1000-9825/2002/13(01)0059-06 ©2002 Journal of Software 软 件 学 报 Vol.13, No.1

信念修正的完全和可操作的方法*

李 未[1], 栾尚敏[2]

[1](北京航空航天大学 计算机科学与工程系,北京 100083);
[2](中国科学院 软件研究所,北京 100080)
E-mail: shangmin_luan@sina.com

摘要: 给出了命题逻辑上信念修正的两种可操作的完全方法.首先对 R-演算的规则进行了修改,使得对任何一个极大协调的子集都通过这组规则得到.然后,给出了求得所有的极小不协调子集的一组规则.最后,给出一个过程,该过程能求得所有的极大协调子集.因为这两种方法都能求得所有的极大协调子集,所以把它们称为完全的.
关 键 词: 信念修正;信念集;迭代修正
中图法分类号: TP18 文献标识码: A

在信念修正的研究成果中,比较重要的有真值维护的方法[1]、AGM(Alchourron,Gardenfors 和 Makinson)的方法[2]、序列极限的方法[3~5]和迭代的方法[6~7].真值维护方法[1]的思想是,任何一个合理的信念必定有其合理的理由.真值维护的过程就是从对一个信念加入一条理由开始的.若在加入该理由后不会引起矛盾,则直接将该理由插入就可以了;否则,就执行一个回溯的过程,找到引起矛盾的原因,消除矛盾.

Alchourron,Gardenfors 和 Makinson[2]首先给出了信念修正应该满足的公设,然后给出了一些修正方法.若任意选择一个极大协调的子集和要加入的语句得到修正后的信念集,则称为最大一致子集修正;若选择某些极大协调的子集,然后求这些集合的交集,由该交集和要加入的语句得到修正后的信念集,则称为部分交集修正;若由所有的极大协调子集的交集和要加入的语句得到修正后的信念集,则称为全部交集修正.

上面两种方法研究的都是进行一次修正的情况,那么对信念集进行多次修正的情况如何呢?人们对这个问题也进行了研究,提出了序列极限的方法和迭代的方法两种方法.文献[3~5]中使用的是序列极限的方法,首先给出 R-重构的定义,然后给出求 R-重构的转换系统,称为 R-演算,同时给出了一个用于产生信念集修正序列的过程,并且证明了由该过程所产生的信念集收敛,并讨论了 R-演算在 Horn 子句集上的可实现性.迭代的方法[6~7]与 AGM 的方法类似,首先给出迭代修正应满足的公设,然后给出一些满足这些公设的修正方法.

需要说明的是,AGM 的方法是针对理论闭包的,其实即使对于一个有限集,其理论闭包可能都是无限集,所以很难找到一种可操作的方法来表示信念集.AGM 的方法所存在的另一个问题是,没有讨论如何得到所有的极大协调子集,也就是说,这些方法都是不可操作的.李未[3~5]对这些问题给予了研究,首先他用语句集来表示信念集,语句集可以是一个闭包,也可以不是一个闭包,但不保证修正后的信念集是一个闭包.虽然文献[3]也讨论了求 R-重构的方法,称为 R-演算,但某些极大协调子集不能由 R-演算的规则推出.本文给出了信念修正的两种可操作的方法:一种方法是将 R-演算的规则进行修改,使得对任意一个极大协调的子集都能用修改后的规则得到,称为基于 R-演算的方法;另一种方法是,首先给出一组规则,通过这组规则得到所有的与要插入的语句极小不协调的集合,然后给出一个过程,该过程中的变量是极小不协调集合的集合和原来的语句集,通过该过程得到所有极大协调子集.同时,本文还与上述几种方法进行了比较.本文所讨论的方法的一个重要特点就是其可操作性.

* 收稿日期: 1999-03-25; 修改日期: 2000-08-02
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60033020;60103020);中国博士后科学基金资助项目
作者简介: 李未(1943－),男,北京人,教授,中国科学院院士,主要研究领域为并发程序语言,操作语义,类型理论,人工智能中的逻辑基础;栾尚敏(1963－),男,山东莱芜人,博士生,主要研究领域为人机交互技术,算法设计自动化,信念修正,形式化方法.

1 基于 R-演算的方法

首先用一个例子说明如何用 R-演算的规则来求极大协调的子集,通过分析这个例子来讨论如何修改 R-演算的规则,使得修改后的规则是完全的,即任意一个极大协调子集都能通过修改后的规则求得.

