关于 P5P 问题的研究*

吴福朝[1,2], 胡占义[1]

[1](中国科学院 自动化研究所 模式识别国家重点实验室,北京 100080);

[2](安徽大学 人工智能研究所,安徽 合肥 230039)

E-mail: {fcwu,huzy}@nlpr.ia.ac.cn

http://nlpr.ia.ac.cn

摘要: PnP 问题是计算机视觉、摄影测量学乃至数学领域的一个经典问题.系统地研究了 P5P 问题,用代数方法证明了下述结论:当 5 个控制点中任意 3 点不共线时,P5P 问题最多有两个解,并且解的上限可以达到.同时给出了有惟一解和有两个解的代数条件以及求解 P5P 问题的具体算法.在物体定位、机器人导航等领域具有比较重要的应用价值.

关键词: P5P 问题;SVD(singular value decomposition)分解;坐标变换

中图法分类号: TP301 **文献标识码**: A

PnP 问题是计算机视觉、摄影测量学乃至数学领域的一个经典问题.自从该问题首次于 1981 年提出之后[1],由于其在物体定位方面的重要应用价值,引起了人们的广泛重视.而后,这方面大量文章的相继问世充分说明了这一点,参见文献[1~12].PnP 问题的研究焦点是确定在哪种情况下问题有惟一解,如果惟一解不存在,则确定问题至多可能有多少个解以及解的分布状况.文献中对 PnP 问题的研究集中在对 P3P 问题、P4P 问题和 P5P 问题的研究上.这是因为 P2P 问题有无限多组解,当$n>5$时,PnP 问题变成了经典的 DLT(direct linear transformation)问题,均可以线性求解.目前,人们对 P3P 问题、P4P 问题已研究得比较清楚,并有如下结论:P3P 问题最多有 4 个解,且解的上限可以达到[1,2,4,5];对于 P4P 问题,当 4 个控制点共面时,问题有惟一解[1,7],当 4 个控制点不共面时,问题最多可能有 5 个解,且解的上限可以达到[12].然而,对于 P5P 问题,文献中却很少有相关报道,本文的工作正是在这种情况下进行的.本文的主要结论是,当 5 个控制点中任意 3 点不共线时,则 P5P 问题最多可能有两个解,且解的上限可以达到.本文同时给出了有惟一解和有两个解的代数条件以及求解 P5P 问题的具体算法.下面,我们将对上述结论进行详细的介绍.

本文第 1 节给出 P5P 的定义.第 2 节是本文的核心部分,给出了主要结论及其数学证明.第 3 节为数值例子.第 4 节是简短的小结.

对本文所使用的数学符号作如下规定:点与其坐标向量(列向量)用同一个小写黑体字母表示,如 $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z},\ldots$;矩阵用大写黑体字母表示,如 $\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z},\ldots$;标量用小写字母表示,如 $x,y,z,\ldots$

1 PnP 的定义

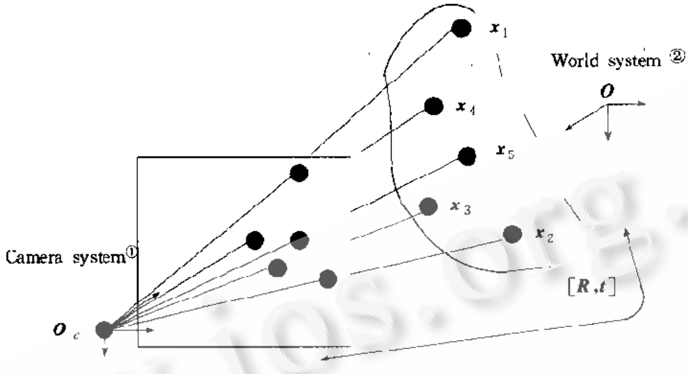
PnP 问题的定义是:已知 n 个控制点在世界坐标系中的坐标 $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_n$ 与对应的图像点在

* 收稿日期: 2000-10-19; 修改日期: 2001-01-15

基金项目: 国家重点基础研究发展规划 973 资助项目(G1998030502);国家自然科学基金资助项目(69975021,60075004,60033010)

作者简介: 吴福朝(1957-),男,安徽安庆人,教授,博士生导师,主要研究领域为计算机视觉,应用数学;胡占义(1961-),男,山西繁峙人,博士,研究员,博士生导师,主要研究领域为三维视觉,主动视觉,特征提取.

