

基于活动仿射标架反求 Nurbs 曲线/曲面参数*

胡事民^{1,2} 孙家广^{1,2} 金通光³ 汪国昭³

¹(清华大学国家 CAD 工程中心 北京 100084)

²(清华大学计算机科学与技术系 北京 100084)

³(浙江大学应用数学系 杭州 310027)

E-mail: shimin@tsinghua.edu.cn

摘要 Nurbs 曲线/曲面在反求参数上的数值不稳定性,是 Nurbs 曲线/曲面的致命缺点.该文介绍了用于参数曲线/曲面求交的活动仿射标架(moving affine frame,简称 MAF)方法.基于 MAF 方法的原理,提出了反求 Nurbs 曲线/曲面参数的一种新方法.该方法在数值稳定性和效率上均高于各种传统的迭代法,并已应用于商品化三维 CAD 系统 GEMS 5.0.

关键词 活动仿射标架法, Nurbs 曲面, CAD 系统.

中图法分类号 TP391

众所周知,给定参数,计算曲线、曲面的点,在 CAGD(computer aided geometric design)中是最基本的算法.这方面已有许多经典的算法,如 Bézier 曲线/曲面的 de Casteljau 算法、Nurbs 曲线/曲面的 deBoor 算法等.这些算法非常简洁,属于割角算法,比较稳定,效率很高^[1,2].现在我们考虑其反问题,对于给定曲线/曲面上的点,如何反求其相应的参数值.在几何造型中,反求参数非常重要,这有两方面原因:①在集合运算中,反求参数是必不可少的;②在真实感显示中,为避免实体在交线处出现裂缝,需对三维空间中的交点,反求其参数,以便在离散成三角片时,体的两个面在交线处相吻合.

Nurbs 方法有许多公认的优点,在 CAD 及计算机图形学中正在获得越来越广泛的应用.但也有许多缺点,正如 Piegl^[3]所总结的:①需要额外的存储以定义传统的曲线/曲面;②权因子的不合适的应用,可能导致很坏的参数化;③某些技术用传统形式可能比 Nurbs 更好;④某些基本算法,比如反求曲线/曲面上点的参数,存在数值不稳定性.关于反求曲线/曲面参数,传统的方法大多是采用 Newton 迭代法,效率低,且易出错.

本文作者之一在 1988 年曾提出曲面求交的活动仿射标架(moving affine frame,简称 MAF)法^[4],基于 MAF 方法的原理,本文提出反求曲线、曲面参数的一种新方法.该方法具有较强的几何直观性,其稳定性和效率均高于传统的迭代法.

1 MAF 方法简介

已知参数曲面

$$S_1: X = X(u), u = (u_1, u_2), \quad (1)$$

$$S_2: Y = Y(v), v = (v_1, v_2), \quad (2)$$

* 本文研究得到国家自然科学基金(No. 69902004)、国家 863 高科技项目基金(No. 863-511-820-017)和国家“九五”科技攻关项目基金(No. 96-A01-01-02)资助.作者胡事民,1968 年生,博士后,副教授,主要研究领域为计算机辅助设计,计算机图形学,分形几何及应用.孙家广,1946 年生,教授,博士生导师,主要研究领域为计算机辅助设计与制造,计算机图形学.金通光,1934 年生,教授,博士生导师,主要研究领域为计算几何,计算机图形学.汪国昭,1944 年生,教授,博士生导师,主要研究领域为计算几何,计算机图形学.

本文通讯联系人:胡事民,北京 100084,清华大学计算机科学与技术系

本文 1998-09-07 收到原稿,1999-01-12 收到修改稿

假设已由离散法求得初始交点,如何求取下一个交点呢?

设初始交点为 $\{M_0, T_0\}$, 其中 M_0 为三维空间中的交点, 其对应参数为 $u_0 = (u_1^0, u_2^0), v_0 = (v_1^0, v_2^0)$; T_0 为该点的单位切矢量, $T_0 = \frac{T}{|T|}$, 而 $T = N_1 \times N_2$, N_1 和 N_2 为 S_1 和 S_2 分别在 u_0 和 v_0 处的法向量,

$$N_1 = \frac{\partial X}{\partial u_1} \times \frac{\partial X}{\partial u_2}, \quad N_2 = \frac{\partial Y}{\partial v_1} \times \frac{\partial Y}{\partial v_2}. \tag{3}$$

先由 M_0 点沿切向 T_0 前进 δ 步长, 令 $P = M_0 + \delta T_0$, 于是有

$$\delta T_0 = P - M_0 = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial X}{\partial u_i} \cdot \Delta u_i, \tag{4}$$

则上式两边同时点乘 $\frac{\partial X}{\partial u_j}$, 可得到

$$\delta T_0 \cdot \frac{\partial X}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial X}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_j} \right) \Delta u_i, \quad j=1, 2, \tag{5}$$