例 1:设$\Gamma=\{A,A\supset B,B\supset C,E\supset F\}$.假设这时再向$\Gamma$中增加公式$\neg C$,则就会导致矛盾,这时就需要求出与$\neg C$ 协调的Γ的子集.设$\Gamma_1=\{A,A\supset B,E\supset F\}$,显然$\Gamma_1$ 是与$\neg C$ 协调的一个极大协调子集,下面说明如何通过 R-演算的规则得到Γ_1.根据 R-Γ协调性规则和公理分别得到$\neg C|\neg B,\Gamma_1\Rightarrow\neg C|\Gamma_1$ 和$\neg C|C,\Gamma_1\Rightarrow\neg C|\Gamma_1$.再根据 R-⊃规则得到$\neg C|B\supset C,\Gamma_1\Rightarrow\neg C|\Gamma_1$.根据极大协调的子集的定义,$\Gamma_2=\{A,B\supset C,E\supset F\}$和$\Gamma_3=\{A\supset B,B\supset C,E\supset F\}$也是与$\neg C$ 协调的极大子集,但是用上面的规则却推不出来.产生上述问题的原因是,$\Gamma_1\cup\{\neg B\}$是不协调的,不仅可以通过删除$\neg B$ 使其成为与$\neg C$ 协调的,也可以通过删除 $A\supset B$ 或 A 使其成为与$\neg C$ 协调的.使用 R-演算的规则不能得到删除 $A\supset B$ 或 A 的情况.可以对上述规则进行某些修改后就得到Γ_2和Γ_3,也就是说得到一种完全的方法.首先需要修改的是 R-Γ协调性规则:

$$\frac{\Gamma\vdash\neg A}{\Delta\mid A,\Gamma\Rightarrow\Delta\mid\Gamma},\qquad \frac{\Gamma\vdash\neg A\quad \Gamma-S\nvdash\neg A\quad \forall B\in S\quad \Gamma-S\cup\{B\}\vdash\neg A}{\Delta\mid A,\Gamma\Rightarrow\Delta\mid A,\Gamma-S}.$$

除此之外,还需要增加如下几条规则:

∧规则: $$\frac{\Delta\mid A,\Gamma\Rightarrow\Delta\mid A,\Gamma_1\qquad \Gamma\nvdash\neg B}{\Delta\mid A\wedge B,\Gamma\Rightarrow\Delta\mid A\wedge B,\Gamma_1},\qquad \frac{\Delta\mid A,\Gamma\Rightarrow\Delta\mid A,\Gamma_1\qquad \Gamma\nvdash\neg B}{\Delta\mid B\wedge A,\Gamma\Rightarrow\Delta\mid B\wedge A,\Gamma_1}.$$

∨规则: $$\frac{\Delta\mid A,\Gamma\Rightarrow\Delta\mid A,\Gamma_1}{\Delta\mid A\vee B,\Gamma\Rightarrow\Delta\mid A\vee B,\Gamma_1},\qquad \frac{\Delta\mid A,\Gamma\Rightarrow\Delta\mid A,\Gamma_1}{\Delta\mid B\vee A,\Gamma\Rightarrow\Delta\mid B\vee A,\Gamma_1}.$$

⊃规则: $$\frac{\Delta\mid\neg B,\Gamma\Rightarrow\Delta\mid\neg B,\Gamma_1}{\Delta\mid B\supset C,\Gamma\Rightarrow\Delta\mid B\supset C,\Gamma_1},\qquad \frac{\Delta\mid B,\Gamma\Rightarrow\Delta\mid B,\Gamma_1}{\Delta\mid A\supset B,\Gamma\Rightarrow\Delta\mid A\supset B,\Gamma_1}.$$

例 2:仍然考虑例 1 给出的情况.在例 1 中已经指出,通过 R-演算的规则不可能得到Γ_2和Γ_3,下面讨论如何使用修改后的规则得到Γ_2和Γ_3.由$\Gamma_1\vdash B$,使用修改后的 R-Γ协调性规则:

$$\frac{\Gamma_1\vdash B\qquad \Gamma_1-\{A\}\nvdash\neg B}{\neg C\mid\neg B,\Gamma_1\Rightarrow\neg C\mid\neg B,\Gamma_1-\{A\}},\tag{1}$$

$$\frac{\Gamma_1\vdash B\qquad \Gamma_1-\{A\supset B\}\nvdash\neg B}{\neg C\mid\neg B,\Gamma_1\Rightarrow\neg C\mid\neg B,\Gamma_1-\{A\supset B\}}.\tag{2}$$