像平面中的坐标 $u_1,u_2,...,u_n$,并假定摄像机内参数矩阵 K 已知(不失一般性,在本文中总假定 $K=I$(I 表示单位矩阵)),求摄像机关于世界坐标系的方向与位置$[R\ t]$(如图 1 所示).其中 R 是旋转矩阵,表示摄像机的方向;t 为平移向量,表示摄像机的位置.



①摄像机坐标系,②世界坐标系.

Fig.1 Graphical explanation on PnP problem
图1 PnP问题图示

文献[3]在研究 P4P 问题时指出,对于 P5P 问题,可将其分解为若干个 P4P 或 P3P 问题,然后通过 Ransac 算法再综合出该问题的解.由于求解 P4P 或 P3P 问题最终要求解一个一元四次方程,按照文献[3]所述方法求解 P5P 问题就需要求解一系列一元四次方程.本文的研究表明,这样做是不必要的,实际上,对于 P5P 问题只需求解一元二次方程组即可.

2 主要结论

命题. 若 5 个控制点中任意 3 点不共线,则 P5P 问题至多有两个解.

如果 5 个控制点中存在共面的 4 个点,由于这 4 个共面的控制点中任意 3 个不共线,所以对应的 P4P 问题有惟一解[1,7].这样,相应的 P5P 问题也必有惟一解.因此,我们只要证明在 5 个控制点中任意 4 个均不共面的情况下,命题仍成立即可.

2.1 摄像机投影矩阵的一般解

为了在任意 4 个控制点不共面的情况下证明该命题,我们先给出摄像机矩阵的一般解.

令世界坐标系 $O\text{-}xyz$ 与摄像机坐标系 $O_c\text{-}x^{(c)}y^{(c)}z^{(c)}$ 之间的关系为 $x^{(c)}=Rx+t$,其中 R 为旋转矩阵,t 为位移向量.空间点在世界坐标系 $O\text{-}xyz$ 下的坐标记为 x,它在像平面上的投影点的坐标记为 $u=[u,v]^T$,则有(摄像机内参数矩阵为单位阵)

$$\lambda\begin{bmatrix}u\\1\end{bmatrix}=Rx+t=M\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}, \tag{1}$$

其中 λ 为非零常数因子.

矩阵 $M=[R\ t]$称为摄像机投影矩阵.

令 $x_i=(x_i,y_i,z_i)^T(i=1,2,...,5)$是 5 个控制点,$u_i=(u_i,v_i)^T(i=1,2,...,5)$是对应的图像点,记 $\tilde{x}_i=(x_i,y_i,z_i,1)^T$,$\tilde{u}_i=(u_i,v_i,1)^T$,由式(1)可以得到

$$M\tilde{x}_i=\lambda_i\tilde{u}_i,\quad i=1,2,...,5. \tag{2}$$

记 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_{10} \\ m_4 & m_5 & m_6 & m_{11} \\ m_7 & m_8 & m_9 & m_{12} \end{bmatrix}$，从式(2)中消去 λ_i 可以得到

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_{2(i-1)+1}^T \boldsymbol{f}=0 \\ \boldsymbol{a}_{2(i-1)+2}^T \boldsymbol{f}=0 \end{cases}, \quad i=1,2,3,4,5. \tag{3}$$

其中

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_{2(i-1)+1}^T=(x_i,y_i,z_i,0,0,0,-u_ix_i,-u_iy_i,-u_iz_i,1,0,-u_i) \\ \boldsymbol{a}_{2(i-1)+2}^T=(0,0,0,x_i,y_i,z_i,-v_ix_i,-v_iy_i,-v_iz_i,0,1,-v_i). \\ \boldsymbol{f}=(m_1,m_2,m_3,m_4,m_5,m_6,m_7,m_8,m_9,m_{10},m_{11},m_{12})^T \end{cases} \tag{4}$$

于是，线性方程组(3)可写成矩阵形式：

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{f}=0, \tag{5}$$

其中 $$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 0 & 0 & 0 & -u_1x_1 & -u_1y_1 & -u_1z_1 & 1 & 0 & -u_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & z_1 & -v_1x_1 & -v_1y_1 & -v_1z_1 & 0 & 1 & -v_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_5 & y_5 & z_5 & 0 & 0 & 0 & -u_5x_5 & -u_5y_5 & -u_5z_5 & 1 & 0 & -u_5 \\ 0 & 0 & 0 & x_5 & y_5 & z_5 & -v_5x_5 & -v_5y_5 & -v_5z_5 & 0 & 1 & -v_5 \end{bmatrix}.$$

为了给出方程式(5)的解，我们需要下述引理.

