1000-9825/2001/12(09)1366-09 ©2001 Journal of Software 软件学报 Vol. 12, No. 9

多 Agent 信念逻辑及其在概率意义下的推广*

曹子宁[1,2]， 董红斌[3]， 石纯一[1]

[1](清华大学 计算机科学与技术系,北京 100084);

[2](中国科学院 计算技术研究所 智能信息处理开放实验室,北京 100080);

[3](哈尔滨师范大学 计算机科学系,黑龙江 哈尔滨 150080)

E-mail: caozn@263.net

摘要：首先建立了一种多 Agent 信念逻辑 MBL(multi-agent belief logic),在经典信念逻辑基础上增加了普遍信念算子和公共信念算子,给出 MBL 的 Kripke 语义与广义 Aumann 语义,讨论了两者的等价性,证明了 MBL 对于上述两种语义的可靠性和完备性.其次,建立了一种多 Agent 概率信念逻辑 MPBL(multi-agent probabilistic belief logic),通过在广义 Aumann 语义基础上引入概率空间,给出了 MPBL 的概率 Aumann 语义,证明了它的可靠性,并给出 MPBL 的一些推论.

关键词：信念逻辑;Kripke 语义;广义 Aumann 语义;概率信念逻辑;概率 Aumann 语义;多 Agent 系统

中图法分类号：TP18 **文献标识码**：A

关于信念推理的研究最初是哲学界所关注的问题[1],20 世纪 60 年代以后随着 Kripke 的可能世界语义的提出,对信念有了严格的逻辑分析.此后,人工智能专家、理论计算机科学家、经济学家、对策论专家也对信念的推理产生了兴趣[2~11].信念逻辑与非单调推理、MAS(multi-agent system)中的思维状态研究等均有密切联系[3,10,11],已成为人工智能研究中的一个重要内容[2].信念是与知识相联系的一个概念.本文将关于知识逻辑的一些已有的研究结果推广到信念逻辑的情形.

在经济学中,知识不是使用逻辑学家常用的 Kripke 语义来表示的,而是使用 Aumann 语义来表示[4,5].经济学界关于知识推理的文献都可以追溯到 Aumann 的论文[4].在 Aumann 的模型中,论域称为可能空间,其中元素称为状态,P 是论域上的一个划分,h 将可能空间的元素映射到该元素所在的划分类中,在状态 ω 下称知道事件 E(这里 E 是可能空间的子集,而不是知识逻辑中的逻辑公式),指 $\omega\in\{\omega'\mid h(\omega')\subseteq E\}$.但经济学界关于知识推理的文献没有考虑显式地表示和推理知识的逻辑语言.

文献[6]中引进一个多模态语言作为分析 MAS 中知识推理的形式化工具,为其建立了合理的 Kripke 语义与 Aumann 语义.知识逻辑的 Kripke 语义是众所周知的,因此不再赘述.知识逻辑的 Aumann 模型是元组 $A=(S,E,\pi)$,其中 S 是非空集,其元素可称为状态;E 是 S 上的一个划分;π 是函数:$P\rightarrow\mathscr{P}(S)$,$P$ 是原子命题集,$\mathscr{P}(S)$是 S 的幂集.在此模型下定义 $k(e)=\{s\in S\mid E(s)\subseteq e$,这里,$E(s)$表示 S 的划分 E 中 s 所在的等价类$\}$.定义$(A,s)\models K\varphi$ 为 $s\in k(ev_A(\varphi))$,其中 $ev_A(\varphi)$为 A 中所有满足 φ 的状态的集合.这样就给出了知识逻辑的 Aumann 语义.文献[6]证明了知识逻辑的 Kripke 语义与 Aumann 语义的等价性.

* 收稿日期：1999-10-13；修改日期：2000-04-20

基金项目：国家自然科学基金资助项目(69973023;69733020);黑龙江省自然科学基金资助项目(F00-04)

作者简介：曹子宁(1972-),男,江苏南京人,博士生,主要研究领域为多 Agent 系统;董红斌(1963-),男,河北唐山人,副教授,主要研究领域为分布式人工智能;石纯一(1935-),男,河北山海关人,教授,博士生导师,主要研究领域为人工智能应用基础.

文献[7]将上述结果推广到持不同语言的 MAS 中的知识逻辑. 其中 Agent i 有语言集 Φ_i, Agent i 和 Agent j 之间有翻译函数 t_{ij},其作用是将 Agent i 使用的语言翻译为 Agent j 可理解的语言. 进而文献[7]给出了 $S5_n^{CD}$ 逻辑系统以及相应的 Kripke 模型和 Aumann 模型,当 $\Phi_i=\Phi_j$ 且 $t_{ij}=Id_{\Phi_i}(i,j\leqslant n)$时,上述逻辑系统和模型退化为文献[7]中的逻辑系统和模型. 文献[7]中证明了 Kripke 语义与 Aumann 语义等价以及 $S5_n^{CD}$ 相对于 Kripke 语义的可靠性与完备性.