再由⊃规则得到

$$\frac{\neg C\mid\neg B,\Gamma_1\Rightarrow\neg C\mid\neg B,\Gamma_1-\{A\}}{\neg C\mid B\supset C,\Gamma_1\Rightarrow\neg C\mid B\supset C,\Gamma_1-\{A\}},\tag{3}$$

$$\frac{\neg C\mid\neg B,\Gamma_1\Rightarrow\neg C\mid\neg B,\Gamma_1-\{A\supset B\}}{\neg C\mid B\supset C,\Gamma_1\Rightarrow\neg C\mid B\supset C,\Gamma_1-\{A\supset B\}}.\tag{4}$$

而$\Gamma_2=\{B\supset C\}\cup\Gamma_1-\{A\}$,$\Gamma_3=\{B\supset C\}\cup\Gamma_1-\{A\supset B\}$,所以得到式(3)和式(4):

$$\frac{\neg C\mid\neg B,\Gamma_1\Rightarrow\neg C\mid\neg B,\Gamma_1-\{A\}}{\neg C\mid B\supset C,\Gamma_1\Rightarrow\neg C\mid\Gamma_2},\tag{5}$$

$$\frac{\neg C\mid\neg B,\Gamma_1\Rightarrow\neg C\mid\neg B,\Gamma_1-\{A\supset B\}}{\neg C\mid B\supset C,\Gamma_1\Rightarrow\neg C\mid\Gamma_3}.\tag{6}$$

在新增加这些规则之后,就可以得到Γ_2 和Γ_3.用$\Delta|\Gamma\Rightarrow^*\Delta_1|\Gamma_1$ 来表示由$\Delta|\Gamma$经过一个推导序列之后得到$\Delta_1|\Gamma_1$.下面证明这种方法是完全的.

定理 **1(完全性)**. 任意一个极大协调的子集都能通过以上这组规则推导出来.

证明:通过对Δ和Γ中的公式使用结构归纳法进行证明.首先,对Δ中的公式长度进行归纳:

(1) 奠基步.设公式 A 是一个原子或原子的非,$\Delta=\{A\}$,下面再对Γ中公式的长度进行归纳:

(i) 奠基步.若Γ中的公式均为文字,即这时有$\Gamma\vdash\neg A$,则$\neg A\in\Gamma$,这样,只要将$\neg A$ 从Γ中删除就得到了与 A 协调

的Γ的子集.在这种情况下只有一个极大协调的子集.所以,结论成立.

(ii) 归纳证明步.假设Γ中公式的长度小于 n 的情况成立,并且假设 B 和 C 是长度小于 n 的公式,则

(a) 关于 $A|B\vee C,\Gamma$的情况

① 若$\{B\vee C\}\cup\Gamma$的任意一个与 A 协调的极大子集Γ_1都包含 $B\vee C$.这说明语句 $B\vee C$ 不会引起任何矛盾,它相当于求Γ的与 A 协调的极大子集.也就是说,要么$\Gamma\nvdash\neg B$,要么$\Gamma\nvdash\neg C$.不妨假设$\Gamma\nvdash\neg B$,则$\Gamma_1-\{B\vee C\}\cup\{B\}$也是$\Gamma\cup\{B\}$的一个极大协调的子集.根据归纳假设可知,$\Gamma_1$可以从上述规则中求得.再由$\vee$规则可知结论成立.

② 否则,说明 $B\vee C$ 处于Γ的某子集Γ_4中,Γ_4与 A 是不协调的,并且从Γ_4中删除任意一个语句之后,它与 A 都是协调的.设Γ_1是$\{B\vee C\}\cup\Gamma$的与 A 协调的极大子集.(1) 若Γ_1包含 $B\vee C$,则$\Gamma_1\cup\{A\}\nvdash\neg B$ 或$\Gamma_1\cup\{A\}\nvdash\neg C$ 成立.不妨假设$\Gamma_1\cup\{A\}\nvdash\neg B$ 成立,则$\Gamma_1-\{B\vee C\}\cup\{B\}$是$\Gamma\cup\{B\}$的与 A 协调的一个极大子集.根据归纳假设,$\Gamma_1-\{B\vee C\}\cup\{B\}$可以由上述规则求得.再根据$\vee$规则可知结果成立.(2) 若$\Gamma_1$不包含 $B\vee C$.根据归纳假设,只要说明如何删除语句 $B\vee C$ 就可以了.由于$\Gamma\cup\{A\}\vdash(\neg B\wedge\neg C)$,所以 B 处于Γ的某子集Γ_4中,Γ_4与 A 是不协调的,并且从Γ_4中删除任意一个语句之后,它与 A 都是协调的.同样地,C 处于Γ的某子集Γ''中,Γ_5与 A 是不协调的,并且从Γ_5中删除任意一个语句之后,它与 A 都是协调的.根据归纳假设可知:$A|B,\Gamma\Rightarrow^* A|\Gamma,A|C,\Gamma\Rightarrow^* A|\Gamma$和 $A|\Gamma\Rightarrow^* A|\Gamma_1$成立,即 $A|B,\Gamma\Rightarrow^* A|\Gamma_1$ 和 $A|C,\Gamma\Rightarrow^* A|\Gamma_1$ 成立.再根据$\vee$ right 规则可知 $A|B\vee C,\Gamma\Rightarrow^* A|\Gamma$成立.

