中 d 是图 G 中顶点的最大度.指出了该算法的时间复杂性为 $O(|V|^2)$.
关键词: 弱顶点覆盖;NP 难的;近似算法;流守恒
中图法分类号: TP393 **文献标识码**: A

随着 Internet 应用的急剧增长,越来越多的网络应用程序需要了解流量等网络运行参数,以支持可区分的服务.这些及时的流量信息对于许多网管业务,如主动式和被动式的资源管理、流量工程、端到端的服务质量保证,显得尤为重要.特别是现代的网络管理系统注重于服务级、应用级的管理,流量的测量过程需要更大的数据量和更高的数据采集频率[1~3].

目前,网络流量的测量方法要求针对特定的感兴趣的链路[1,2],人工合理地规划网络的观测节点[4],并安装特定的测量软件.但这种方法难以扩展,不便于动态适应网络的变化,而且可能因设置过多的观测节点而增加网络的额外负担.

---

* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.69933030 (国家自然科学基金)
第一作者简介: 刘湘辉(1973－),男,湖南湘潭人,博士生,主要研究领域为计算机网络 QoS,网络安全.

测量方法最关键的步骤是既要准确获取网络流量参数,又要尽量减少数据收集对实际网络传输数据造成的影响[3].本文提出的方法可以依托网络上广泛支持的网管协议如 SNMP,设置一定范围内的全局网络中心,按一定频率主动收集网络上各网管代理的信息.这种方法只要求网络中心确定合理的需要查询的网管代理,并且当网络拓扑结构发生改变时可及时更新.

1 问题描述

定义 1. 给定无向图 $G=(V,E)$,其中 V 是顶点集,E 是边集,S 是 V 的子集,若根据与 S 中顶点相关联的各条边的流量,可以确定 E 中任意边的流量,则称 S 是图 G 关于流量的测量集.

有效测量问题的目标是求给定图 $G=(V,E)$关于流量的最小测量集.虽然采用求解最小顶点覆盖问题的算法可以求出一个测量集,但已证明,最小顶点覆盖问题是一个 NP 难题,尚无多项式时间的求解算法,并且求出的测量集也未必是最小测量集.如果监测代理是路由器或交换机等交换设备,那么还可以挖掘以下两条约束:

(1) 对图 G 的顶点集 V 中的任意顶点 v,其度 $Degree(v)\ge 2$;

(2) 对图 G 的顶点集 V 中的任意顶点 v,满足流守恒方程,即流进=流出.

尽管以下原因会将导致流守恒方程的失真,如:(1) 交换设备是数据的源或汇,而不仅仅是数据转发器;(2) 多播导致输出端口的数据复制;(3) 交换设备本身的数据包延迟或丢弃.但是若干研究表明,流守恒方程所具有的相对误差小于 0.05%[3,5].

2 弱顶点覆盖

定义 2. 假定无向图 $G=(V,E)$满足对任意 $v\in V$ 有 $Degree(v)\ge 2$,称 $S\subset V$ 是图 G 的弱顶点覆盖集,当且仅当执行以下操作能使 E 中所有边可以被标记:

(1) 标记所有与 S 中顶点相关联的边.

(2) 若某个顶点 v 的 $Degree(v)-1$ 条相关联的边已被标记,则标记剩下的那条相关联的边.

(3) 重复第(2)步直到不能再标记新的边为止.

图 G 的弱顶点覆盖集 S 就是在流守恒约束下的图 G 关于流量的测量集.首先与集合 S 中顶点相关联的边的流量可以通过测量手段来获取.其次,如果 $v\notin S$,且 v 的 $Degree(v)-1$ 条边的流量已获得,那么根据流守恒方程,可以计算出另外一条边的流量.反复应用流守恒方程,可以计算出图 G 中所有边的流量.

记 $E(v)=\{(u,v)|u\in V\}$是图 $G=(V,E)$关于顶点 v 的相关联的边的集合.