引理 1. 若任意 4 个控制点不共面，则 rank($\boldsymbol{D}$)=10.

证明：令

$$\boldsymbol{D}'=\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u_1x_1 & -u_1y_1 & -u_1z_1 & -u_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_5 & y_5 & z_5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u_5x_5 & -u_5y_5 & -u_5z_5 & -u_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 & -v_1x_1 & -v_1y_1 & -v_1z_1 & -v_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_5 & y_5 & z_5 & 1 & -v_5x_5 & -v_5y_5 & -v_5z_5 & -v_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_5^T \\ \boldsymbol{b}_6^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_{10}^T \end{bmatrix}$$

由于 $\boldsymbol{D}'$ 是通过矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的行交换与列交换所得到的，所以 rank($\boldsymbol{D}'$)=rank($\boldsymbol{D}$). 这样，我们只需证明 rank($\boldsymbol{D}'$)=10. 显然

$$\boldsymbol{b}_i^T=\begin{cases} (\tilde{\boldsymbol{x}}_i^T,0_{1\times 4},-u_i\tilde{\boldsymbol{x}}_i^T) & i=1,2,3,4,5 \\ (0_{1\times 4},\tilde{\boldsymbol{x}}_{i-5}^T,-v_{i-5}\tilde{\boldsymbol{x}}_{i-5}^T) & i=6,7,8,9,10 \end{cases}. \tag{6}$$

若 rank($\boldsymbol{D}'$)<10，则存在 $\boldsymbol{b}_{i_0}^T$ 能被向量组 $\{\boldsymbol{b}_i^T, i\neq i_0\}$ 线性表示. 不失一般性，

令 $$\boldsymbol{b}_{i_0}^T=\sum_{i=1}^{9}\alpha_i\boldsymbol{b}_i^T,$$

于是，考虑 $\boldsymbol{b}_i^T$ 的前 4 个分量，有

$$\alpha_1\tilde{\boldsymbol{x}}_1+\alpha_2\tilde{\boldsymbol{x}}_2+\alpha_3\tilde{\boldsymbol{x}}_3+\alpha_4\tilde{\boldsymbol{x}}_4+\alpha_5\tilde{\boldsymbol{x}}_5=0. \tag{7}$$

同样，考虑 $\boldsymbol{b}_i^T$ 的第 5～8 个分量，以及第 9 分量到最后一个分量，有

$$\alpha_6\tilde{\boldsymbol{x}}_1+\alpha_7\tilde{\boldsymbol{x}}_2+\alpha_8\tilde{\boldsymbol{x}}_3+\alpha_9\tilde{\boldsymbol{x}}_4=\tilde{\boldsymbol{x}}_5, \tag{8}$$

$$-(\alpha_1u_1+\alpha_6v_1)\tilde{\boldsymbol{x}}_1-(\alpha_2u_2+\alpha_7v_2)\tilde{\boldsymbol{x}}_2-(\alpha_3u_3+\alpha_8v_3)\tilde{\boldsymbol{x}}_3-(\alpha_4u_4+\alpha_9v_4)\tilde{\boldsymbol{x}}_4=(\alpha_5u_5-v_5)\tilde{\boldsymbol{x}}_5. \tag{9}$$

由于 $\boldsymbol{x}_i=(x_i,y_i,z_i)^T, i=1,2,\ldots,5$ 中任意 4 点不共面，所以 $\tilde{\boldsymbol{x}}_i=(x_i,y_i,z_i,1)^T (i=1,2,\ldots,5)$ 中任意 4 个向量都是线性无关的，因此，由式(8)可知

$$\alpha_i \neq 0,\quad i=6,7,8,9. \tag{10}$$

将式(8)代入式(7),有

$$(\alpha_1+\alpha_5\alpha_6)\tilde{x}_1+(\alpha_2+\alpha_5\alpha_7)\tilde{x}_2+(\alpha_3+\alpha_5\alpha_8)\tilde{x}_3+(\alpha_4+\alpha_5\alpha_9)\tilde{x}_4=0,$$

从而有

$$\alpha_1=\alpha_5\alpha_6,\ \alpha_2=-\alpha_5\alpha_7,\ \alpha_3=-\alpha_5\alpha_8,\ \alpha_4=-\alpha_5\alpha_9. \tag{11}$$