然而 Aumann 语义仅仅是对知识逻辑定义的,Kripke 语义和 Aumann 语义的等价性也仅对知识逻辑成立. 对于信念逻辑(或其他逻辑)来说,是否可定义相应的广义 Aumann 语义? 已有的文献对此未加讨论. 本文第 1 节将上述多 Agent 知识逻辑的结果推广到多 Agent 信念逻辑. 首先建立了一个多 Agent 信念逻辑,类似于知识逻辑中的普遍知识和公共知识的概念,给出了多 Agent 环境下信念逻辑中的普遍信念和公共信念的概念以及有关公理和推理规则. 其次定义了多 Agent 信念逻辑的广义 Aumann 语义. 本文定义的 MBL 的广义 Aumann 语义与文献[6]中知识逻辑的 Aumann语义类似,也建立在等价类的概念上,两者的主要差别在于,本文的广义 Aumann 语义增加了函数 V_i,V_i 将 S 关于划分 E_i 的每个等价类 e 映射为 e 的非空子集. 在 MBL 的广义 Aumann 语义中,直观上,S 关于划分 E_i 的每个等价类 e 可以看做是Agent i的信息集,Agent i在同一等价类 e 中任意两个状态 s_1,s_2 中所拥有的信息看做是相同的. 若Agent i 的状态 $s\in e$,则 $V_i(e)$是 Agent i根据其拥有的信息相信所有可能的状态之集. 本文证明了多 Agent 信念逻辑的 Kripke 语义与广义 Aumann 语义等价以及多 Agent 信念逻辑关于 Kripke 语义的可靠性和完备性,从而多 Agent 信念逻辑关于广义 Aumann 语义也是可靠且完备的.

此外,人工智能领域常遇到对具有概率特征的不确定信息进行表示和推理的问题. 在专家系统中常用信度函数来表示具有概率特征的不确定知识或命题,但信度函数方法缺乏逻辑系统的推理能力. 如何给出一种具有概率特征的信念逻辑系统,并进一步给出它的语义? 如何对分布式环境下多 Agent 系统的信念进行表示和推理?

文献[8]给出了一个概率知识逻辑. 首先,文献[8]扩充了知识逻辑的语言,增加了形如"$w(\varphi)\geqslant 2w(\psi)$"和"$w(\varphi)<1/3$"的公式,其中 φ 和 ψ 均为逻辑公式,可含有 w 和 K 等算子. 直观上,它们分别表示"φ 成立的可能性不小于 ψ 成立的可能性的 2 倍"和"φ 成立的可能性小于 1/3". 更一般的公式形如"$a_1w(\varphi_1)+\ldots+a_kw(\varphi_k)\geqslant b$",公式"$w(\varphi)\geqslant w(\psi)$"是"$w(\varphi)-w(\psi)\geqslant 0$"的缩写,公式"$K^b(\varphi)$"是"$K(w(\varphi)\geqslant b)$"的缩写. 其次,文献[8]在经典知识逻辑的公理系统基础上,增加了线性不等式公理和概率公理. 从而得到一个逻辑. 为了给出该逻辑的语义,文献[8]在知识逻辑的 Kripke 模型的基础上,对每个可能世界引入了概率空间,并给出在所给逻辑系统下概率空间所应满足的若干条件,"$a_1w(\varphi_1)+\ldots+a_kw(\varphi_k)\geqslant b$ 在模型 M 的可能世界 s 下满足"是指"$a_1\mu_{s*}(S_s(\varphi_1))+\ldots+a_k\mu_{s*}(S_s(\varphi_k))\geqslant b$",其中 μ_{s*} 是内测度,$S_s(\varphi)$是 s 的可能世界中所有满足 φ 的可能世界的集合. 最后,文献[8]给出了该逻辑系统的可靠性、小模型存在性以及判定复杂性,并进一步引入了公共知识.

本文第 2 节将上述工作推广到信念逻辑中,给出一种多 Agent 概率信念逻辑 MPBL 及语义,并证明了它的可靠性. 它与文献[8]的主要区别在于:(1) 在语法上,文献[8]中的基本公式形如"$K(\varphi)$"和"$a_1w(\varphi_1)+\ldots+a_kw(\varphi_k)\geqslant b$",但本文没有引入形如"$a_1w(\varphi_1)+\ldots+a_kw(\varphi_k)\geqslant b$"的公式. 因为这样的公式更类似计算,而不是逻辑. MPBL 的基本公式形如"$B(a,\varphi)$",这是文献[8]中的公式"$K^b(\varphi)$"在信念逻辑中的类比. (2) 在语义上,文献[8]是在知识逻辑的 Kripke 语义的基础上引入概率空间而给出其逻辑的语义. 而本文是在 MBL 的广义 Aumann 语义的基础上引入了概率

空间而给出 MPBL 逻辑的概率 Aumann 语义. Kripke 语义的限制较宽,因此文献[8]为满足某些公理而需对模型加上若干约束条件,而本文的概率 Aumann 语义是针对信念逻辑而提出的,一些约束条件(例如文献[8]中的约束条件 UNIF)在本文的模型中自然得到了满足. 这也表明,MPBL 的语义与文献[8]中的语义相比,更加简单、自然.

1 多 Agent 信念逻辑 MBL 及其 Kripke 语义与广义 Aumann 语义

本节首先介绍多 Agent 信念逻辑的 Kripke 语义,然后将知识逻辑中的 Aumann 语义推广到多 Agent 信念逻辑中,给出多 Agent 信念逻辑的广义 Aumann 语义的定义. 与知识逻辑的Aumann 语义类似,它也建立在等价类的概念上. 本节将知识逻辑的 Kripke 语义与 Aumann 语义的等价性结果推广到多 Agent 信念逻辑中,最后证明 MBL 相对于 Kripke 语义与广义 Aumann 语义的可靠性和完备性.