引理 1. 假定无向图 $G=(V,E)$满足对任意 $v\in V$ 有 $Degree(v)\ge 2$,且对某个 $v\in V$,$E(v)$中边的流量已知,则子图 $G'=(V-v,E-E(v))$中度为 1 的顶点相关联的边的流量也可获得.

证明:不失一般性,假设图 G' 中顶点 v'的度等于 1.

因为 G 满足对任意 $v\in V$ 有 $Degree(v)\ge 2$,而 G' 中顶点 v'的度等于 1,所以顶点 v'在 G 中有 $Degree(v')-1$ 条相关联的边与 v 相关联.由假设这 $Degree(v')-1$ 条边的流量为已知,根据流守恒方程,v'剩下的那条相关联的边的流量也可获得.

对于图 $G=(V,E)$,若 $v\in V$ 为监测代理节点,则 $E(v)$中边的流量已知,同时子图 $G'=(V-v,E-E(v))$中度为 1 的顶点相关联的边的流量也可获得,故为已知.设 G'' 是对 G' 删除所有已知流量的边与孤立顶点后所形成的子图,则 $G''=(V'',E'')$也满足对任意 $v\in V''$ 有 $Degree(v)\ge 2$. □

引理 2. 假定无向图 $G=(V,E)$满足对任意 $v\in V$ 有 $Degree(v)\ge 2$,则 $S\subset V$ 是图 G 的弱顶点覆盖集,当且仅当 $G'=(V',E')$是森林,其中 $V'=V\backslash S$, $E'=\{(u,v)|(u,v)\in E\wedge u\in V'\wedge v\in V'\}$.

证明:(必要性)反设 $G'=(V',E')$不是森林,则 G'含圈,不妨设某个圈为 $v_1,e_1,v_2,e_2,\ldots,v_m,e_m,v_1$.因为 $v_i(1\le i\le m)$不在 S 中,所以 $e_i(1\le i\le m)$无法在定义 2 的第(1)步中加以标记.又对任意 $v_i(1\le i\le m)$至少有两条相关联的边 e_{i-1} 和 e_i(当 $i=1$ 时是 e_m 和 e_1)尚未被标记,所以 $e_i(1\le i\le m)$也无法在定义 2 的第(2)步中加以标记.矛盾.

(充分性)若 $G'=(V',E')$是森林,由引理 1,从森林中各树的叶开始反复标记与其相关联的边,总可以标记所有

的边,因此 S 是弱顶点覆盖集.

下面是我们设计的一个贪心算法.在输入一个无向图 $G=(V,E)$后,该算法能输出 G 的一个弱顶点覆盖集 U.

Weak Vertex Cover Algorithm (Graph G)
{
① $U=\varnothing$
② $i=1$
③ $G_1=G$
④ while (G_i 的顶点集非空)
{
⑤ 选取图 $G_i=(V_i,E_i)$中度最大的顶点 v_i
⑥ $U=U+\{v_i\}$
⑦ $V'=V_i-\{v_i\}$
⑧ $E'=E_i-Adj(v_i)$
⑨ $i=i+1$
⑩ 对图 $G'=(V',E')$反复删除度不超过 1 的所有顶点及其相关联的边,直到不能再删除新的顶点和边为止.令 G_i 为最后得到的图
}
返回集合 U
}

3 算法分析

记 U^*是图 $G=(V,E)$的最小弱顶点覆盖集,$\overline{U^*}=V\setminus U^*$,$G_i=(V_i,E_i)$是算法中第 i 次循环所处理的中间子图,由算法知 $G_1=G$.设 U 是算法输出的 U^*的近似最优解,$|U|=m,U=\{v_1,v_2,\dots,v_m\}$.记 $d_i(v)$是顶点 v 在子图 G_i 中的度,$d_X(v)$是一个端点为 v,另一个端点在集合 X 中的边的数目.因为算法采用贪心策略,所以对 U 中任意顶点 v_i 和 $v_j(1\le i<j\le m)$有:$d_i(v_i)\ge d_i(v_j)$.对 $1\le i\le m$,记 $U_i^*=U^*\cap V_i$, $\overline{U_i^*}=\overline{U^*}\cap V_i$, $V_{m+1}=\varnothing$, $S_i=V_i\setminus V_{i+1}$,则以下引理成立.