(b) 关于 $A|B\wedge C,\Gamma$的情况.类似于(a)的证明.这时$\Gamma\cup\{B\vee C\}$就相当于$\Gamma\cup\{B,C\}$,根据归纳假设和$\wedge$规则可知结论成立.

(c) 关于 $A|B\supset C,\Gamma$的情况.因为 $B\supset C$ 等价于$\neg B\vee C$,这是(1)中所述的情况,只不过这种情况下使用的是$\supset$规则.所以结论成立.

(d) 关于 $A|\neg B,\Gamma$的情况.这种情况可以化为(a)~(c)三种情况之一,不再重复.

(2) 归纳证明步.假设对于长度小于 n 的公式 A,上述结论成立,并且设公式 B,C 的长度小于 n,则

(i) A 是 $B\vee C$ 的情况.这样,$A|\Gamma$就是 $B\vee C|\Gamma$.根据$\vee$ left 规则,$B\vee C|\Gamma$可以分为 $B|\Gamma$和 $C|\Gamma$两种情况,由归纳假设可知结论成立.

(ii) A 是 $B\wedge C$ 的情况.根据$\wedge$ left 规则,可以变成首先求 $B|\Gamma$和 $C|\Gamma$两种情况,设Γ_4和Γ_5分别是由 $B|\Gamma$和 $C|\Gamma$得到的结果,则再进一步地求 $C|\Gamma_4$ 和 $B|\Gamma_5$.由归纳假设可知 $B|\Gamma$和 $C|\Gamma$是完全的,并且对于由 $B|\Gamma$得到的任意一个$\Gamma_4,C|\Gamma_4$也是完全的;同样的,对于由 $C|\Gamma$得到的$\Gamma_5,B|\Gamma_5$也是完全的.

(iii) A 是 $B\supset C$ 的情况.因为 $B\supset C$ 等价于$\neg B\vee C$,这就是(i)所述的情况.

(iv) A 是$\neg B$ 的情况.这种情况可以化为(i)~(iii)三种情况之一,这里不再重复.

综上所述,结论成立. □

这里有几点需要说明.第一,在使用$\wedge$规则、$\vee$规则和$\supset$规则时,要避免引入新的矛盾.虽然这些新引入的矛盾可以进一步被消除,但这并不是我们所期望的,这些规则的目的是将在求解过程中丢失的信息再寻找回来.第二,在使用文献[3]中给出的$\vee$ left 规则时,可能存在这种情况:有的语句虽然不在某个极小不协调的语句集中,但同样被删除了,最终得到的语句集不是极大的.这时,首先要检查$\{A\vee B\}\cup\Gamma$是否为协调的,若为不协调的,则使用$\vee$ left 规则,否则就不能使用该规则.例如,语句 $D\vee F$ 与$\Gamma=\{(D\vee F)\supset B,B\supset\neg C,\neg F,C\}$是不协调的,根据 R-Γ协调性规则和公理有如下结果:$D\vee F|B,B\supset\neg C,\neg F,C\Rightarrow D\vee F|B\supset\neg C,\neg F,C;D\vee F|\neg(D\vee F),B\supset\neg C,\neg F,C\Rightarrow D\vee F|B\supset\neg C,\neg F,C$.再根据$\supset$ right 规则得到 $D\vee F|(D\vee F)\supset B,B\supset\neg C,\neg F,C\Rightarrow D\vee F|B\supset\neg C,\neg F,C$.这时,显然有 $D\vee F$ 与$\{(D\vee F)\supset B,B\supset\neg C,\neg F,C\}$是协调的,但这时若再使用$\vee$ left 规则得到 $D\vee F|(D\vee F)\supset B,B\supset\neg C,\neg F,C\Rightarrow D|B\supset\neg C,\neg F,C$ 和 $D\vee F|(D\vee F)\supset B,B\supset\neg C,\neg F,C\Rightarrow F|B\supset\neg C,\neg F,C$.再由公理可知,需要删除$\neg F$,得到 $F|B\supset\neg C,\neg F,C\Rightarrow F|B\supset\neg C,C$,进一步得到子集$\{B\supset\neg C,C\}$不是极大的.所以,在使用$\vee$ left 规则时需要检查$\{A\vee B\}\cup\Gamma$的协调性,若是不协调的,则再使用该规则;若是协调的,则不再使用该规则.