1.1 MBL 的语法

定义 1. 多 Agent 信念逻辑系统 MBL 的合式公式集 L^{mb} 定义为:(1) 若 $\varphi\in$ 原子公式集,则 $\varphi\in L^{mb}$;(2) 若 $\varphi\in L^{mb}$,则 $\neg\varphi\in L^{mb}$;(3) 若 $\varphi_1,\varphi_2\in L^{mb}$,则 $\varphi_1\wedge\varphi_2\in L^{mb}$;(4) 若 $\varphi\in L^{mb}$,则 $B_i\varphi\in L^{mb}$;(5) 若 $\varphi\in L^{mb}$,$G\subseteq\{1,\ldots,n\}$,则 $EB_G\varphi\in L^{mb}$;(6) 若 $\varphi\in L^{mb}$,$G\subseteq\{1,\ldots,n\}$,则 $CB_G\varphi\in L^{mb}$.

直观上,$B_i\varphi$ 是指 Agent i 相信 φ. $EB_G\varphi$ 是指集合 G 中的 Agent 达成对 φ 的普遍信念,即集合 G 中每个 Agent 相信 φ. $CB_G\varphi$ 是指集合 G 中的 Agent 达成对 φ 的公共信念,即集合 G 中每个 Agent 相信 φ,并且集合 G 中每个 Agent 相信集合 G 中每个 Agent 相信 φ,如此重复下去.

1.2 MBL 的 Kripke 语义

定义 2. MBL 的 Kripke 模型是元组 $K=(S,R_1,\ldots,R_n,\pi)$,其中:(1) S 是非空集,其元素称为可能世界;(2) R_i 是 S 上的关系,满足欧几里德性($\forall s\forall s'\forall s''(sR_is'\wedge sR_is''\rightarrow s'R_is'')$)、传递性($\forall s\forall s'\forall s''(sR_is'\wedge s'R_is''\rightarrow sR_is'')$)及连续性($\forall s\exists s'(sR_is')$);(3) π 是映射:$S\times P\rightarrow\{\text{true},\text{false}\}$,$P$ 是 MBL 的原子命题集.

定义 3. MBL 的 Kripke 语义

$(K,s)\models p$ iff $\pi(s,p)=\text{true}$ 如果 p 为原子公式.

$(K,s)\models\neg\varphi$ iff $(K,s)\not\models\varphi$.

$(K,s)\models\varphi_1\wedge\varphi_2$ iff $(K,s)\models\varphi_1$ 并且 $(K,s)\models\varphi_2$.

$(K,s)\models B_i\varphi$ iff $(K,s')\models\varphi$ 对于所有 s',$(s,s')\in R_i$.

$(K,s)\models EB_G\varphi$ iff 对于所有 $i\in G$,$(K,s)\models B_i\varphi$.

$(K,s)\models CB_G\varphi$ iff 对于所有 $k\geq1$,$(K,s)\models EB_G^{(k)}\varphi$. 这里,$EB_G^{(1)}\varphi=EB_G\varphi$,$EB_G^{(k+1)}\varphi=EB_G(EB_G^{(k)}\varphi)(k\geq1)$.

若对于所有 s,有 $(K,s)\models\varphi$,则记为 $K\models\varphi$.

1.3 MBL 的广义 Aumann 语义

定义 4. MBL 的广义 Aumann 模型是元组 $A=(S,E_1,\ldots,E_n,V_1,\ldots,V_n,\pi)$,其中:(1) S 是非空集,其元素可称为状态;(2) E_i 是 S 上的一个划分;(3) V_i 是映射,将 E_i 划分 S 得到的每个集合 e 映射为 e 的非空子集,即对于每个 E_i 划分的等价类 e 有 $V_i(e)\subseteq e$,$V_i(e)\neq\varnothing$;(4) π 是函数:$P\rightarrow\mathscr{P}(S)$,$P$ 是原子命题集,$\mathscr{P}(S)$ 是 S 的幂集.

定义 5. 给定广义 Aumann 模型,信念算子 $b_i:\mathscr{P}(S)\rightarrow\mathscr{P}(S)$,普遍信念算子 $eb_G:\mathscr{P}(S)\rightarrow$

$\mathscr{P}(S)$,公共信念算子 $cb_G:\mathscr{P}(S)\to\mathscr{P}(S)$ 是指对于每个 $A\subseteq S$,(1) $b_i(A)=\{s\in S\mid V_i(e)\subseteq A$,其中 $s\in e\}$;(2) $eb_G(A)=\bigcap_{i\in G}b_i(A)$;(3) $cb_G(A)=\bigcap_{k\geq 1}eb_G^{(k)}(A)$,这里,$eb_G^{(1)}(A)=eb_G(A)$,$eb_G^{(k+1)}(A)=eb_G(eb_G^{(k)}(A))(k\geq 1)$.

定义 6. 赋值函数 ev_A 规定为:(1) 若 $p\in MBL$ 的原子公式集,则 $ev_A(p)=\pi(p)$;(2) $ev_A(\neg\varphi)=S-ev_A(\varphi)$;(3) $ev_A(\varphi_1\wedge\varphi_2)=ev_A(\varphi_1)\bigcap ev_A(\varphi_2)$;(4) $ev_A(B_i\varphi)=b_i(ev_A(\varphi))$;(5) $ev_A(EB_G\varphi)=eb_G(ev_A(\varphi))$;(6) $ev_A(CB_G\varphi)=cb_G(ev_A(\varphi))$.

定义 7. MBL 的广义 Aumann 语义:

$$(A,s)\models\varphi \text{ iff } s\in ev_A(\varphi).$$

若对于所有 s,有 $(A,s)\models\varphi$,则记为 $A\models\varphi$.

1.4 MBL 的公理系统

命题逻辑的公理和规则:

公理 1.1. $B_i\varphi\to B_iB_i\varphi$:(若 Agent i 相信 φ,则它相信自己相信 φ).

