

平面 NURBS 曲线及其 Offset 的双圆弧逼近*

汪国平¹ 孙家广²

¹(北京大学计算机科学技术系 北京 100871)

²(清华大学计算机科学与技术系 北京 100084)

E-mail: wgp@graphics.pku.edu.cn

摘要 除直线、圆弧、端端曲线等少数几种曲线外,平面参数曲线的 offset 曲线通常不能表示成有理参数形式,因此在实际应用中,为了方便造型系统中数据结构和几何算法的统一表示,offset 曲线通常用低次曲线逼近来表示.通过用双圆弧逼近表示 NURBS(non-uniform rational B-spline)曲线及其 offset,并利用双圆弧逼近的特定性质,把 offset 的双圆弧逼近转化为原曲线的双圆弧逼近,简化了问题的求解,同时考虑了双圆弧逼近算法中分割点的选取、公切点的确定以及误差估计等主要问题.具体算法在自主开发的 Gems5.0 中实现.经实例表明,算法稳定、可靠.

关键词 NURBS(non-uniform rational B-spline)曲线,offset,逼近,双圆弧,计算机辅助几何设计.

中图分类号 TP391

曲线/曲面的 offset 操作在几何造型、NC(numerical control)加工和机构运动学等领域有着广泛的应用. offset 曲线/曲面几何性质丰富,一直受到众多学者的重视,其中平面曲线的 offset 最为常用,并有了许多研究成果^[1~15],它们大致可分为两类:一类是 offset 曲线内在几何性质的研究,如文献[3,4]等;另一类是 offset 的逼近表示,如文献[1,2,5~13].由于有理曲线的 offset 一般不再是有理的,在许多商品化软件中,如几何造型系统和 NC 加工的走刀路径计算等,为了方便系统中数据结构和几何算法的统一表示,常用低次有理参数曲线,如 NURBS(non-uniform rational B-spline)曲线或圆锥曲线来逼近表示.虽然用 NURBS 表示便于系统描述的一致性,而且 NURBS 表示已成为工程中几何数据表示的标准,但是,用 NURBS 表示仍有许多不足.例如,传统解析曲线/曲面,如圆锥曲线、二次曲面等,用 NURBS 表示比用传统方法表示更为复杂,更要耗费存储空间和处理时间,曲线/曲面间的几何拼接,曲线/曲面的求交等几何操作算法复杂,而且仍有许多工程中常用曲线,如 NURBS 曲线的 offset、螺旋曲线等,仍然只能用 NURBS 逼近方式表示.因此,目前许多商品化 CAD 软件均采用 NURBS 与传统解析曲线/曲面的混合表示.这样做虽然数据结构复杂,处理情形增多,但系统运行效率明显加快,尤其是在工业设计中,直线圆弧等解析曲线/曲面类型占了相当的比例的情况下.对于 NURBS 曲线的 offset 曲线的逼近表示,用圆弧样条逼近有着比仍用 NURBS 逼近更为方便的优点:(1)通常情况下,offset 曲线一般不需要控制顶点、权因子等几何形状修改工具,因此仍用 NURBS 表示只是为了表示的一致性;(2) offset 曲线在 NC 加工中的刀具刀位轨迹计算中最为常用,目前,NC 加工大多采用直线圆弧插补器,因此,用 NURBS 表示 offset 曲线,需要经过 offset→NURBS 逼近→直线圆弧逼近等多次逼近表示,易造成计算误差和逼近误差的积累,影响 NC 加工精度的有效控制.而直接用圆弧逼近 offset 曲线,则可省略上面的中间步骤,更适合 CNC(computer numerical control)加工中的在线控制;(3)圆弧可精确转换成二次或三次 NURBS 表示,方便各种造型系统之间的几何数据转换和信息传递,无需 NURBS 曲线的降价逼近;(4)用圆弧样条表示,数据结构简单,算法简明,双圆

* 本文研究得到国家自然科学基金(No. 69772019)和国家 863 高科技项目基金(No. 863-511-842-004)资助.作者汪国平,1964 年生,博士,副教授,主要研究领域为计算机图形学,CAGD,虚拟现实.孙家广,1946 年生,教授,博士生导师,中国工程院院士,主要研究领域为计算机图形学,CAD.