将式(8)和式(11)代入式(9),可以得到:

$$\alpha_6(\alpha_5u_1-v_1-(\alpha_5u_5-v_5))\tilde{x}_1+\alpha_7(\alpha_5u_2-v_2-(\alpha_5u_5-v_5))\tilde{x}_2+$$
$$\alpha_8(\alpha_5u_3-v_3-(\alpha_5u_5-v_5))\tilde{x}_3+\alpha_9(\alpha_5u_4-v_4-(\alpha_5u_5-v_5))\tilde{x}_4=0. \tag{12}$$

由式(10)和式(12),有

$$\begin{cases}\alpha_5u_1-v_1=\alpha_5u_5-v_5\\ \alpha_5u_2-v_2=\alpha_5u_5-v_5\\ \alpha_5u_3-v_3=\alpha_5u_5-v_5\\ \alpha_5u_4-v_4=\alpha_5u_5-v_5\end{cases} \tag{13}$$

上式表明 $\boldsymbol{u}_i=(u_i,v_i)^T(i=1,2,...,5)$ 在同一直线 $L:\alpha_5u-v=\alpha_5u_5-v_5$ 上.这说明 5 个控制点在同一个平面上.这是不可能的,故 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{D}')=10$.

下面考虑方程(5)的解.

由引理 1,$\boldsymbol{D}$ 有下面的奇异值分解:

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{U}[\boldsymbol{\Sigma}\ \boldsymbol{0}]\boldsymbol{V}^T. \tag{14}$$

其中 $\boldsymbol{U}=[u_{ij}]_{10\times 10}$ 和 $\boldsymbol{V}=[v_{ij}]_{12\times 12}$ 是正交矩阵,$\boldsymbol{\Sigma}=\mathrm{diag}(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_{12})$ 是对角矩阵,$\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant...\geqslant\sigma_{10}>0$.令 $\boldsymbol{f}_1=\boldsymbol{v}_{11},\boldsymbol{f}_2=\boldsymbol{v}_{12}$ 分别为 $\boldsymbol{V}$ 的第 11 列与第 12 列元素所构成的列向量,则它们必为式(5)的两个线性无关解.因此,式(5)的一般解为

$$\boldsymbol{f}=\alpha\boldsymbol{v}_{11}\beta\boldsymbol{v}_{12},\quad \alpha,\beta\in R. \tag{15}$$

令

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{M}^{(1)}&=\begin{bmatrix}v_{11,1}&v_{11,2}&v_{11,3}&v_{11,10}\\ v_{11,4}&v_{11,5}&v_{11,6}&v_{11,11}\\ v_{11,7}&v_{11,8}&v_{11,9}&v_{11,12}\end{bmatrix}=[\boldsymbol{Q}^{(1)}\ \boldsymbol{q}^{(1)}],\\ \boldsymbol{M}^{(2)}&=\begin{bmatrix}v_{12,1}&v_{12,2}&v_{12,3}&v_{12,10}\\ v_{12,4}&v_{12,5}&v_{12,6}&v_{12,11}\\ v_{12,7}&v_{12,8}&v_{12,9}&v_{12,12}\end{bmatrix}=[\boldsymbol{Q}^{(1)}\ \boldsymbol{q}^{(1)}],\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

于是,有下述引理*.

引理 2. 若任意 4 个空间点不共面,则摄像机投影矩阵的一般解为

$$\boldsymbol{M}=\alpha\boldsymbol{M}^{(1)}+\beta\boldsymbol{M}^{(2)},\quad \alpha,\beta\in R. \tag{17}$$

2.2 命题的证明

由引理 2,

$$\boldsymbol{R}=\alpha\boldsymbol{Q}^{(1)}+\beta\boldsymbol{Q}^{(2)},\quad t=\alpha\boldsymbol{q}^{(1)}+\beta\boldsymbol{q}^{(2)}. \tag{18}$$

---

* 由于 $\boldsymbol{M}^{(i)}$ 是将 5 个控制点投影到相应的 5 个图像点的投影矩阵,所以 $\boldsymbol{Q}^{i}\neq 0$.否则,$\boldsymbol{M}^{(i)}$ 将 5 个点投影到一个图像点,这样,5 个控制点位于通过光心的同一条直线上,这是不可能的.