公理 1.2. $\neg B_i\varphi\to B_i\neg B_i\varphi$(若 Agent i 不相信 φ,则它相信自己不相信 φ).

公理 1.3. $B_i\varphi\wedge B_i(\varphi\to\psi)\to B_i\psi$(若 Agent i 相信 φ 和 $\varphi\to\psi$,则它相信 ψ).

公理 1.4. $B_i\varphi\to\neg B_i\neg\varphi$(若 Agent i 相信 φ,则它不相信自己不相信 φ).

公理 1.5. $EB_G\varphi\leftrightarrow\bigwedge_{i\in G}B_i\varphi$,其中 $G\subseteq\{1,\ldots,n\}$(集合 G 中的 Agent 达成对 φ 的普遍信念,即集合 G 中每个 Agent 相信 φ).

公理 1.6. $CB_G\varphi\leftrightarrow EB_G(\varphi\wedge CB_G\varphi)$(集合 G 中的 Agent 达成对 φ 的公共信念,即集合 G 中的 Agent达成对 $\varphi\wedge CB_G\varphi$ 的普遍信念).

规则 1.1. $\vdash\varphi\Rightarrow\vdash B_i\varphi$(若 φ 是永真式,则 Agent i 相信 φ).

规则 1.2. $\vdash\varphi\to EB_G(\psi\wedge\varphi)\Rightarrow\vdash\varphi\to CB_G\psi$(若 φ 蕴含 $EB_G(\psi\wedge\varphi)$,则 φ 蕴含 $CB_G\psi$).

1.5 MBL 的 Kripke 语义和广义 Aumann 语义的等价性

定义映射 F:任给 Kripke 模型 $K=(S_K,R_{iK},\pi_K)$,$F(K)=A$ 为一个广义 Aumann 模型,且满足以下条件:设 $A=(S_A,E_{iA},V_{iA},\pi_A)$,则 $S_K=S_A$,$E_{iA}=\{(s,t)\mid R_{iK}(s)=R_{iK}(t)\}$(下面的引理 1 将证明 E_{iA}是等价关系),对于任一 E_{iA}划分的子集 e,$V_{iA}(e)=\{t\mid(s,t)\in R_{iK}$,其中 $s\in e\}$,对于任一原子命题 φ,$\pi_A(\varphi)=\{s\mid\pi_K(s,\varphi)=\text{true}\}$.

易知,F 是 1-1 映射.为方便起见,略去 Kripke 模型 $K=(S_K,R_K,\pi_K)$中的下标 K 和广义 Aumann模型 $A=(S_A,E_A,V_A,\pi_A)$ 中的下标 A.

容易证明以下引理成立.

引理 1. (1) 假设 S 上的关系 R_i 满足欧几里德性、传递性及连续性,令 $E=\{(s,t)\mid R_i(s)=R_i(t)\}$,其中 $R_i(s)=\{t\mid(s,t)\in R_i\}$,则 E_i 是等价关系.设 e 是 S 在划分 E_i 下的等价类,$s\in e$,令 $V_{i,s}(e)=\{t\mid(s,t)\in R_i\}$,则对任何 $s,t\in e$,有 $V_{i,s}(e)=V_{i,t}(e)$,且 $V_{i,s}(e)\subseteq e$,$V_{i,s}(e)\neq\varnothing$.

(2) 反之,设E_i 是 S 上的一个划分.V_i 是一个函数,它将 S 关于划分 E_i 的等价类 e 映射为 e 的非空子集,即对于每个 E_i 划分的等价类 e 有 $V_i(e)\subseteq e$,$V_i(e)\neq\varnothing$.令 $R_i=\{(s,t)\mid s\in E_i$ 的一个等价类 e,$t\in V_i(e)\}$,则 R_i 满足欧几里德性、传递性及连续性.

因为引理 1 中的(1)已证明对于 $s,t\in e$,有 $V_{i,s}(e)=V_{i,t}(e)$,故 $V_{i,s}(e)$仅依赖于 e,可将 $V_{i,s}(e)$记为 $V_i(e)$.并且对 $s\in e$,将 $V_i(s)$记为 $V_i(e)$.

引理 2. 对于任意 Kripke 模型 K 及 $\varphi\in L^{mb}$, $ev_{F(K)}(\varphi)=\{s\in S\mid(K,s)\models\varphi\}$.

对于公式 φ 用结构归纳法可证.

命题 1. 若 $F(K)=A$,则对于任意公式 φ、任意 s,有 $(K,s)\models\varphi\Leftrightarrow(A,s)\models\varphi$.

由引理 2 及定义 3 和定义 7 可以得到.

1.6 MBL 的 Kripke 语义和广义 Aumann 语义的可靠性与完备性

引理 3. 设 $A\subseteq L^{mb}$,每个 MBL 一致的 A 子集可扩大为极大 MBL 一致的公式集.

证明:按逻辑中通常的方法容易证明.

设 $\varphi\in L^{mb}$,记 φ 的所有子公式集为 $Sub(\varphi)$,并记 $Sub^{+}(\varphi)=Sub(\varphi)\cup\{B_i\psi\mid EB_G\psi\in Sub(\varphi),i\in G\}\cup\{B_i(\psi\wedge CB_G\psi)\mid CB_G\psi\in Sub(\varphi),i\in G\}$,再令 $Sub^{*}(\varphi)=Sub^{+}(\varphi)\cup\{\neg\psi\mid\psi\in Sub^{+}(\varphi)\}$. □

引理 4. $Sub^{*}(\varphi)$是有限的.

证明:首先由 $Sub^{+}(\varphi)$的构造可知 $Sub^{+}(\varphi)$有限,从而 $Sub^{*}(\varphi)$也有限.