本文通讯联系人:汪国平,北京 100871,北京大学计算机科学技术系

本文 1999-04-23 收到原稿,1999-08-02 收到修改稿

弧逼近算法稳定、可靠。

相对于单圆弧逼近而言,双圆弧逼近具有更好的光顺效果^[9],因此,在实际中,圆弧逼近多采用双圆弧逼近,尽管逼近算法相对复杂些,本文所提到的圆弧逼近和圆弧样条均指双圆弧逼近和双圆弧样条。

offset 的逼近方法目前主要有以下几种:(1)控制顶点偏移法,如文献[1,2,6,12],方法直观,但需要多次检验修改;(2)包络方法^[8],虽然逼近曲线仍为(有理)参数形式,但逼近曲线次数升高,表示形式有差别,不利于造型系统的统一表示;(3)插值点列法^[11],影响插值曲线的精度不仅有型值点列的分布和数目,而且与数据点的参数化方法有关,因此精度控制较为复杂、困难;(4)利用两曲线所围面积等条件用最小二乘法构造曲线(如文献[5])。另外,文献[10]提出了对 offset 曲线用直线段和圆弧逼近的思想,本文采用双圆弧逼近方法逼近 offset 曲线,利用直线圆弧的 offset 仍为直线圆弧这一良好性质,采用先用双圆弧逼近原曲线,再由圆弧样条作精确 offset 曲线,结果仍为圆弧样条来表示,因此,问题转化为用双圆弧逼近 NURBS 曲线问题。虽然双圆弧插值算法已有了许多研究成果,如文献[9,13,14],但本文的出发点与以前的研究不同,以前的研究大多集中在型值点(即插值离散点)给定的假定下,从逼近和光顺的角度生成双圆弧样条曲线,但对于 NURBS 曲线的双圆弧逼近,除了上述问题以外,还需解决以下几个关键问题,一个是双圆弧两端插值点的确定,也就是曲线上的分割点的选择问题;另一个是公切点的选择问题,双圆弧逼近含有一个自由度,即公切点,曲线上的分割点和双圆弧间的公切点的适当选取,既影响双圆弧样条的圆弧段数,又影响双圆弧样条的光顺性和逼近效果;再一个是误差估计分析问题,由于误差估计过程贯穿在整个算法中,因此,误差估计方法的适当选取不仅影响曲线双圆弧样条的逼近程度,也影响到整个算法的效率,本文针对上述 3 个问题,提出了相应的算法,经实例验证,算法稳定、可靠,效果良好。

本文第 1 节给出了双圆弧逼近算法,第 2 节是误差分析,第 3 节是实例说明,最后是结论。

1 双圆弧逼近算法

设平面曲线的 k 阶 NURBS 表示如下:

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i P_i N_{i,k}(u)}{\sum_{i=0}^n w_i N_{i,k}(u)} = \sum_{i=0}^n P_i R_{i,k}(u) \quad (1)$$

其中 $N_{i,k}(u)$ 是由节点矢量 $U = \{u_0, \dots, u_{n+k}\}$ 决定的 k 阶 B 样条基函数, w_i 是相应控制点 P_i 的权因子, $R_{i,k}(u)$ 是有理 B 样条基函数。

NURBS 曲线的结点(node)定义如下: $V_i = \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} u_{i+j}$, $i=0, \dots, n$, V_i 的数目与控制顶点 P_i 相对应, V_i 反映了节点矢量的分布情况。

双圆弧逼近的含义可以描述如下:设 P_1, P_2 是曲线段 C 的两个端点, T_1, T_2 是对应的两个切向;设圆弧 C_1 过 P_1 点且与 C 在 P_1 点相切,圆弧 C_2 过 P_2 点且与 C 在 P_2 点相切,且两圆弧 C_1, C_2 有公切点。若曲线段与双圆弧之间的误差在允许逼近精度内,则称曲线段 C 有相应的双圆弧逼近。