引理 3. 对 $1\le i\le m$, $i\le j\le m$ 有:$d_j(v_j)\le\sum_{v\in V_j}d_j(v)-\sum_{v\in V_{j+1}}d_{j+1}(v)-2|S_j|+2|U_i^*\cap S_j|$.

证明:令 $E_j=\{(x,y)|x\in S_j\wedge y\in V_{j+1}\}$,即 $\sum_{v\in V_{j+1}}d_{S_j}(v)=|E_j|$.所以 $\sum_{v\in V_j}d_j(v)-\sum_{v\in V_{j+1}}d_{j+1}(v)=\sum_{v\in S_j}d_j(v)+|E_j|$,从而

$$\begin{aligned}\sum_{v\in V_j}d_j(v)-\sum_{v\in V_{j+1}}d_{j+1}(v)-2|S_j|+2|U_i^*\cap S_j|&=\sum_{v\in S_j}d_j(v)+|E_j|-2|S_j|+2|U_i^*\cap S_j|\\&=d_j(v_j)+\sum_{v\in S_j-\{v_j\}}(d_j(v)-2)+(|E_j|-2)+2|U_i^*\cap S_j|.\end{aligned}$$

若 $|E_j|\ge 2$,则上式 $\ge d_j(v_j)$,否则:

若 $|E_j|\le 1$,因为对图 G_j 的顶点集 V_j 中的任意顶点 v,其度 $Degree(v)\ge 2$,所以必有 $|S_j|\ge 3$,且子图 $G'_j=(S_j,E'_j)$中必含圈,其中 $E'_j=\{(x,y)|x\in S_j\wedge y\in S_j\}$.反之,若 G'_j 不含圈,则由 S_j 的构造可知,G'_j 是无圈的连通非空图,即 G'_j 是一棵树,则至少存在 S_j 中两个不同的顶点使其在 G'_j 中的度均为 1.又 $|E_j|\le 1$,所以这两个顶点中至少有一个顶点在图 G_j 中的度为 1,矛盾.

因为子图 $G'_j=(S_j,E'_j)$中含有圈,所以 S_j 中至少包含一个 U^* 中的元素.因为 $i\le j$,所以 V_j 是 V_i 的子集.因为 $S_j=V_j\setminus V_{j+1}$,所以 S_j 是 V_j 的子集.因此,该元素也在 V_i 中,进而由 $U_i^*=U^*\cap V_i$ 可知,它还是 U_i^* 中的元素.故 $|U_i^*\cap S_j|\ge 1$.这时有

$$\begin{aligned}\sum_{v\in V_j}d_j(v)-\sum_{v\in V_{j+1}}d_{j+1}(v)-2|S_j|+2|U_i^*\cap S_j|&=\sum_{v\in S_j}d_j(v)+|E_j|-2|S_j|+2|U_i^*\cap S_j|\\&=d_j(v_j)+\sum_{v\in S_j-\{v_j\}}(d_j(v)-2)+|E_j|+2(|U_i^*\cap S_j|-1)\ge d_j(v_j).\end{aligned}$$ □

引理 4. 对 $1\le i\le m$ 有 $\sum_{j=i}^{m}d_j(v_j)\le 2\sum_{v\in U_i^*}d_i(v)$.