令 $S_\varphi=Con(\varphi)=\{$极大 MBL 一致的 $Sub^{*}(\varphi)$子集$\}$,若 $p\in V$,则 $\pi(V)(p)=\text{true}$,若 $p\notin V$,则 $\pi(V)(p)=\text{false}$. 这里,$V\in S_p$, $p\in Sub^{*}(\varphi)$, $R_i=\{(V,W)\mid V,W\in S_\varphi$,且$\exists\ V',W'$,使 $V'/B_i\subseteq W'$,其中 $V\subseteq V',W\subseteq W',V',W'$均为极大 MBL 一致的公式集$\}$, $i=1,\ldots,n$,则 $M_\varphi=(S_\varphi,R_1,\ldots,R_n,\pi)$称为 MBL 的典范 φ-模型. □

引理 5. M_φ 是有限的 Kripke 模型,且 R_i 满足欧几里德性、传递性及连续性.

证明:由模态逻辑中通常证法可知,MBL 的公理 1.1~1.6 及规则 1.1 和规则 1.2 保证 R_i 是欧几里德的、传递的和连续的,M_φ 的有限性由引理 4 可知. □

引理 6. 对于任意 $\psi\in Sub^{*}(\varphi)$及 $V\in Con(\varphi)$, $(M_\varphi,V)\models\psi$ 当且仅当 $\psi\in V$.

证明:施归纳法于 ψ 的长度,技术细节仿文献[6]中的定理 3.1.3,3.3.1,3.4.1 及练习 3.28 和 3.30. □

命题 2. MBL 的公理系统关于 Kripke 语义可靠且完备.

证明:MBL 的公理系统关于 Kripke 语义可靠易证.下证完备性,反设$\models\varphi$,且 $\neg\varphi$ 与 MBL 一致,则$\neg\varphi\in Sub^{*}(\varphi)$且 $\neg\varphi$ 与 MBL 一致,由引理 3 可知,存在 $V\in Con(\varphi)$,使$\neg\varphi\in V$,由引理 6 得 $(M_\varphi,V)\models\neg\varphi$, $(M_\varphi,V)\not\models\varphi$,矛盾. □

命题 3. MBL 的公理系统关于广义 Aumann 语义可靠且完备.

证明:因为由命题 2,MBL 的公理系统关于 Kripke 语义可靠且完备,由命题 1 可知,若 $F(K)=A$,则对于任意公式 φ,有 $K\models\varphi\Leftrightarrow A\models\varphi$,故 MBL 的公理系统关于广义 Aumann 语义可靠且完备. □

2 多 Agent 概率信念逻辑 MPBL 及其语义

MAS 中可言 Agent i 相信 φ 以不小于 a 的概率成立,而在已有的信念逻辑中却无法表达这种含义.本节将首先提出一个多 Agent 概率信念逻辑 MPBL,为在 MAS 的信念逻辑中表达概率含义提供一个形式化逻辑系统.然后通过在 MBL 的广义 Aumann 模型中引入概率空间,给出 MPBL 的概率 Aumann 语义,它建立在等价类的概念上,要求在同一等价类中的状态上的概率测度空间相同,且样本空间为等价类的非空子集.本节证明了 MPBL 相对于该语义的可靠性,并给出了 MPBL 的一些推论.

2.1 MPBL 的语法

定义 8. 多 Agent 概率信念逻辑 MPBL 的合式公式集 L^{mpb} 定义为:(1) 若 $\varphi\in$ 原子公式集,则 $\varphi\in L^{mpb}$;(2) 若 $\varphi\in L^{mpb}$,则 $\neg\varphi\in L^{mpb}$;(3) 若 $\varphi_1,\varphi_2\in L^{mpb}$,则 $\varphi_1\wedge\varphi_2\in L^{mpb}$;(4) 若 $\varphi\in L^{mpb}$,且 $a\in[0,1]$,则 $B_i(a,\varphi)\in L^{mpb}$;(5) 若 $\varphi\in L^{mpb}$,$G\subseteq\{1,\ldots,n\}$,且 $a\in[0,1]$,则 $EB_G(a,\varphi)\in L^{mpb}$;(6) 若 $\varphi\in L^{mpb}$,$G\subseteq\{1,\ldots,n\}$,且 $a\in[0,1]$,则 $CB_G(a,\varphi)\in L^{mpb}$.

直观上,$B_i(a,\varphi)$是指 Agent i 相信 φ 成立的概率不小于 a. $EB_G(a,\varphi)$是指集合 G 中的 Agent 达成对 φ 成立的概率不小于 a 的普遍信念,即集合 G 中每个 Agent 相信 φ 成立的概率不小于 a. $CB_G(a,\varphi)$是指集合 G 中每个 Agent 相信 φ 成立的概率不小于 a,并且集合 G 中每个 Agent 相信"集合 G 中每个 Agent 相信 φ 成立的概率不小于 a"成立的概率不小于 a,如此重复下去.

2.2 MPBL 的概率 Aumann 语义

定义 9. MPBL 的概率 Aumann 模型是元组 $A=(S,E_i,V_i,\pi,P_i)$,其中:(1) S 是一个非空集,其元素可称为状态;(2) E_i 是 S 上的一个划分;(3) V_i 是一个映射,它将 E_i 划分 S 所得到的每个集合 e 映射为 e 的非空子集,即对于每个 E_i 的等价类 e 有 $V_i(e)\subseteq e$,$V_i(e)\neq\varnothing$;(4) π 是一个映射:$P\rightarrow\mathscr{P}(S)$,$P$ 是原子命题集,$\mathscr{P}(S)$是 S 的幂集;(5) P_i 是一个映射,它将每个 E_i 等价类 e 映射为概率空间$(\Omega_{i,e},X_{i,e},\mu_{i,e})$,其中样本空间 $\Omega_{i,e}=V_i(e)$,$X_{i,e}$是 $\Omega_{i,e}$上的 σ-代数,$\mu_{i,e}$是 $X_{i,e}$中元素的概率测度. 这里,概率空间$(\Omega_{i,e},X_{i,e},\mu_{i,e})$满足概率空间的公理.