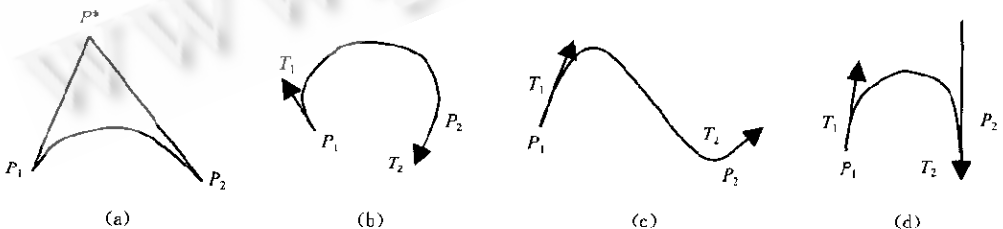


Fig. 1 The shape classify of NURBS curve segments

图 1 NURBS 曲线段的形状分类

确定两圆弧需要 6 个条件,而双圆弧逼近曲线只有 5 个条件,因此还有一个自由度,过两端点 P_1, P_2 且与曲线段在端点处相切的双圆弧可以作无数个,但可以证明下面结论:过两端点并与曲线段在端点处相切的双圆弧公切点的轨迹是一个过 P_1, P_2 两端点的圆弧^[14]。由文献[14]可知,如图 1(a)所示,设曲线段两端点 P_1, P_2 的切

线的交点为 P^* , 则 $\triangle P_1 P^* P_2$ 的内心在上述轨迹圆弧上. 双圆弧公切点的选择, 直接影响到双圆弧逼近曲线的光顺性和逼近效果.

1.1 曲线段的分割

在现有的双圆弧逼近算法中, 都假定了已取定型值点并且两型值点间可以作双圆弧插值, 例如, 文献[13]采用的型值点是用于三次 Hermite 插值, 并且对插值生成三次参数样条曲线, 再用双圆弧逼近, 因此, 已假定型值点的取法是适当的, 但当型值点过密时, 会造成插值生成的圆弧段数过多, 或者是用三次样条曲线去拟合数据点列, 再用双圆弧逼近三次样条曲线, 以减少双圆弧的逼近段数, 但要考虑两次逼近的误差积累. 而对于 NURBS 曲线, 则需要寻找上述所假定的型值点. 因此, NURBS 曲线在作双圆弧逼近前需要对曲线作预处理, 把曲线分割成若干子段, 便于对每一子段用双圆弧逼近. 用三次样条曲线去拟合数据点列, 同样会遇到在拟合曲线上取适当的双圆弧型值点列以便于双圆弧逼近的问题. 这里要求对曲线作适当的分割, 不仅是为了便于双圆弧逼近算法的实现, 而且也是为了在逼近误差允许的范围内尽可能地减少逼近圆弧段数, 这对于减少系统数据的存储空间、提高算法的效率是很有必要的. 另外, 在 NC 加工中的圆弧插补中, 可以减少 NC 加工的走刀步数, 提高加工效率.

选择曲线分割点的要求是: (1) 分割后的曲线段是凸的(上凸或下凸); (2) 分割后的曲线段的两端点的切线与两端点连线构成的三角形形状是适当的; (3) 曲线的拐点是圆弧连接点, 因此也是分割点.

这里所指的三角形形状是适当的, 其含义大致可以描述如下. 如图 1(a) 所示, 称 $\triangle P_1 P^* P_2$ 是适当的, 若顶角 $\angle P_1 P^* P_2$ 的角度是在以 $\frac{\pi}{2}$ 为中心的数值区间内. 在实际计算中, $(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$ 内的取值都认为是适当的. 这里的阈值在很大程度上是一个经验值, 当此角度较接近 π 时, 要考虑用直线段逼近曲线, 或用单圆弧逼近, 或者扩大曲线段的取值范围. 与适当的三角形相对应的曲线段也称为是适当的. 图 1 是 NURBS 曲线段的几种可能形状, 只有图 1(a) 是适当的

适当的三角形的一种选取方法是利用曲线上各点的切向绕初始点的转向角不超过 π 来确定. 但对于 NURBS 曲线, 用切线转角描述不便于算法实现. 考虑到 NURBS 控制多边形反映曲线的形状这一特点, 而且当曲线表示式(1)中的权因子一定时, 曲线的凸凹曲线段数由控制多边形来确定, 因此, 分析控制多边形的形状, 可以大致确定适当的曲线段.