证明:由引理 3,有 $\sum_{j=i}^{m} d_j(v_j) \le \sum_{j=i}^{m}\left(\sum_{v\in V_j} d_j(v) - \sum_{v\in V_{j+1}} d_{j+1}(v) - 2|S_j| + 2|U_i^* \cap S_j|\right) = \sum_{v\in V_i} d_i(v) - 2\sum_{j=i}^{m}|S_j| + 2\sum_{j=i}^{m}|U_i^* \cap S_j|$.注意到当 $i \ne j$ 时,有 $S_i \cap S_j = \varnothing$ 且 $V_i = \sum_{j=i}^{m} S_j$,可得 $\sum_{j=i}^{m}|S_j| = |V_i|$.又由 $U_i^* = U^* \cap V_i$ 得知 $U_i^* \cap V_i = U_i^*$.从而

$$\sum_{j=i}^{m}|U_i^* \cap S_j| = |U_i^*|,$$

所以

$$\sum_{j=i}^{m} d_j(v_j) \le \sum_{v\in V_i}(d_i(v) - 2) + 2|U_i^*|,$$

注意到 $U_i^* = U^* \cap V_i$, $\overline{U_i^*} = \overline{U^*} \cap V_i$, $V_i = \overline{U_i^*} \cup U_i^*$,故

$$\sum_{v\in V_i}(d_i(v) - 2) + 2|U_i^*| = \sum_{v\in U_i^*}(d_i(v) - 2) + \sum_{v\in \overline{U_i^*}}(d_i(v) - 2) + 2|U_i^*|.$$ 又 $d_i(v) = d_X(v) + d_{\overline{X}}(v)$,

所以上式等于

$$\sum_{v\in U_i^*}(d_i(v) - 2) + \sum_{v\in \overline{U_i^*}}\left(d_{U_i^*}(v)\right) + \sum_{v\in \overline{U_i^*}}\left(d_{\overline{U_i^*}}(v) - 2\right) + 2|U_i^*|.$$

因为 U^* 是图 G 的最小弱顶点覆盖集,根据引理 2,图 $(\overline{U^*}, E')$ 是森林,其中 $E'=\{(u,v)|(u,v)\in E \wedge u\in \overline{U^*} \wedge v\in \overline{U^*}\}$,又 $\overline{U_i^*}$ 是 $\overline{U^*}$ 的子集,所以图 $(\overline{U_i^*}, E'')$ 也是森林,其中 $E''=\{(u,v)|(u,v)\in E \wedge u\in \overline{U_i^*} \wedge v\in \overline{U_i^*}\}$.因此,

$$\sum_{v\in \overline{U_i^*}}\left(d_{\overline{U_i^*}}(v) - 2\right) \le 0.$$

由 $d_{\overline{U_i^*}}(v) \le d_i(v)$ 可得

$$\sum_{j=i}^{m} d_j(v_j) \le \sum_{v\in U_i^*}(d_i(v) - 2) + \sum_{v\in \overline{U_i^*}} d_{U_i^*}(v) + 2|U_i^*| = \sum_{v\in U_i^*} d_i(v) + \sum_{v\in \overline{U_i^*}} d_{U_i^*}(v) = \sum_{v\in U_i^*} d_i(v) + \sum_{v\in U_i^*} d_{\overline{U_i^*}}(v) \le 2\sum_{v\in U_i^*} d_i(v). \qquad \square$$

定理 1. 假设 U^* 是图 $G(V,E)$的最小弱顶点覆盖集, U 是算法输出的 U^* 的近似最优解,那么$|U|\le 2H(d)|U^*|$,其中 $H(x) = \sum_{i=1}^{x} 1/i$, $d = \max_{v\in V}\{Degree(v)\}$.

证明:假定从 $G_i = (V_i, E_i)$ 选取一个顶点置入弱顶点覆盖集的代价为 1,并且这个代价均匀分布在与该顶点相关联的边上.那么,对 $1 \le i \le m$,与顶点 v_i 相关联的每条边的代价为 $c_i = 1/d_i(v_i)$,所以,

$$|U| = \sum_{i=1}^{m} c_i d_i(v_i) = c_1\sum_{i=1}^{m} d_i(v_i) + \sum_{i=2}^{m}(c_i - c_{i-1})\sum_{j=i}^{m} d_j(v_j).$$