于是

$$\Delta u_1 = \delta \begin{vmatrix} T_0 \cdot X'_1 & X'_1 \cdot X'_2 \\ T_0 \cdot X'_2 & X'_2 \cdot X'_2 \end{vmatrix} / \Delta, \\ \Delta u_2 = \delta \begin{vmatrix} X'_1 \cdot X'_1 & T_0 \cdot X'_1 \\ X'_2 \cdot X'_1 & X_0 \cdot X'_2 \end{vmatrix} / \Delta,$$

其中

$$\Delta = E \cdot G - F^2 = (X'_1 \cdot X'_1) \cdot (X'_2 \cdot X'_2) - (X'_1 \cdot X'_2)^2.$$

同理, 可求得 $\Delta v_1, \Delta v_2$, 以 $\Delta u = (\Delta u_1, \Delta u_2)$ 和 $\Delta v = (\Delta v_1, \Delta v_2)$ 作为增量, 得到新的参数 $u^0 \leftarrow u^0 + \Delta u$ 和 $v^0 \leftarrow v^0 + \Delta v$, 于是得到两张曲线上的点 $X_0 \in S_1$ 和 $Y_0 \in S_2$. 若 $|X_0 - Y_0| < \epsilon$, 以 $\frac{X_0 + Y_0}{2}$ 作为 M_0 后的下一交点. 这里, ϵ 为求交精度.

以上由 P 求得 X_0 和 Y_0 的过程称为球变换.

若 $|X_0 - Y_0| > \epsilon$, 则需要迭代修正. 首先由 X_0 和 Y_0 得到一点 P_0 . 方法如下: 过 X_0 点在 S_1 上作切平面 Π_1 , 过 Y_0 在 S_2 上作切平面 Π_2 , $\Pi_1 \cap \Pi_2$ 于直线 L , 如图 1 所示, 过 X_0 作 $X_0 X^T$ 垂直于 L , 过 Y_0 作 $Y_0 Y^T$ 垂直于 L , 取 $P_0 = \frac{X^T - Y^T}{2}$. 上述由 X_0 和 Y_0 得到一点 P_0 的过程称为中点变换. 然后, 再由 P_0 作球变换, 得到两张曲线上的点 $X_1 \in S_1$ 和 $Y_1 \in S_2$, 若 $|X_1 - Y_1| < \epsilon$, 以 $\frac{X_1 + Y_1}{2}$ 作为 M_0 后的下一交点. 否则, 中点变换和球变换交替进行, 直至

$|X_n - Y_n| < \epsilon$. 关于 MAF 方法的收敛性, 参见文献[4].

2 反求 Nurbs 曲线/曲面参数

2.1 反求曲线参数

对于一条给定的 Nurbs 曲线:

$$P(t) = \frac{\sum_{i=0}^n W_i P_i N_{i,k}(t)}{\sum_{i=0}^n W_i N_{i,k}(t)}, \tag{6}$$

其中 P_i 是控制顶点, W_i 是相应控制点的权因子, $N_{i,k}(t)$ 为定义在节点向量

$$T = \{t_0, t_1, \dots, t_k, \dots, t_r, \dots, t_{n+k}\}$$

上的 k 阶 B 样条基函数, 通常取 $t_0 = t_1 = \dots = t_{k-1} = 0, t_{n+1} = t_{n+2} = \dots = t_{n+k} = 1$. S 为曲线 $P(t)$ 上的一个点, 我们希望求参数 u , 使 $P(u) = s$.

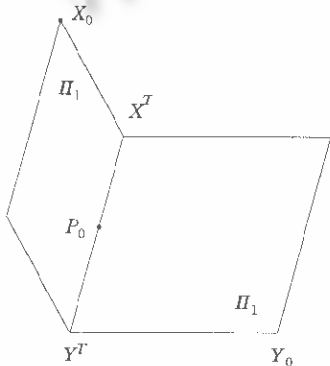


Fig. 1
图1

先确定一个近似参数 u_0 , 方法如下.

(1) 利用插节点算法, 将 Nurbs 曲线 $P(t)$ 转化为 $n-k+1$ 条 Bézier 曲线. 若在曲线 $P(t)$ 的节点向量中有重节点, 则曲线条数相应减少.

(2) 对每一条 Bézier 曲线, 判断 P 是否在其凸包内. 如果在凸包内, 离散该 Bézier 曲线, 离散层数一般取为 3, 再判断 P 是否在这些子曲线的凸包内, 以估计近似参数 u_0 .

有了近似参数 u_0 , 我们作迭代修正.

过 $P(u_0)$, 沿切向 $P'(u_0)$ 作直线 L , 将点 S 投影到 L 上, 记为 Q , 由于 Q 在 L 上, 我们有

$$Q = P(u_0) + P'(u_0)\Delta u, \quad (7)$$

于是可以求出 Δu , 即

$$\Delta u = \frac{(Q - P(u_0)) \cdot P'(u_0)}{P'(u_0) \cdot P'(u_0)}.$$

令 $u_0 \leftarrow u_0 + \Delta u$, 重复上述过程, 直至 $|P(u_0) - Q| < \varepsilon$.

一般来说, 迭代 2~3 次, 即可得到较为精确的参数.