对于 NURBS 曲线拐点的确定, 已有成熟的方法, 如文献[14]. 这里约定: 取与控制顶点 P_i 相对应的结点值 V_i 为参数的曲线上的点 c_i , 此点简称为与控制顶点 P_i 相对应的曲线上的点. 另外, 曲线段总是指曲线分割后的某一适当的曲线段. 确定适当曲线段的算法描述如下:

Step 1. 设控制顶点点列为 $\{P_0, \dots, P_n\}$, 计算相邻控制边之间的有向转角, 如图 2 所示.

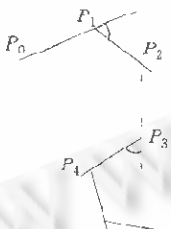


Fig. 2 The shape tendency of the control polygon

图2 控制多边形的走向

Step 2. 选择初始点 P_0 , P_0 所对应的曲线上的点记为 c_0 , 分两种情形讨论. 情形 1: 当第 i 条控制边(简称为第 i 条边)绕 P_0 点转角不超过 π , 且第 $i+1$ 条边与第 i 条边绕 P_0 点的转向一致, 而第 $i+1$ 条边绕 P_0 点转角超过 π 时, 则取控制顶点 P_i 相对应的曲线上的点 c_i 作分割点, 可以认为 c_0 与 c_i 之间的曲线段是适当的, 选择 P_i 作为下一个初始点, 继续对曲线作分割; 情形 2: 若第 i 条边绕 P_0 点转角不超过 π , 但第 $i+1$ 条边绕 P_0 点的转向与第 i 条边的转向相反, 则在 P_i, P_{i+1} 相对应的曲线上 $[c_i, c_{i+1}]$ 两点之间, 曲线可能出现拐点. 若有拐点, 则取拐点作为分割点, 并选择 P_{i+1} 作为下一个初始点; 若没有拐点, 则由第 $i+1$ 条边绕初始点的转角大小继续作下一步判断.

Step 3. 选择新的初始点 P_i , 重复 Step 2, 求出所有分割点(包括曲线上的拐点), 得到曲线上所有适当的分割点列; 结束.

作为例子, 上述算法用于分割四阶 NURBS 表示或用四阶 B 样条逼近表示的整圆, 分割点是两点, 分圆周为 3 段, 形成的三角形是适当的.

1.2 公切点的选择

对于曲线用第 1.1 节的方法分割后生成的各曲线段,还需要确定逼近双圆弧的公切点.文献[14]总结了 4 种公切点的选择方法,着重于逼近或光滑两个方面.

由于分割后的曲线段以及相应的双圆弧都是同向凸(即或者都是上凸,或者都是下凸)的,因此,根据公切点轨迹圆弧的位置与曲线段端点处的切向,可以得到以下结果.如图 3 所示,记公切点轨迹圆弧 C_0 在两端点 P_1, P_2 处的切向与 P_1P_2 的夹角分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \angle P^*P_1P_2 = \theta_1, \angle P^*P_2P_1 = \theta_2$,于是有以下定理.

定理. 若 $\alpha_1 > \theta_1$, 且 $\alpha_2 < \theta_2$, 或者 $\alpha_1 < \theta_1$ 且 $\alpha_2 > \theta_2$, 则逼近曲线 $C(t)$ 与圆弧 C_0 有且只有一个交点.