定义 10. 给定广义 Aumann 模型,信念算子 $b_i^a:\mathscr{P}(S)\rightarrow\mathscr{P}(S)$,普遍信念算子 $eb_G^a:\mathscr{P}(S)\rightarrow\mathscr{P}(S)$,公共信念算子 $cb_G^a:\mathscr{P}(S)\rightarrow\mathscr{P}(S)$定义如下:对于每个 $A\subseteq S$,(1) $b_i^a(A)=\{s\in S\mid\mu_{i,e*}(V_i(e)\cap A)\geqslant a\}$,其中 $s\in e$,对于任一集合 A,$\mu_{i,e*}(A)=\sup\{\mu_{i,e}(B)\mid B\subseteq A$ 且 $B\in X_{i,e}\}$;(2) $eb_G^a(A)=\bigcap_{i\in G}b_i^a(A)$;(3) $cb_G^a(A)=\bigcap_{k\geqslant1}eb_G^{a(k)}(A)$,这里,$eb_G^{a(1)}(A)=eb_G^a(A)$,$eb_G^{a(k+1)}(A)=eb_G^a(A\cap eb_G^{a(k)}(A))(k\geqslant1)$.

定义 11. 赋值函数 ev_A 为:(1) 若 $p\in$ 原子公式集,则 $ev_A(p)=\pi(p)$;(2) $ev_A(\neg\varphi)=S-ev_A(\varphi)$;(3) $ev_A(\varphi_1\wedge\varphi_2)=ev_A(\varphi_1)\cap ev_A(\varphi_2)$;(4) $ev_A(B_i(a,\varphi))=b_i^a(ev_A(\varphi))$;(5) $ev_A(EB_G(a,\varphi))=eb_G^a(ev_A(\varphi))$;(6) $ev_A(CB_G(a,\varphi))=cb_G^a(ev_A(\varphi))$.

定义 12. MPBL 的概率 Aumann 语义:

$$(A,s)\models\varphi \text{ iff } s\in ev_A(\varphi).$$

若对于所有 s,有$(A,s)\models\varphi$,则记为 $A\models\varphi$.

2.3 多 Agent 概率信念逻辑 MPBL 的公理系统

命题逻辑的公理和规则:

公理 2.1. $B_i(0,\varphi)$(对任一命题 φ,Agent i 相信 φ 成立的概率不小于 0).

公理 2.2. $B_i(a,\varphi)\wedge B_i(b,\psi)\rightarrow B_i(\max(a+b-1,0),\varphi\wedge\psi)$(若 Agent i 相信 φ 成立的概率不小于 a,相信 ψ 成立的概率不小于 b,则 Agent i 相信 $\varphi\wedge\psi$ 成立的概率不小于 $\max(a+b-1,0)$).

公理 2.3. $B_i(a,\varphi)\rightarrow B_i(1,B_i(a,\varphi))$(若 Agent i 相信 φ 成立的概率不小于 a,则 Agent i 相信 $B_i(a,\varphi)$成立的概率不小于 1).

公理 2.4. $\neg B_i(a,\varphi)\rightarrow B_i(1,\neg B_i(a,\varphi))$(若 Agent i 不相信 φ 成立的概率不小于 a,则 Agent i 相信$\neg B_i(a,\varphi)$成立的概率不小于 1).

公理 2.5. $B_i(a,\varphi)\rightarrow B_i(b,\varphi)$,其中 $0\leqslant b\leqslant a\leqslant1$(若 Agent i 相信 φ 成立的概率不小于 a,且 $a\geqslant$

$b \geqslant 0$,则 Agent i 相信 φ 成立的概率不小于 b).

公理 2.6. $EB_G(a,\varphi) \leftrightarrow \wedge_{i \in G} B_i(a,\varphi)$,其中 $G \subseteq \{1,\ldots,n\}$(集合 G 中的 Agent 达成对 φ 成立的概率不小于 a 的普遍信念,即集合 G 中每个 Agent 相信 φ 成立的概率不小于 a).

公理 2.7. $CB_G(a,\varphi) \leftrightarrow EB_G(a,\varphi \wedge CB_G(a,\varphi))$($CB_G(a,\varphi)$ 等价于集合 G 中的 Agent 达成对 $\varphi \wedge CB_G(a,\varphi)$ 成立的概率不小于 a 的普遍信念).

规则 2.1. $\vdash \varphi \Rightarrow \vdash B_i(1,\varphi)$(若 φ 是重言式,则 Agent i 相信 φ 成立的概率不小于 1).

规则 2.2. $\vdash \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \vdash B_i(a,\varphi) \rightarrow B_i(a,\psi)$(若 φ 蕴含 ψ,则 Agent i 相信 φ 成立的概率不小于 a 蕴含 Agent i 相信 ψ 成立的概率不小于 a).

规则 2.3. $\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \vdash \neg(B_i(a,\varphi) \wedge B_i(b,\psi))$,其中 $a+b>1$(若 φ 和 ψ 是对立命题,则 Agent i 不会相信 φ 成立的概率大于等于 a,ψ 成立的概率大于等于 b,且 $a+b>1$).