Alchourron,Gardenfors 和 Makinson 提出了约减的 8 条公设,后来 Katsuno 和 Mendelzon[8]修改为 6 条,记为(R*1)~(R*6).下面讨论序列极限的方法中采用修改后的转换系统所满足的公设.有如下的性质:

性质 **1**. 在序列极限的方法中,若用上面的转换系统来进行约减,则满足公设(R*1)~(R*3).

证明:首先证明该方法满足公设(R*1).若$\Gamma\vdash\neg A$,根据文献[3]中信念修正的过程,需要选择一个与 A 极大协

调的子集Γ_1,修正后的语句集Γ'就是Γ_1和 A 的并集,所以$\Gamma' \vdash A$.若$\Gamma \vdash A$,则仍然是Γ,这种情况下成立.若上面的两个条件都不满足,则修正后的集合$\Gamma'=\Gamma\cup\{A\}$,同样有$\Gamma' \vdash A$ 成立.所以满足公设(R*1).

根据文献[3]中给出的过程,若要加入的语句和原来的语句集Γ是协调的,则修正后的语句集$\Gamma'=\Gamma\cup\{A\}$,所以$\Gamma'=\Gamma\wedge A$,即满足公设(R*2).

下面证明该过程满足(R*3),即证明序列极限的方法若采用前面的转换系统来求约减,则有:若 A 是可满足的,则$\Gamma*A$ 也是可满足的.若$\Gamma \vdash \neg A$,根据文献[3]中信念修正的过程,需要选择一个与 A 极大协调的子集Γ_1,修正后的语句集Γ'就是Γ_1 和 A 的并集,所以Γ'是可满足的.若$\Gamma \vdash A$,则仍然是Γ,而文献[3]中的过程假设Γ是一个协调的语句集,即Γ是可满足的,所以这种情况下成立.若上面的两个条件都不满足,则修正后的集合$\Gamma'=\Gamma\cup\{A\}$,显然Γ是协调的,否则就有$\Gamma \vdash \neg A$ 和$\Gamma \vdash A$ 成立,这样就满足上面的两个条件了;Γ'应该是协调的,因为$\Gamma \nvdash \neg A$.综上所述,满足公设(R*3).结论得证. □

通过以下例子就可以说明,序列极限的方法若采用前面的转换系统,不满足公设(R*4)~(R*6).

例 3:设$\Gamma=\{A,C,A\supset B,C\supset D,D\supset F\}$.当再向$\Gamma$中增加语句$\neg B\vee\neg F$ 时,有$\Gamma \vdash B\wedge F$.根据$\vee$ left 规则,$\neg B\vee\neg F|\Gamma\Rightarrow\neg B|\Gamma$和$\neg B\vee\neg F|\Gamma\Rightarrow\neg F|\Gamma$.而根据这两个不同的结果可以得到两个不同的极大协调的语句集,它们分别为$\{A,C,C\supset D,D\supset F\}$ 和 $\{A,C,A\supset B,C\supset D\}$.显然,根据这两个结果得到两个不同的修正,它们分别为$\{A,C,C\supset D,D\supset F,\neg B\vee\neg F\}$和$\{A,C,A\supset B,C\supset D,\neg B\vee\neg F\}$,这两个语句集不是等价的.所以,序列极限的方法若采用这里的转换系统,则不满足第 4 条关于修正的公设(R*4).据此,也可以推出不满足(R*5)和(R*6).

2 基于极小不协调子集的完全方法

本节给出另一种完全的方法.这种方法是首先求出所有极小不协调的 RC-规则子集,根据求出的这些极小不协调子集,就可以得到所有的极大协调子集.首先给出一组规则,称为 RC-规则,是用来求出所有的极小不协调子集的.$MC(\Delta|\Gamma)$的意义是所有与Δ不协调的Γ的极小子集的集合.

2.1 求极小不协调子集的转换系统

Contraction: $MC(\Delta|A,A,\Gamma)=MC(\Delta|A,\Gamma)$, $MC(A,A,\Delta|\Gamma)=MC(A,\Delta|\Gamma)$.