证明:不妨设 C_0 和 $C(t)$ 都是上凸的,记圆弧 C_0 在两端点处的切线的交点为 P , 则对于适当的曲线段, C_0 是尖圆弧.不妨设 $\alpha_1 > \theta_1$ 且 $\alpha_2 < \theta_2$, 如图 3 所示, 则 P_1P^* 与 C_0 有一个交点, 而 P_2P^* 与 C_0 没有交点. 从而 $C(t)$ 在 P_1 附近的一段曲线是在 C_0 的下方, 而在 P_2 附近的一段是在 C_0 的上方, 由 $C_0, C(t)$ 的上凸性质知, C 与 C_0 有且只有一个交点, 得证. \square

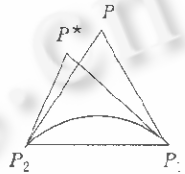


Fig. 3 Arc locus of the contangent point
图3 公切点轨迹圆弧

从逼近角度考虑,取公切点在轨迹圆弧与曲线的交点上.双圆弧曲线与被逼近的曲线段之间有 5 个交点(端点相切算两个交点),具有良好的逼近性.而当公切点取为 $\triangle P_1P^*P_2$ 的内心 N 时,由文献[14]知,此时生成的双圆弧样条的光顺性最好.但本文所给定的曲线段是由控制顶点、权因子和节点矢量决定的 NURBS 曲线,它与轨迹圆弧的交点数是不定的.因此,按以下原则取公切点:当交点数为 1 时,考虑双圆弧曲线与被逼近曲线段的逼近性,取交点为公切点;当交点数多于 1 时,在考虑曲线段之间的逼近性的同时,考虑双圆弧曲线段的光顺性,因此,取交点列中与 $\triangle P_1P^*P_2$ 的内心 N 最邻近的交点为公切点;当没有交点时,只考虑双圆弧的光顺性,此时公切点取为 $\triangle P_1P^*P_2$ 的内心 N 点.因此,上述公切点的选择方法,可以看作是一种公切点的选取准则,即在逼近与光滑两者间,优先考虑逼近,同时顾及逼近曲线的光顺性.双圆弧公切点的选取由以下算法来确定:

Step 1. 建立公切点轨迹圆弧 C_0 , 并与曲线段 $C(t)$ 在 P_1, P_2 范围内求交, 如图 3 所示.

Step 2. 确定公切点.分情形讨论:(1) 若有 1 个交点, 则交点即为公切点;(2) 若有多个交点或者两曲线段 $C_0, C(t)$ 有一段贴合, 则取交点或贴合曲线段, 求出与 $\triangle P_1P^*P_2$ 的内心 N 有最近距离的点, 此点作为公切点;(3) 若没有交点, 则取内心 N 作为公切点.

Step 3. 求出与公切点相对应的曲线上的参数值, 当公切点选为内心且 C_0 与 $C(t)$ 无交点时, 取双圆弧公切线的垂线与曲线 $C(t)$ 的交点所对应的 $C(t)$ 的参数值作为与公切点相对应的曲线上的参数值.

由第 1.1 节的算法和本节上面的算法, 可以得到双圆弧逼近算法如下:

Step 1. 预处理, 求误差测量点、曲线上的拐点和分割点;

Step 2. 对于分割后的曲线段, 建立公切点轨迹圆弧, 求公切点.

Step 3. 建立双圆弧逼近曲线.

Step 4. 取对应曲线段的测量点集, 估计曲线段与双圆弧之间的法向误差, 若误差上界超过允许精度值 ϵ , 则在最大误差值点对曲线作分割, 转至 Step 2, 否则转至 Step 5.

Step 5. 对所有分割曲线段重复 Step 1~Step 4.

Step 6. 由双圆弧序列, 合并相邻两曲线段所对应的首末双圆弧段(实际上为一圆弧的两部分), 并考虑相邻两圆弧的大小和位置, 若在逼近误差范围内, 作圆弧合并, 建立圆弧样条曲线, 并返回.

双圆弧样条最多只能达到 G^1 连续, 因此, 对于连续性要求不太高的场合, 可选用双圆弧样条逼近.