对 $2 \le i \le m$,根据算法选择 v_{i-1} 的贪心原则以及 d_i 关于 i 的单调性得知 $d_i(v_i) \le d_{i-1}(v_i) \le d_{i-1}(v_{i-1})$,所以, $c_i \ge c_{i-1}$.又由 c_1 的定义可知 $c_1 \ge 0$,因此由引理 4 可得:

$$\begin{aligned}|U| &\le 2c_1\sum_{v\in U_1^*} d_1(v) + 2\sum_{i=2}^{m}(c_i - c_{i-1})\sum_{v\in U_i^*} d_i(v)\\ &= 2\sum_{v\in U_1^*} c_1 d_1(v) + \ldots + 2\sum_{v\in U_i^*} c_i d_i(v) + \ldots + 2\sum_{v\in U_{m-1}^*} c_{m-1} d_{m-1}(v) + 2\sum_{v\in U_m^*} c_m d_m(v) -\\ &\quad 2\sum_{v\in U_2^*} c_1 d_2(v) - \ldots - 2\sum_{v\in U_i^*} c_{i-1} d_i(v) - \ldots - 2\sum_{v\in U_m^*} c_{m-1} d_m(v).\end{aligned}$$

对 $1\le i\le m$,由算法中 V_i 的构造得知, V_i 可分解成若干互不相交集的并,即 $V_i = \sum_{j=i}^{m-1}(V_j \setminus V_{j+1}) \cup V_m$.又由 $U_i^* = U^* \cap V_i$ 可得 $U_i^* = \sum_{j=i}^{m-1}(U_j^* \setminus U_{j+1}^*) \cup U_m^*$,故上式等于

$$2\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{v\in U_j^*\setminus U_{j+1}^*}\left(\sum_{i=1}^{j-1}\left(d_i(v)-d_{i+1}(v)\right)c_i+d_j(v)c_j\right)+2\sum_{v\in U_m^*}\left(\sum_{i=1}^{m-1}\left(d_i(v)-d_{i+1}(v)\right)c_i+d_m(v)c_m\right).$$

注意到 $U^*=U^*\bigcap V=U^*\bigcap V_1=U_1^*=\sum_{j=1}^{m-1}(U_j^*\setminus U_{j+1}^*)\bigcup U_m^*$,对任意 $v\in U^*$,定义 $s(v)$ 为:若存在 $1\le j\le m-1$ 使得 $v\in U_j^*\setminus U_{j+1}^*$,则 $s(v)=j$,这时,$d_{j+1}(v)=0$.若 $v\in U_m^*$,则 $s(v)=m$,这时,$d_{m+1}(v)=0$.不论何种情况,总有当 $1\le i\le s(v)$ 时 $d_i(v)>0$ 而 $d_{s(v)+1}(v)=0$.故上式等于

$$2\sum_{v\in U^*}\sum_{i=1}^{s(v)}\left(d_i(v)-d_{i+1}(v)\right)/d_i(v_i).$$

对 $1\le i\le s(v)$,根据算法选择 v_i 的贪心原则得知 $d_i(v)\le d_i(v_i)$,又由 d_i 关于 i 的单调性得知 $d_{i+1}(v)\le d_i(v)$,故 $d_i(v)-d_{i+1}(v)\ge 0$,所以上式 $\le 2\sum_{v\in U^*}\sum_{i=1}^{s(v)}(d_i(v)-d_{i+1}(v))/d_i(v)$.

因为对整数 $a\le b$ 有:$H(b)-H(a)=\sum_{i=a+1}^{b}1/i\ge(b-a)/b$,且 $d_{s(v)+1}(v)=0$,$H(0)=0$.

所以上式 $\le 2\sum_{v\in U^*}\sum_{i=1}^{s(v)}\left(H(d_i(v))-H(d_{i+1}(v))\right)=2\sum_{v\in U^*}\left(H(d_1(v))-H(d_{s(v)+1}(v))\right)=2\sum_{v\in U^*}\left(H(d_1(v))\right)\le 2H(d)\left|U^*\right|$.