Exchange: $MC(\Delta|A,B,\Gamma)=MC(\Delta|B,A,\Gamma)$, $MC(A,B,\Delta|\Gamma)=MC(B,A,\Delta|\Gamma)$.

Axiom: $MC(\neg A,\Delta|A,\Gamma)=MC(\neg A,\Delta|\Gamma)\cup\{\{A\}\}$.

Logical rule:

· RC-$\wedge$ left 规则: $MC(A\wedge B,\Delta|\Gamma)=MC(A,\Delta|\Gamma)\cup MC(B,\Delta|\Gamma)$.

· RC-$\wedge$ right 规则: $MC(\Delta|A\wedge B,\Gamma)=\oplus(MC(\Delta|A,\Gamma),A\wedge B)\cup\oplus(MC(\Delta|B,\Gamma),A\wedge B)$,

其中$\oplus(MC(\Delta|A,\Gamma),A\wedge B)$表示对任意$\Gamma_4\in MC(\Delta|A,\Gamma)$,若 $A\in\Gamma_4$,则集合$\Gamma_4-\{A\}\cup\{A\wedge B\}\in\oplus(MC(\Delta|A,\Gamma),A\wedge B)$,否则$\Gamma_4\in\oplus(MC(\Delta|A,\Gamma),A\wedge B)$.

· RC-$\vee$ left 规则: $MC(A\vee B,\Delta|\Gamma)=\{\Gamma_1\cup\Gamma_2|\Gamma_1\in MC(A,\Delta|\Gamma),\Gamma_2\in MC(B,\Delta|\Gamma)\}$.

· RC-$\vee$ right 规则:令 $MC(\Delta|A,\Gamma)_A$ 表示集合 $MC(\Delta|A,\Gamma)$中包含公式 A 的集合的集合,$\overline{S}$ 表示集合 S 的补集,

$MC(\Delta|A\vee B,\Gamma)=\{\Gamma_1\cup\Gamma_2-\{A,B\}\cup\{A\vee B\}|\Gamma_1\in MC(\Delta|A,\Gamma)_A,\Gamma_2\in MC(\Delta|B,\Gamma)_B\}\cup\overline{MC(\Delta|A,\Gamma)_A}\cup\overline{MC(\Delta|B,\Gamma)_B}$.

· RC-$\supset$ left 规则: $MC(A\supset B,\Delta|\Gamma)=MC(\neg A\vee B,\Delta|\Gamma)$.

· RC-$\supset$ right 规则: $MC(\Delta|A\supset B,\Gamma)=MC(\Delta|\neg A\vee B,\Gamma)$.

· RC-$\neg$替换规则: $MC(A,\Delta|\Gamma)=MC(A_1,\Delta|\Gamma)$, $MC(\Delta|A,\Gamma)=MC(\Delta|A_1,\Gamma)$.

A	$\neg(B\wedge C)$	$\neg(B\vee C)$	$\neg\neg B$	$\neg(B\supset C)$
A_1	$\neg B\vee\neg C$	$\neg B\wedge\neg C$	B	$B\wedge\neg C$

· RC-Γ协调性规则: 若Γ不协调,则 $MC(\Delta|\Gamma)=\{\Gamma_1|\Gamma_1$是$\Gamma$的极小不协调子集$\}$.

命题 **1**. 设Γ是一个协调的语句集.

(1) 若$\Gamma_4\in\{\Gamma_1\cup\Gamma_2|\Gamma_1\in MC(A|\Gamma),\Gamma_2\in MC(B|\Gamma)\}$,则$\Gamma_4$和 $A\vee B$ 是不协调的.

(2) $\{\Gamma_1\cup\Gamma_2-\{A,B\}\cup\{A\vee B\}|\Gamma_1\in MC(\Delta|A,\Gamma)_A,\Gamma_2\in MC(\Delta|B,\Gamma)_B\}$中的任意集合$\Gamma_4$,$\Gamma_4\cup\Delta$是不协调的.

证明:(1) 对于$\Gamma_1\in MC(A|\Gamma)$和$\Gamma_2\in MC(B|\Gamma)$,有$\Gamma_1\vdash\neg A$和$\Gamma_2\vdash\neg B$,所以$\Gamma_1\cup\Gamma_2\vdash(\neg A\wedge\neg B)$.即$\Gamma_1\cup\Gamma_2\vdash\neg(A\vee B)$,所以$A\vee B$和$\Gamma_1\cup\Gamma_2$不协调.