由于 $\alpha^2+\beta^2\neq 0$,所以不妨假定 $\alpha\neq 0$. 令 $x=\frac{1}{\alpha}$, $y=\frac{\beta}{\alpha}$,则式(18)化为

$$\boldsymbol{x R}=\boldsymbol{Q}^{(1)}+y\boldsymbol{Q}^{(2)},\quad x\boldsymbol{t}=\boldsymbol{q}^{(1)}+y\boldsymbol{q}^{(2)}. \tag{19}$$

将式(19)中第1式两边分别转置,再右乘得

$$x^2\boldsymbol{I}=y^2A+y\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}. \tag{20}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}^{(2)}(\boldsymbol{Q}^{(2)})^T=[a_{ij}]_{3\times 3},$$
$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}^{(1)}(\boldsymbol{Q}^{(2)})^T+\boldsymbol{Q}^{(2)},(\boldsymbol{Q}^{(1)})^T=[b_{ij}]_{3\times 3},$$
$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{Q}^{(1)}(\boldsymbol{Q}^{(1)})^T=[c_{ij}]_{3\times 3}.$$

由式(20),有

$$\begin{cases} a_{12}y^2+b_{12}y+c_{12}=0\\ a_{13}y^2+b_{13}y+c_{13}=0\\ a_{23}y^2+b_{23}y+c_{23}=0\\ (a_{11}-a_{33})y^2+(b_{11}-b_{33})y+(c_{11}-c_{33})=0\\ (a_{22}-a_{33})y^2+(b_{22}-b_{33})y+(c_{22}-c_{33})=0 \end{cases}, \tag{21}$$

$$a_{33}y^2+b_{33}y+c_{33}=x^2. \tag{22}$$

情形1. 方程组(21)中的系数不全为0.

此时,方程组(21)至多有两个解:

$$y=y_k^*,\quad k=1,2. \tag{23}$$

代入式(22),可以得到

$$x=\pm\sqrt{a_{33}y_k^{*2}+b_{33}y_k^*+c_{33}}. \tag{24}$$

由式(19),有

$$\boldsymbol{R}=\pm\frac{1}{\sqrt{a_{33}y_k^{*2}+b_{33}y_k^*+c_{33}}}(\boldsymbol{Q}^{(1)}+y_k^*\boldsymbol{Q}^{(2)}), \tag{25}$$

$$\boldsymbol{t}=\pm\frac{1}{\sqrt{a_{33}y_k^{*2}+b_{33}y_k^*+c_{33}}}(\boldsymbol{q}^{(1)}+y_k^*\boldsymbol{q}^{(2)}). \tag{26}$$

由于 $\boldsymbol{R}$ 是旋转矩阵,所以 $\mathrm{Det}(\boldsymbol{R})=1$. 因此式(25)和式(26)中的符号只能取其中之一,若 $\mathrm{Det}(\tilde{\boldsymbol{Q}}^{(1)}+y_k^*\tilde{\boldsymbol{Q}}^{(2)})>0$,则取正号,反之,则取负号. 故此时P5P问题至多有两个解.

情形2. 方程组(21)中的系数全为0.

从表面上看,似乎此时P5P问题有无穷多解. 事实上,此时的解是惟一的,证明见附录*.

---

* 综合情形1和情形2,有P5P问题解的如下代数条件:

· 当方程组(21)的系数全为0时,P5P问题有惟一解;

· 当方程组(21)的系数不全为0时,如果任意两个方程的系数均对应成比例且无重根,则P5P问题有两个解,否则有惟一解.

命题的证明过程实际上也给出了P5P问题具体的求解算法,现综合如下:

(1) 利用SVD分解技术,求解线性方程组(5)得到摄像机投影矩阵的一般解.

(2) 根据一般解,建立一元二次方程组(21),并解这个方程组.

(3) 由式(25)和式(26)计算摄像机的方向与位置.

3 多解 P5P 问题的实例

上一节我们已经证明,P5P 问题最多有两个解.本节将通过实例表明两个解是可达到的.

例 1:

5 个空间点:

$$\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}\frac{7}{37}\\[4pt] \frac{5}{37}\\[4pt] \frac{1}{5}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\[4pt] \frac{1}{5}\\[4pt] 1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix}\frac{2}{5}\\[4pt] \frac{1}{5}\\[4pt] \frac{1}{2}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{x}_4=\begin{bmatrix}\frac{5}{17}\\[4pt] \frac{3}{17}\\[4pt] \frac{1}{3}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{x}_5=\begin{bmatrix}\frac{3}{13}\\[4pt] \frac{2}{13}\\[4pt] \frac{1}{4}\end{bmatrix}.$$