2 双圆弧逼近的误差分析

逼近曲线的误差分析, 对于修正曲线的逼近程度十分重要. 目前, 误差估计常用的方法有以下几种:(1) 选取曲线上若干离散点测量误差, 但测量点的数目和分布影响对误差的估计. 现有方法中测量点的选取都与曲线的形状无关, 但测量点的合理选取, 应反映曲线的形状, 以免发生漏检现象.(2) 用误差函数表示, 并分析误差函

数的最值位置^[8],当误差函数表达式较复杂时,确定误差函数的最大值也较困难。(3)利用两曲线间的面积来度量逼近误差,但依赖于面积的度量方法,且误差分析往往变成一个优化问题^[9]。考虑到系统的效率和实时性,本文综合考虑了前两种方法的优点,提出了一种实用、快速的方法,其中主要考虑了测量点的选取和法向误差函数的确定两方面的因素。

2.1 测量点的选取

测量点的选择应由曲线形状来决定。由于每一曲线段与双圆弧之间都要作若干次误差计算,因此,取尽可能少的误差测量点,可以在保证曲线的逼近精度的基础上提高算法效率。文献[13]采用递减或递增的方法选取若干测量点,这种算法与曲线的形状联系不大,且算法较复杂。下面给出一种选取测量点的方法,测量点的分布反映了曲线的弯曲形状,数目由逼近精度决定。整条被逼近曲线的测量点在预处理时一次选取,不必多次分段求解,从而提高了算法效率。另外,以下算法主要用到 de Boor 离散算法,在四维空间中算法是线性的,算法效率高。整条曲线上测量点列的选取算法描述如下:

Step 1. 在 NURBS 曲线的内节点处用插入节点法插至满重复度,使得 $C(t)$ 成为由分段有理 Bézier 曲线(记为 RBézier)构成的 RBézier 样条曲线;

Step 2. 对每一 RBézier 曲线段,估计曲线距底弦的高度,若高度超出误差,则用二分法分割 RBézier 曲线;

Step 3. 取所有分割后的 RBézier 曲线段的端点构成离散点列,并返回。

上述算法的基本思想是利用 NURBS 曲线与它的控制多边形之间的几何逼近关系,其实质是在曲线所需的逼近精度下,用直线段逼近曲线。易知,用双圆弧逼近的圆弧段数明显要比直线段数少。因此,每一适当的被分割后的曲线段内必有若干个测量点,若曲线段内部没有测量点,这也说明用两端点构成的弦线已满足精度需求,而无需再用圆弧逼近。由于测量点的数目和分布反映曲线的弯曲形状,测量点的数目减少,对曲线的逼近精度影响不大,而算法效率可明显提高。

2.2 法向误差函数的确定

设曲线段的分量表示为 $C(t) = (x(t), y(t)), t \in (a, b)$, 它所对应的某一逼近圆弧段 C_0 的圆心为 $O(x_0, y_0)$, 半径为 R , 圆弧段的解析表示为 $F(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2$, 则定义 $C(t)$ 与 C_0 之间的法向误差为

$$\delta(t) = F(x(t), y(t)) = |C(t) - O(x, y)|^2 - R^2, \quad t \in (a, b). \quad (2)$$

由图 4 可见,法向误差具有明显的几何意义。若上式中 $C(t)$ 是三次 NURBS 曲线段,则 $\delta(t)$ 是关于 t 的六次方程,易知 $t=a, t=b$ 是方程(2)的根,其中有一个是二重根。进一步简化式(2),记 $C(t)$ 上的点到 $O(x_0, y_0)$ 的距离为 $d(t)$, $C(t)$ 与圆弧间的误差为 Δd , 则 $d^2(t) = (R \pm \Delta d)^2$, 得 $d^2(t) - R^2 = \pm 2R\Delta d + \Delta d^2$, 从而 $\delta(t) = (2R \pm \Delta d) \cdot \Delta d$, 于是 $\Delta d = \frac{\delta(t)}{2R \pm \Delta d}$, 由于 $\Delta d \ll 2R$, 故 $\Delta d \approx \frac{\delta(t)}{2R}$, 仍用 $\delta(t)$ 表示, 则

$$\delta(t) = \frac{1}{2R} |C(t) - O(x, y)|^2 - \frac{1}{2}R. \quad (3)$$

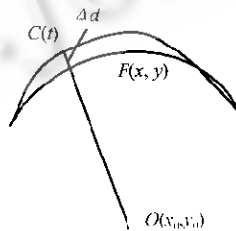


Fig. 4 The normal-error definition

图 4 法向误差的确定

由此可算出 $C(t)$ 上测量点列 $\{t_i\}_{i=0}^n$ 处的各误差值,若有上界 δ 大于逼近精度,则在最大误差值处,对 $C(t)$ 作再分割,对分割后的曲线段再作双圆弧逼近。直到被逼近的曲线段与双圆弧间的误差满足精度要求为止。