(2) 对于$\Gamma_1\in MC(A|\Gamma)_A$和$\Gamma_2\in MC(B|\Gamma)_B$,有$\Gamma_1\cup\Delta-\{A\}\vdash\neg A$和$\Gamma_2\cup\Delta-\{B\}\vdash\neg B$.所以$\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Delta-\{A,B\}\vdash(\neg A\wedge\neg B)$,即$\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Delta-\{A,B\}\vdash\neg(A\vee B)$.所以$\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Delta-\{A,B\}\cup\{A\vee B\}$是不协调的,即$\Gamma_4\cup\Delta$是不协调的. □

由命题 1 可以看到,通过上述规则得到的语句集,要么是一个与Δ不协调的Γ的极小子集,要么包含一个与Δ不协调的Γ的极小子集.可以将那些不是极小的子集删除,就得到了所有的极小子集.

引理 **1**. 通过 RC-规则可以得到所有的极小不协调子集.

证明:该定理的证明与定理 1 类似,是通过对Δ和Γ中的公式使用结构归纳法进行证明,所以略去.

2.2 基于极小不协调子集的完全过程

对于公式A和Γ,设S是所有的极小不协调公式集的集合,求Γ的与A协调的极大子集的过程如下.

```
RComplete(S,Γ)
  begin
    Λ={Γ};M=∅;
    while (Λ非空) do
      begin
        从Λ中选择一个集合Γ2;
        令Λ=Λ−{Γ2};
        if (对任意一个Γ1∈S,Γ1 中有属于Γ−Γ2 的语句) then
          M=M∪{Γ2};
        else
          for (每一个Γ1∈S) do
            if (Γ−Γ2 不包含Γ1 中的语句) then
              Λ=Λ∪{Γ2−{A}|A∈Γ1}
      end
    return M
  end
```

定理 **2**. 过程 RComplete(S,Γ)是正确的.也就是说,上述过程最后得到的是协调的极大子集.

证明:由上述过程中的集合M的构造过程可知,对M中的任意集合Γ_4,它是从集合Γ中删除一个子集Γ_1得到的集合,使得对于S中的任意一个集合Γ_2,Γ_1中至少包含Γ_2中的一个公式,这里S是所有极小不协调语句集的集合.所以,Γ_4是一个与A协调的语句集.设$\Gamma-\Gamma_4=\{A_1,A_2,\ldots,A_n\}$,$A_i$是在过程 RComplete 中处理与$A$极小不协调的语句集$\Delta_i$时删除的,显然$A_i\notin\Delta_j,i\neq j$,即$\Delta_i-\{A_i\}\subseteq\Gamma_4$.所以,对于任何一个$A_i$,$\Gamma_4\cup\{A_i\}$与$A$都是不协调的,因此,$\Gamma_4$关于$A$是极大协调的.定理得证. □

定理 **3**. 过程 RComplete(S,Γ)是完全的.也就是说,上述过程最后得到的是所有的极大协调子集.

证明:采用反证法证明.假设存在一个极大协调的子集Γ_1,$\Gamma_1\notin M$,则存在一个这样的集合Δ,$\Gamma-\Delta$关于A是协调的,对于任意$A\in\Delta$,$\Gamma_1\cup\{A\}$是不协调的,但在过程中没有枚举到集合Δ,而过程 RComplete 是完全枚举,这就产生了矛盾.结论得证. □

例 4:同样,也用第 2 节中给出的例子来说明如何用上述规则来求得所有的极大协调子集.$\Gamma=\{A,A\supset B,B\supset C,E\supset F\}$,若再加入公式$\neg C$,需要求$MC(\neg C|\Gamma)$,根据 RC-$\supset$规则和交换规则,有

$$MC(\neg C|A,A\supset B,B\supset C,E\supset F)=MC(\neg C|\neg A\vee B,A,B\supset C,E\supset F). \tag{7}$$

对于式(7),由 RC-$\vee$ right 规则,需要求$MC(\neg C|\neg A,A,B\supset C,E\supset F)$和$MC(\neg C|B,A,B\supset C,E\supset F)$.根据 RC-Γ协调性规则,有

$$MC(\neg C|\neg A,A,B\supset C,E\supset F)=\{A,\neg A\}. \tag{8}$$

对$MC(\neg C|B,A,B\supset C,E\supset F)$再次使用 RC-$\supset$规则和交换规则,有

$$MC(\neg C|B,A,B\supset C,E\supset F)=MC(\neg C|B,A,\neg B\vee C,E\supset F). \tag{9}$$