规则 2.4. $\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \vdash B_i(a,\varphi) \wedge B_i(b,\psi) \rightarrow B_i(a+b,\varphi \vee \psi)$(若 φ 和 ψ 是对立命题,且 Agent i 相信 φ 成立的概率不小于 a,相信 ψ 成立的概率不小于 b,则 Agent i 相信 $\varphi \vee \psi$ 成立的概率不小于 $a+b$).

规则 2.5. $\vdash \varphi \rightarrow EB_G(a,\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \vdash \varphi \rightarrow CB_G(a,\psi)$(若 φ 蕴含 $EB_G(a,\psi \wedge \varphi)$,则 φ 蕴含 $CB_G(a,\psi)$).

2.4 MPBL 的可靠性

引理 7. $\mu_{i,e*}(A \cap B) \geqslant \mu_{i,e*}(A) + \mu_{i,e*}(B) - 1$.

引理 8. $eb_G^a(ev_A(\varphi) \cap \bigcap_{k \geqslant 1} eb_G^{a(k)}(ev_A(\varphi))) = \bigcap_{k \geqslant 1} eb_G^{a(k)}(ev_A(\varphi))$.

命题 4. MPBL 是可靠的.

证明:仅对 MPBL 的公理 2.2、公理 2.7 和规则 2.5 分别证明如下,其余类似可证.

对于公理 2.2:设 $(A,s) \models B_i(a,\varphi) \wedge B_i(b,\psi)$,$s \in e$,故 $\mu_{i,e*}(V_i(e) \cap ev_A(\varphi)) \geqslant a$,$\mu_{i,e*}(V_i(e) \cap ev_A(\psi)) \geqslant b$,由引理 7 可知,$\mu_{i,e*}(V_i(e) \cap ev_A(\varphi \wedge \psi)) = \mu_{i,e*}(V_i(e) \cap ev_A(\varphi) \cap ev_A(\psi)) \geqslant \mu_{i,e*}(V_i(e) \cap ev_A(\varphi)) + \mu_{i,e*}(V_i(e) \cap ev_A(\psi)) - 1 \geqslant a+b-1$,即 $(A,s) \models B_i(\max(a+b-1,0),\varphi \wedge \psi)$.

对于公理 2.7:只需证 $\bigcap_{k \geqslant 1} eb_G^{a(k)}(ev_A(\varphi)) = eb_G^a(ev_A(\varphi) \cap \bigcap_{k \geqslant 1} eb_G^{a(k)}(ev_A(\varphi)))$.由引理 8 可得.

对于规则 2.5:因为 $\vdash \varphi \rightarrow EB_G(a,\psi \wedge \varphi)$,故对所有 s 有 $(A,s) \models \varphi \rightarrow EB_G(a,\psi \wedge \varphi)$,即对任一 s,若 $(A,s) \models \varphi$,则 $(A,s) \models EB_G(a,\psi \wedge \varphi)$,从而对任一 s,若 $s \in ev_A(\varphi)$,则 $s \in eb_G^a(ev_A(\psi \wedge \varphi))$,因此 $ev_A(\varphi) \subseteq eb_G^a(ev_A(\psi \wedge \varphi))$.以下证明对任一 k,有 $ev_A(\varphi) \subseteq eb_G^{a(k)}(ev_A(\psi))$,这里,$eb_G^{a(1)}(ev_A(\psi)) = eb_G^a(ev_A(\psi))$,$eb_G^{a(k+1)}(ev_A(\psi)) = eb_G^a(ev_A(\psi) \cap eb_G^{a(k)}(ev_A(\psi)))$,其中 $k \geqslant 1$.因为 $ev_A(\varphi) \subseteq eb_G^a(ev_A(\psi \wedge \varphi)) = eb_G^a(ev_A(\psi) \cap ev_A(\varphi))$,将 $eb_G^a(ev_A(\psi) \cap ev_A(\varphi))$ 代入 $\subseteq$ 右边的 $ev_A(\varphi)$,重复 $k-1$ 次,可得 $ev_A(\varphi) \subseteq eb_G^{a(k)}(ev_A(\psi))$.从而 $ev_A(\varphi) \subseteq \bigcap_{k \geqslant 1} eb_G^{a(k)}(ev_A(\psi))$,故 $\vdash \varphi \rightarrow EB_G(a,\psi \wedge \varphi) \Rightarrow \vdash \varphi \rightarrow CB_G(a,\psi)$. □

2.5 MPBL 的一些推论

性质 1. $\neg(B_i(a,\varphi) \wedge B_i(b,\neg\varphi))$,这里 $a-b>1$.

直观意义:对任一 φ,Agent i 不会相信 φ 成立的概率不小于 a 并且 $\neg\varphi$ 成立的概率不小于 b,这里 $a+b>1$.

性质 2. $B_i(a,\varphi) \wedge B_i(1,\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow B_i(a,\psi)$.

直观意义:如果 Agent i 相信 φ 成立的概率不小于 a,相信 $\varphi\to\psi$ 成立的概率不小于 1,则 Agent i 相信 ψ 成立的概率不小于 a.

定义 13. $M_i(b,\varphi)\equiv B_i(b,\varphi)\wedge B_i(1-b,\neg\varphi)$(直观上,$M_i(a,\varphi)$是指 Agent i 相信 φ 成立的概率为 a).

性质 3. $B_i(1,\varphi)\wedge B_i(1,\psi)\leftrightarrow B_i(1,\varphi\wedge\psi)$.