3 实例

以下几个实例在 Gems5.0 中实现,精度均从 0.01 到 10^{-7} 测试.实例表明,当精度取 10^{-7} 时,双圆弧逼近中大部分圆弧段可看作直线段.为便于显示,所有图形用原曲线和 offset 曲线的拉伸体绘出.

例 1:曲线向外作 $d=6$ 的 offset 双圆弧逼近.当逼近误差 $Eps=0.01$ 时,圆弧段数为 23 段,如图 5 所示;当 $Eps=0.001$ 时,圆弧段数为 53 段,如图 6 所示;当 $Eps=10^{-4}$ 时,圆弧段数为 115 段;当 $Eps=10^{-5}$ 时,圆弧段数为 241 段;当 $Eps=10^{-7}$ 时,圆弧段数为 974 段.

例 2:曲线向外作 $d=6$ 的 offset 双圆弧逼近.当 $Eps=0.01$ 时,圆弧段数为 32 段,如图 7 所示;当 $Eps=0.001$ 时,圆弧段数为 64 段,如图 8 所示;当 $Eps=10^{-4}$ 时,圆弧段数为 144 段;当 $Eps=10^{-6}$ 时,圆弧段数为 587 段;当 $Eps=10^{-7}$ 时,圆弧段数为 1 102 段.

例 3:曲线向外作 $d=2$ 的 offset 双圆弧逼近,当 $Eps=0.01$ 时,圆弧段数为 70 段,如图 9 所示;当 $Eps=0.001$ 时,圆弧段数为 144 段,如图 10 所示;当 $Eps=10^{-5}$ 时,圆弧段数为 627 段;当 $Eps=10^{-6}$ 时,圆弧段数为 2 343 段.图 11 是图 10 的真实感显示.

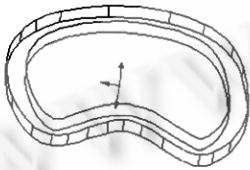


Fig. 5
图 5

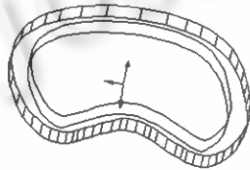


Fig. 6
图 6

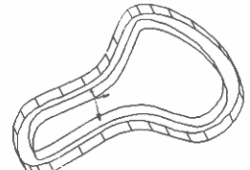


Fig. 7
图 7

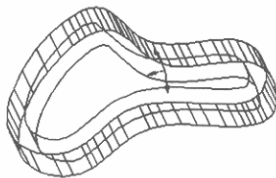


Fig. 8
图 8

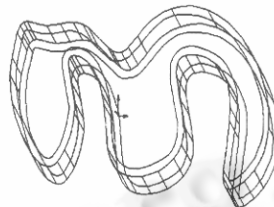


Fig. 9
图 9

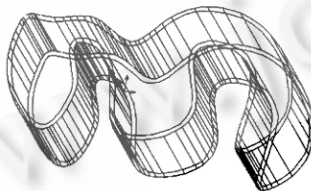


Fig. 10
图 10

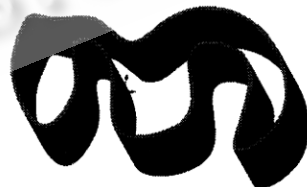


Fig. 11
图 11

4 结论

本文的目的是为了解决 offset 曲线的双圆弧逼近问题,但由于直线圆弧所具有的良好性质,问题简化为 NURBS 曲线的双圆弧逼近问题.事实上,后者本身也是有待解决的问题.虽然无论是双圆弧样条逼近算法,还是 offset 曲线逼近算法,两部分内容都已有了丰富的研究成果,但在实际的商品化软件开发中,仍有许多困难需要克服.本文提出了适当曲线段的概念,便于对曲线的分割,并从实际出发,提出了一种公切点的选取准则;同时给