5 个图像点:

$$\boldsymbol{u}_1=\begin{bmatrix}\frac{35}{37}\\[4pt] \frac{25}{37}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{u}_2=\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\[4pt] \frac{1}{5}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{u}_3=\begin{bmatrix}\frac{4}{5}\\[4pt] \frac{2}{5}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{u}_4=\begin{bmatrix}\frac{15}{17}\\[4pt] \frac{9}{17}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{u}_5=\begin{bmatrix}\frac{12}{13}\\[4pt] \frac{8}{13}\end{bmatrix}.$$

可验证矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$的所有 4 阶子行列式均不为 0,这说明 5 个控制点中任意 4 个均不共面,因此任意 3 个控制点也均不共线.即满足命题的条件.对应的 P5P 问题有两个解,它们是

$$[\boldsymbol{R}_1\ \boldsymbol{t}_1]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad [\boldsymbol{R}_2\ \boldsymbol{t}_2]=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

4 结束语

本文用代数方法系统地研究了 P5P 问题,指出在一般条件下,P5P 问题至多有两个解,并且解的上界是可达到的.本文所得结论的证明过程,同时也是求解 P5P 问题的算法过程.本文的结果,在物体定位、机器人导航等领域具有比较重要的理论意义和具体的应用价值.

References:

[1] Fishler, M.A., Bolles R.C. Random sample consensus: a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography. Communications of the ACM, 1981,24(6):381~395.

[2] Haralick, R.M., Lee, Chung-nan, Ottenberg, K., *et al.* Analysis and solution of the three point perspective pose estimation problem. In: Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 1991. 592~598.

[3] Horaud, R., Conio, B., Leboulleux, O. An analytic solution for the perspective 4 point problem. Computer Vision Graphics and Image Processing, 1989,47(1):33~44.

[4] Wolfe, W.J., Mathis, D. The perspective view of three points. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1991,13(1):66~73.

[5] Su, Cheng, Xu, Ying-qing, Li, Hua, *et al.* Necessary and sufficient condition of positive root number of perspective-three-point problem. Chinese Journal of Computers, 1998,21(12):1084~1095 (in Chinese).

[6] Haralick, R.M. Determining camera parameters from the perspective projection of a rectangle. Pattern Recognition, 1989, 22(3):225~230.

[7] Penna, M.A. Determining camera parameters from the perspective projection of a quadrilateral. Pattern Recognition, 1991,24(6):533~541.

[8] Quan, Long, Lan, Zhong-dan. Linear $N\geqslant 4$ point pose determination. In: Proceedings of the International Conference on

Computer Vision. 1998. 778～783.
[9] Liu, M.L., Wong, K.H. Pose estimation using four corresponding points. Pattern Recognition Letters, 1999,20(1):69～74.
[10] Dhome, M., Richetin, M., Lapreste, J.T., *et al*. Determination of the attitude of 3-D objects from a single perspective view. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1989,11(12):1265～1278.
[11] Abidi, M.A., Chandra, T. A new efficient and direct solution for pose estimation using quadrangular targets: algorithm and evaluation. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1995,17(5):534～538.
[12] Hu, Z.Y., Wu, F.C. A note on non-coplanar P4P problem. Technical Report, TR RVG 2000-9, National Laboratory of Pattern Recognition, Institute of Automation, the Chinese Academy of Sciences, 2000.

附中文参考文献：

[5] 苏成,徐迎庆,李华,等.判定P3P问题正解数目的充要条件.计算机学报,1998,21(12):1084～1095.

附录:情形2的证明

我们先给出下面的引理.

引理 A. 设 $\boldsymbol{R}$ 是3阶正交矩阵,若 $\boldsymbol{R}+\boldsymbol{R}^T=s\boldsymbol{I}$,则 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}$,$s=2$,或者 $\boldsymbol{R}=-\boldsymbol{I}$,$s=-2$.

证明:由 $\boldsymbol{R}+\boldsymbol{R}^T=s\boldsymbol{I}$ 可知,$\frac{s}{2}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R}=-\left(\frac{s}{2}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R}\right)^T$,所以,$\frac{s}{2}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R}$ 是一个反对称矩阵,于是它的特征值必为0,$\pm a\mathrm{i}$,其中 a 为实数,$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$.

(1) 当 $\mathrm{Det}(\boldsymbol{R})=1$ 时,即 $\boldsymbol{R}$ 为旋转矩阵时,$\frac{s}{2}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R}$ 必有特征值 $\frac{s}{2}-1$,$\frac{s}{2}-e^{\mathrm{i}\theta}$,于是有

$$\frac{s}{2}-1=0,\quad \left(\frac{s}{2}-\cos\theta\right)\pm\mathrm{i}\sin\theta=\pm a\mathrm{i}.$$

因此,$s=2$,$\cos\theta=1$,所以 $\theta=0$.这样,$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}$.