直观意义:如果 Agent i 相信 φ 成立的概率不小于 1,相信 ψ 成立的概率等于 1,则 Agent i 相信 $\varphi\wedge\psi$ 成立的概率不小于 1.

性质 4. $M_i(a,\varphi)\wedge M_i(b,\psi)\wedge M_i(c,\psi\wedge\varphi)\to M_i(a+b-c,\psi\vee\varphi)$.

直观意义:如果 Agent i 相信 φ 成立的概率等于 a,相信 ψ 成立的概率等于 b,相信 $\psi\wedge\varphi$ 成立的概率等于 c,则相信 $\psi\vee\varphi$ 成立的概率等于 $a+b-c$.

性质 5. $CB_G(1,\varphi)\leftrightarrow EB_G(1,\varphi\wedge CB_G(1,\varphi))$.

直观意义:Agent 集达成对 φ 成立概率等于 1 的公共信念,当且仅当 Agent 集达成对 φ 和对 φ 公共信念成立概率等于 1 的普遍信念.这是对经典信念逻辑中的公理:$CB_G(\varphi)\leftrightarrow EB_G(\varphi\wedge CB_G(\varphi))$ 的推广.由测度论可知,一个事件成立的概率等于 1 并不意味着事件必定成立,但反之成立.故性质 5 是对 $CB_G(\varphi)\leftrightarrow EB_G(\varphi\wedge CB_G(\varphi))$的实质性的推广.

3 结束语

本文首先给出了多 Agent 信念逻辑 MBL 的 Kripke 语义与广义 Aumann 语义,讨论了两者的等价性,并证明了 MBL 对于上述两种语义的可靠性和完备性,从而为描述多 Agent 系统中社会性思维状态提供了一种形式化的工具.其次,本文给出了一种多 Agent 概率信念逻辑 MPBL,通过在广义 Aumann 语义基础上引入概率空间,给出了 MPBL 的概率 Aumann 语义,证明了它的可靠性,并给出了 MPBL 的一些推论.

References:

[1] Hintikka, J. Knowledge and Belief. Ithaca, New York: Cornell University Press, 1962.

[2] Konolige, K. A Deduction Model of Belief. Los Atlos, CA: Morgan Kaufmann Publishers, Inc., 1986.

[3] Rao, A.S., Georgeff, M.P. Modeling rational Agents within a BDI-architecture. In: Allen. J., Fikes. R., Sandewall, E., eds. Principles of Knowledge Representation and Reasoning: Proceedings of the 2nd International Conference (KR'91). San Mateo, CA: Morgan Kaufmann Publishers, Inc., 1991. 473~484.

[4] Auamnn, R.J. Agreeing to disagree. Annals of Statistics, 1976,4(6):1236~1239.

[5] Fudenberg, D., Tirole, J. Game Theory. Cambridge, MA: MIT Press, 1991.

[6] Fagin, R., Halpern, J.Y., Moses, Y., *et al.* Reasoning about Knowledge. Cambridge, MA: MIT Press, 1995.

[7] Lu, Ru-qian, Ying, Ming-sheng. A model of reasoning about knowledge. Science in China (Series E), 1998,41(5):527~534 (in Chinese).

[8] Fagin, R., Halpern, J.Y. Reasoning about knowledge and probability. Journal of the ACM, 1994,41(2):340~367.

[9] Halpern, J.Y., Moses, Y. Knowledge and common knowledge in a distributed environment. Journal of the ACM, 1990, 37(3):549~587.

[10] Benerecetti, M., Cimatti, A., Giunchiglia, E. *et al.* Formal specification of beliefs in multi-agent systems. In: Müller, J.P., Wooldridge, M.J., Jennings, N.R., eds. Intelligent Agents III (LNCS 1193). Berlin: Springer-Verlag, 1996. 117~130.

[11] Wooldridge, M. Temporal belief logics for modeling distributed artificial intelligence systems. In: O'Hare, G., Jennings, N.R., eds. Foundations of Distributed Artificial Intelligence. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1996. 267~286.

附中文参考文献:

[7] 陆汝钤,应明生.知识推理的一个模型.中国科学(E辑),1998,28(4):363~369.

A Multi-Agent Belief Logic and Its Generalization with Probability*

CAO Zi-ning[1,2], DONG Hong-bin[3], SHI Chun-yi[1]

[1](*Department of Computer Science and Technology, Tsinghua University, Beijing* 100084, *China*);

[2](*Laboratory of Intelligent Information Processing, Institute of Computing Technology, The Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080, *China*);

[3](*Department of Computer Science, Harbin Normal University, Harbin* 150080, *China*)

E-mail: caozn@263.net

Abstract: In this paper, a multi-agent belief logic named MBL (multi-agent belief logic) is presented firstly. Based on the classical belief logic, MBL is added into the modal operators of every-belief and common-belief. Then the Kripke semantics and generalized Aumann semantics of MBL are given, the equivalence of the two semantics, the soundness and completeness of MBL about the two semantics are proved. Secondly, a multi-agent probabilistic belief logic named MPBL (multi-agent probabilistic belief logic) is presented. By introducing the probability space on generalized Aumann model, the probabilistic Aumann semantics of MPBL are given, and its soundness about generalized Aumann semantics is proved. At last, some corollaries of MPBL are given.

Key words: belief logic; Kripke semantics; generalized Aumann semantics; probabilistic belief logic; probabilistic Aumann semantics; MAS (multi-agent system)

* Received October 13, 1999; accepted April 20, 2000

Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant Nos. 69973023, 69733020; the Natural Science Foundation of Heilongjiang Province of China under Grant No. F00-04