进而,由 $H(d)\le\int_1^d(1/x)\mathrm{d}x+1=\ln d+1$ 可得:$|U|\le 2H(d)\left|U^*\right|\le 2(\ln d+1)\left|U^*\right|$. □

定理 2. 在输入为 $G=(V,E)$时,算法的时间复杂性为 $O(|V|^2)$.

证明:假设集合 U 用链表 L 表示,图 G 用邻接矩阵 A 表示,并用数组 D 记录图中各顶点的度,用链表 Q 记录图中度为 1 的顶点的编号,那么,语句①和语句②需常数时间;语句③的时间复杂性为 $O(|V|^2)$;初始化数组 D 的时间复杂性也为 $O(|V|^2)$;初始化链表 Q 需常数时间.因为每次循环至少去掉一个顶点,所以循环次数最多为 $O(|V|)$.借助数组 D,语句⑤执行一次的时间复杂性为 $O(|V|)$.语句⑥执行一次需常数时间.语句⑦和语句⑧的执行包括:置 $D[i]=0$,然后扫描邻接矩阵 A 的第 i 行,对任意 $1\le j\le|V|$,若 $A[i,j]=1$,则置 $A[i,j]=A[j,i]=0$ 并置 $D[j]=D[j]-1$,这时,若有 $D[i]=1$,则将 j 加入链表 Q.所以它们执行一次的时间复杂性为 $O(|V|)$.语句⑨执行一次需常数时间.语句⑩的执行包括:当链表 Q 非空时反复从中取出 j,置 $D[j]=0$,然后扫描邻接矩阵 A 的第 j 行,对任意 $1\le k\le|V|$,若 $A[i,k]=1$,则置 $A[i,k]=A[k,j]=0$ 并置 $D[k]=D[k]-1$,这时,若有 $D[k]=1$,则将 k 加入链表 Q.对从 Q 中取出的每个 j,执行上述工作的时间复杂性为 $O(|V|)$.另一方面,在算法的整个执行过程中,每个顶点的编号最多加入链表 Q 一次,所以从 Q 中取出的编号的总数最多为$|V|$,因此执行语句⑩的总时间复杂性为 $O(|V|^2)$.至于循环的终止条件可改为:当语句⑤求出 v_i 以后,若 $D[i]=0$,则终止循环,否则继续循环.综上所述,算法的时间复杂性为 $O(|V|^2)$. □

4 结束语

考虑到流守恒方程的约束只是一种近似情况,下一步的工作将深入研究这种误差对计算出来的链路流量值的扰动,并且还将考虑对顶点加权情况下的图的弱顶点覆盖集问题.

References:

[1] Lai K, Baker M. Measuring bandwidth. In: Proceedings of the IEEE INFOCOM'99. New York, 1999. 235~245.

[2] Downey AB. Using pathchar to estimate internet link characteristics. In: Proceedings of the ACM SIGCOMM'99 Conference on Applications, Technology, Architectures and Protocals for Computer Communications. Cambridge, MA, 1999. 241~250.

[3] Breibart Y, Chan CY, Carofalakis M, Rastogi R, Silberschatz A. Efficiently monitoring bandwidth and latency in IP network. Murrary Hill, NJ: Bell Laboratories, 2000.

[4] Jamin S, Jin C, Jin Y, Raz D, Shavitt Y, Zhang L. On the placement of internet instrumentation. In: Proceedings of the IEEE INFOCOM 2000. 2000. 26~30.

[5] Cáceres R, Duffield NG, Feldman A, Friedmann J, Greenerg A, Greer R, Johnson T, Kalmanek C, Krishnamurthy B, Lavelle D, Mishra PP, Ramakrishnan KK, Rexford J, True F, van der Merwe JE. Measurement and analysis of IP network usage and behavior. IEEE Communication Magazine, 2000,38(5):144~151.