(2) 当 $\mathrm{Det}(\boldsymbol{R})=-1$,即 $\boldsymbol{R}$ 为反射矩阵时,$\frac{S}{2}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R}$ 必有特征值 $\frac{s}{2}+1$,$\frac{s}{2}-e^{\mathrm{i}\theta}$,于是有

$$\frac{s}{2}+1=0,\quad \left(\frac{s}{2}-\cos\theta\right)\pm\mathrm{i}\sin\theta=\pm a\mathrm{i}.$$

因此,$s=-2$,$\cos\theta=-1$,所以 $\theta=\pi$.这样,$\boldsymbol{R}=-\boldsymbol{I}$.

情形2的证明:

首先,$a_{33}\neq0$,$c_{33}\neq0$,否则必有 $A=0$ 或 $C=0$,于是有 $\boldsymbol{Q}^{(1)}=0$ 或 $\boldsymbol{Q}^{(2)}=0$,由引理2的附注,这是不可能的.这样,必有

$$\boldsymbol{A}=a_{33}\boldsymbol{I},\quad \boldsymbol{C}=c_{33}\boldsymbol{I},\quad a_{33}>0,\quad c_{33}>0. \tag{A1}$$

令 $\boldsymbol{R}_1=\frac{1}{\sqrt{c_{33}}}\boldsymbol{Q}^{(1)}$,$\boldsymbol{R}_2=\frac{1}{\sqrt{a_{33}}}\boldsymbol{Q}^{(2)}$,则由式(20)中关于矩阵 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{C}$ 的定义,有

$$\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_1^T=\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{R}_2^T=\boldsymbol{I},$$

即 $\boldsymbol{R}_1$,$\boldsymbol{R}_2$ 均为正交矩阵.于是

$$\boldsymbol{M}^{(1)}=\sqrt{c_{33}}[\boldsymbol{R}_1\quad \tilde{\boldsymbol{q}}^{(1)}],\quad \boldsymbol{M}^{(2)}=\sqrt{a_{33}}[\boldsymbol{R}_2\quad \tilde{\boldsymbol{q}}^{(2)}]. \tag{A2}$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{q}}^{(1)}=\frac{1}{\sqrt{c_{33}}}\boldsymbol{q}^{(1)}$,$\tilde{\boldsymbol{q}}^{(2)}=\frac{1}{\sqrt{a_{33}}}\boldsymbol{q}^{(2)}$.

假定 $[\boldsymbol{R}\quad \boldsymbol{t}]$ 是P5P的解,则存在不全为0的常数 α,β,使得

$$\boldsymbol{R}=\alpha\boldsymbol{R}_1+\beta\boldsymbol{R}_2,\quad \boldsymbol{t}==\alpha\tilde{\boldsymbol{q}}^{(1)}+\beta\tilde{\boldsymbol{q}}^{(2)}. \tag{A3}$$

(a) 若 $\alpha=0$,则必有 $\boldsymbol{R}=\beta\boldsymbol{R}_2$.因为 $\boldsymbol{R}$ 为旋转矩阵,所以 $\beta=\mathrm{Det}(\boldsymbol{R}_2)$.这样,

$$[\boldsymbol{R}\quad \boldsymbol{t}]=[\mathrm{Det}(\boldsymbol{R}_2)\boldsymbol{R}_2\quad \mathrm{Det}(\boldsymbol{R}_2)\tilde{\boldsymbol{q}}^{(2)}] \tag{A4}$$

是P5P的惟一解.

(b) 若 $\beta=0$,同理可以证明:

$$[\boldsymbol{R}\quad \boldsymbol{t}]=[\mathrm{Det}(\boldsymbol{R}_1)\boldsymbol{R}_1\quad \mathrm{Det}(\boldsymbol{R}_1)\tilde{\boldsymbol{q}}^{(1)}] \tag{A5}$$

是P5P的惟一解.