出了一种整体测量点的选取方法,并推导了法向误差函数公式.本文提出的方法可以解决一般曲线用双圆弧逼近所面临的几个主要问题.方法直观简明,便于系统实现.文章也简化了 offset 曲线的逼近问题,可直接用于 NC 加工中走刀轨迹的计算和工程图纸的绘制中.

参考文献

- 1 Coquillart S. Computing offset of B-spline curves. *Computer Aided Design*, 1987, 19(6): 305~309
- 2 Elber G, Lee I K, Kim M S. Computing offset curve approximation methods. *IEEE CG&A*, 1997, 17(3): 62~71
- 3 Farouki R, Neff C A. Analytic properties of plane offset curves. *Computer Aided Geometric Design*, 1990, 7(1): 83~99
- 4 Farouki R, Neff C A. Algebraic properties of plane offset curves. *Computer Aided Geometric Design*, 1990, 7(1): 101~127
- 5 Hoschek J. Spline approximation of offset curves. *Computer Aided Geometric Design*, 1988, 5(1): 34~40
- 6 Kim M S, Park E J, Lim S B. Approximation of variable-radius offset curves and its application to Bezier brush-stroke design. *Computer Aided Design*, 1993, 25(11): 684~698
- 7 Klass R. An offset spline approximation for plane cubic splines. *Computer Aided Design*, 1983, 15(5): 97~299
- 8 Lee I K, Kim M S, Elber G. Plane curve offset based on circle approximation. *Computer Aided Design*, 1996, 28(8): 617~630
- 9 Ong C J, Wong S, Loh H T *et al.* An optimization approach for biarc curve-fitting of B-spline curves. *Computer Aided Design*, 1996, 26(12): 951~959
- 10 Persson H. NC machining of arbitrarily shaped profile. *Computer Aided Design*, 1978, 10(4): 169~174
- 11 Pham B. Offset approximation of uniform B-splines. *Computer Aided Design*, 1988, 20(8): 471~474
- 12 Tiller W, Hanson E G. Offsets of two dimensional profile. *IEEE CG&A*, 1984, 4(9): 36~46
- 13 Dong G, Liang You-dong, He Zai-jun. Spline curve and its biarc approximation. *Acta Mathematicae Applagatae Sinica*, 1978, 1(4): 330~340
(董广昌, 梁友栋, 何志均等. 样条曲线与双圆弧逼近. *应用数学学报*, 1978, 1(4): 330~340)
- 14 Su Bu-chin, Liu Ding-yuan. *Computational Geometry—Curve and Surface Modeling*. New York: Academic Press, 1989

The Biarc Approximation of Planar NURBS Curve and Its Offset

WANG Guo-ping¹ SUN Jia-guang²

¹(Department of Computer Science and Technology Beijing University Beijing 100871)

²(Department of Computer Science and Technology Tsinghua University Beijing 100084)

Abstract The planar offset curve cannot be expressed as rational parametric curve in general except a few types of curves such as line, arc, Hodographs etc. In practice, the offset curve usually is approximated by lower degree rational polynomial curve in order to have the unified expression of data structure and geometric algorithm in the commercial modeling systems. In this paper, an approximation approach to NURBS (non-uniform rational B-spline) curve and its offset is presented by using biarc. The biarc approximation of offset curve is simplified to biarc approximation to original curve. Some important and key problems, such as the reasonable selection of split points in NURBS curve, the definition of cotangent point of biarc and error estimate method, are discussed. Examples verify the efficiency and reliability of the algorithms, which are implemented in the commercial geometric modeling systems Gems5.0 developed by CAD Center of Tsinghua University.

Key words NURBS (non-uniform rational B-spline) curve, offset, approximation, biarc, CAGD (computer aided geometric design).