对于式(9),根据 RC-$\vee$ right 规则,需要求$MC(\neg C|B,A,\neg B,E\supset F)$和$MC(\neg C|B,A,C,E\supset F)$.由 RC-Γ协调性规则得到$MC(\neg\neg C|B,A,\neg B,E\supset F)=\{B,\neg B\}$.由公理得到$MC(\neg C|B,A,C,E\supset F)=\{C\}$.所以得到

$$MC(\neg C|B,A,B\supset C,E\supset F)=\{B,B\supset C\}. \tag{10}$$

由式(8)和式(10)得到

$$MC(\neg C|A,A\supset B,B\supset C,E\supset F)=\{A,A\supset B,B\supset C\}. \tag{11}$$

从Γ中删除任何公式都得到一个与$\neg C$ 协调的极大子集.所以,可以得到 3 个极大协调的子集,分别是$\{A\supset B,B\supset C,E\supset F\},\{A,B\supset C,E\supset F\}$和$\{A,A\supset B,E\supset F\}$.

在序列极限的方法中,若采用这一节给出的约减方法,则和第 2 节中的方法有同样的结果,就是满足公设(R*1)~(R*3),但不满足(R*4)~(R*6).限于篇幅,本文不再详细讨论这个问题.

3 与相关工作的比较

本节对序列极限的方法与其他方法进行比较,主要是与迭代的方法进行比较.序列极限的方法和迭代的方法研究的是修正序列的情况,但真值维护的方法和 AGM 的方法研究的是进行一次信念修正时的性质.真值维护的方法很繁琐,并且没有严格的理论证明.AGM 的方法只是给出了信念修正的公设,而在讨论满足其公设的修正方法时,并没有给出求极大协调子集的可操作的方法,所以,这种方法不具备可操作性.李未[3]首先研究了对信念集进行多次修正的情况,给出了序列极限的方法.后来,Boulitier[8]也提出了类似的方法,称为迭代的方法.但是,迭代的方法没有证明一个修正序列是否收敛,以及如果收敛的话,收敛到一个什么样的信念集.序列极限的方法对这些问题给予了明确的回答.关于序列极限方法和迭代方法的区别,将在其他文章中详细加以讨论.

References:

[1] Doyle, J. A truth maintenance system. Artificial Intelligence, 1979,12(3):231~272.

[2] Alchourron, C.E., Gardenfors, P, Makinson, D. On the logic of theory change: partial meet contraction and revision functions. Journal of Symbolic Logic, 1985,50(2):510~530.

[3] Li, Wei, Shen, Ning-chuan, Wang, Ju. R-Calculus: a logical approach for knowledge base maintenance. International Journal of Artificial Intelligence Tools, 1995,4(1&2):177~200.

[4] Li, Wei. An open logic system. Science in China (Series A), 1992,22(10):1103~1113 (in Chinese).

[5] Li, Wei. A logical framework for knowledge base maintenance. Journal of Computer Science and Technology, 1995,10(3):194~205.

[6] Darwiche, A., Pearl, J. On the logic of iterated belief revision. Artificial Intelligence, 1997,89(1-2):1~29.

[7] Boutilier, C. Revision sequences and nested conditionals. In: Bajcsy, R., ed. Proceedings of the IJCAI-93. San Mateo, CA: Morgan Kaufman Publishers, Inc., 1993. 519~525.

[8] Eiter, T., Gottlob, G. On the complexity of propositional knowledge base revision, updates and counterfactuals. Artificial Intelligence, 1992,57(2-3):227~270.

附中文参考文献:

[4] 李未.一个开放的逻辑系统.中国科学(A 辑),1992,22(10):1103~1113.

A Complete and Operational Approach to Belief Revision*

LI Wei[1], LUAN Shang-min[2]

[1](*Department of Computer Science and Engineering*, *Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, *Beijing* 100083, *China*);

[2](*Institute of Software*, *The Chinese Academy of Sciences*, *Beijing* 100080, *China*)

E-mail: shangmin_luan@sina.com

Abstract: In this paper, two complete and operational approaches to the revision of a belief set represented by a set of propositional belief set are presented. First, the rules of R-calculus are modified in order to deduce all the minimally consistent subsets. Second, a set of rules is given in order to deduce all the maximally inconsistent subsets. Then, a procedure which can generate all the maximally consistent subsets is presented. They are complete approaches, since all the maximally consistent subsets can be generated.

Key words: belief revision; belief set; iterated revision

---

* Received March 25, 1999; accepted August 2, 2000

Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant Nos.60033020, 60103020; the Postdoctoral Science Foundation of China