(c) 若 $\alpha\neq0$,$\beta\neq0$,则由式(A3)中的第1式,有

$$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^T=(\alpha\boldsymbol{R}_1+\beta\boldsymbol{R}_2)(\alpha\boldsymbol{R}_1+\beta\boldsymbol{R}_2)^T=(\alpha^2+\beta^2)\boldsymbol{I}+\alpha\beta(\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2^T-\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{R}_1^T),$$

因此,

$$R_1R_2^T+R_2R_1^T=\frac{1-(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha\beta}I,\tag{A6}$$

则由引理A,有

$$R_2R_2^T=\pm I.\tag{A7}$$

当 $R_1R_2^T=I$ 时,$R_1=R_2$,此时

$$R=(\alpha+\beta)R_1,\quad \alpha+\beta=\mathrm{Det}(R_1),$$

因此

$$[R\quad t]=[\mathrm{Det}(R_1)R_1\quad \mathrm{Det}(R_1)\tilde{q}^{(2)}+\alpha(\tilde{q}^{(1)}-\tilde{q}^{(2)})].\tag{A8}$$

若 $\tilde{q}^{(1)}=\tilde{q}^{(2)}$,则P5P问题有惟一解:

$$[R\quad t]=[\mathrm{Det}(R_1)R_1\quad \mathrm{Det}(R_1)\tilde{q}^{(2)}];$$

若 $\tilde{q}^{(1)}\neq\tilde{q}^{(2)}$,下面将证明(A8)中的 α 有惟一解 α^*,所以P5P问题有惟一解:

$$[\mathrm{Det}(R_1)R_1\quad \mathrm{Det}(R_1)\tilde{q}^{(2)}-\alpha^*(\tilde{q}^{(1)}-\tilde{q}^{(2)})].\tag{A9}$$

关于 α 有惟一解的证明:

反证:如果存在 $\alpha_1\neq\alpha_2$,均为 α 的解,则对5个控制点 x_i,有

$$[\mathrm{Det}(R_1)R_1\quad \mathrm{Det}(R_1)\tilde{q}^{(2)}+\alpha_1(\tilde{q}^{(1)}-\tilde{q}^{(2)})]\begin{bmatrix}x_i\\1\end{bmatrix}=\lambda_i[\mathrm{Det}(R_1)R_1\quad \mathrm{Det}(R_1)\tilde{q}^{(2)}+\alpha_2(\tilde{q}^{(1)}-\tilde{q}^{(2)})]\begin{bmatrix}x_i\\1\end{bmatrix},$$

于是

$$(1-\lambda_i)x_i=-(1-\lambda_i)R_1^T\tilde{q}^{(2)}-\frac{(\alpha_1-\lambda_i\alpha_2)}{\mathrm{Det}(R_1)}R_1^T(\tilde{q}^{(1)}-\tilde{q}^{(2)}).$$

这样,5个控制点必位于由向量 $R_1^T\tilde{q}^{(2)}$,$R_1^T(\tilde{q}^{(1)}-\tilde{q}^{(2)})$ 所确定的平面上,与假设矛盾.因此,P5P有惟一解(A9).事实上,α^* 可以通过求解方程A10获得.

$$[\mathrm{Det}(R_1)R_1\quad \mathrm{Det}(R_1)\tilde{q}^{(2)}+\alpha(\tilde{q}^{(1)}-\tilde{q}^{(2)})]\begin{bmatrix}x_i\\1\end{bmatrix}=s_i\begin{bmatrix}u_i\\1\end{bmatrix}.\tag{A10}$$

同理可证:当 $R_1R_2^T=-I$ 时,P5P有惟一解.故,当方程组(21)中的系数全为0时,P5P问题有惟一解.

A Study on the P5P Problem*

WU Fu-chao[1,2], HU Zhan-yi[1]

[1](*National Laboratory of Pattern Recognition, Institute of Automation, The Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080, *China*);
[2](*Laboratory of Artificial Intelligence, Anhui University, Hefei* 230039, *China*)
E-mail: {fcwu,huzy}@nlpr.ia.ac.cn
http://www.nlpr.ia.ac.cn

Abstract: The P*n*P problem is a classical problem in computer vision, photogrammetry, and even in mathematics. The P5P problem is systematically investigated in this paper. It is proved algebraically that if no 3 control points among the 5 ones are collinear, the P5P problem could have at most 2 solutions, and this upper bound is also attainable. In addition, algebraic conditions are provided for the case of the unique solution and that of the two solutions of the problem respectively and a practical algorithm to compute the admissible solutions is also presented. The obtained results are of practical importance in applications such as object pose estimation and robot navigation.

Key words: P5P problem; singular value decomposition; rigid transformation

* Received October 19, 2000; accepted January 15, 2001
Supported by the National Grand Fundamental Research 973 Program of China under Grant No. G1998030502; the National Natural Science Foundation of China under Grant Nos. 69975021, 60075004, 60033010