2.2 反求曲面参数

对于一张给定的 Nurbs 曲面:

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m W_{i,j} P_{i,j} N_{i,k}(u) N_{j,k}(v) / \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m W_{i,j} N_{i,k}(u) N_{j,k}(v), \quad (8)$$

其中 $P_{i,j}$ 是控制顶点, $W_{i,j}$ 是相应控制点的权因子, $N_{i,k}(u)$, $N_{j,k}(v)$ 为定义在节点向量 $U = \{u_0, u_1, \dots, u_k, \dots, u_n, \dots, u_{n+k}\}$ 和 $V = \{v_0, v_1, \dots, v_k, \dots, v_m, \dots, v_{m+k}\}$ 上的 k 阶 B 样条基函数, S 为曲线 $P(u, v)$ 上的一个点, 我们希望求参数 \hat{u}, \hat{v} , 使 $P(\hat{u}, \hat{v}) = S$.

先确定一个近似参数 u_0, v_0 , 方法如下.

(1) 利用插节点算法, 将 Nurbs 曲面 $P(u, v)$ 转化为 $(n-k+1) \times (m-k+1)$ 片 Bézier 曲面片. 若在曲面 $P(u, v)$ 的节点向量中有重节点, 则 Bézier 曲面片的片数相应减少.

(2) 对每一片 Bézier 曲面片, 判断 P 是否在其凸包内. 如果在凸包内, 离散该 Bézier 曲面, 离散层数一般取为 3, 再判断 P 是否在这些子面片的凸包内, 以估计近似参数 u_0, v_0 .

有了近似参数 u_0, v_0 , 我们作迭代修正.

过 $P(u_0, v_0)$, 曲面 $P(u, v)$ 的切平面 Π , 将点 S 投影到 Π 上, 记为 Q , 由于 Q 在 Π 上, 我们有

$$Q - P(u_0, v_0) = P'_u(u_0, v_0)\Delta u + P'_v(u_0, v_0)\Delta v. \quad (9)$$

式(9)两端同时点乘 $P'_u(u_0, v_0)$ 和 $P'_v(u_0, v_0)$, 即得

$$\begin{cases} P'_u(u_0, v_0) \cdot P'_u(u_0, v_0)\Delta u + P'_u(u_0, v_0) \cdot P'_v(u_0, v_0)\Delta v = P'_u(u_0, v_0) \cdot (Q - P(u_0, v_0)) \\ P'_v(u_0, v_0) \cdot P'_u(u_0, v_0)\Delta u + P'_v(u_0, v_0) \cdot P'_v(u_0, v_0)\Delta v = P'_v(u_0, v_0) \cdot (Q - P(u_0, v_0)) \end{cases}. \quad (10)$$

求解上述二元一次方程组, 即得

$$\begin{aligned} \Delta u &= \begin{vmatrix} P'_u(u_0, v_0) \cdot (Q - P(u_0, v_0)) & P'_u(u_0, v_0) \cdot P'_v(u_0, v_0) \\ P'_v(u_0, v_0) \cdot (Q - P(u_0, v_0)) & P'_v(u_0, v_0) \cdot P'_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} / \Omega, \\ \Delta v &= \begin{vmatrix} P'_u(u_0, v_0) \cdot P'_u(u_0, v_0) & P'_u(u_0, v_0) \cdot (Q - P(u_0, v_0)) \\ P'_v(u_0, v_0) \cdot P'_u(u_0, v_0) & P'_v(u_0, v_0) \cdot (Q - P(u_0, v_0)) \end{vmatrix} / \Omega, \\ \text{其中} \quad \Omega &= \begin{vmatrix} P'_u(u_0, v_0) \cdot P'_u(u_0, v_0) & P'_u(u_0, v_0) \cdot P'_v(u_0, v_0) \\ P'_v(u_0, v_0) \cdot P'_u(u_0, v_0) & P'_v(u_0, v_0) \cdot P'_v(u_0, v_0) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

令 $u_0 \leftarrow u_0 + \Delta u, v_0 \leftarrow v_0 + \Delta v$, 重复上述过程, 直至 $|P(u_0, v_0) - Q| < \varepsilon$. 实际上得到了新的近似参数, 这是一个球变换的过程, 其几何直观性要比较传统迭代法好. 该方法的收敛性证明与 MAF 方法类似, 在此不再赘述.

3 反求曲线/曲面参数的实例

例 1: 反求曲线参数.

一条四阶 Nurbs 曲线,其 8 个控制顶点分别为:

- (200,100,0), (100,100,0), (100,300,0), (400,300,0),
- (400,100,0), (300,100,0), (300,200,0), (360,180,0);

节点向量为{0,0,0,0,0.2,0.4,0.6,0.8,1,1,1,1};权因子分别为{1,1.2,1,0.8,1,1,1.2,1}. 对于给定的曲线上的点(117.36617392236,179.03032014373,0.00000000000000),由离散法可以求得该点的近似参数为 0.125,再由 3 次迭代即得到精确参数为 0.1234567. 迭代情况见表 1.

Table 1

表 1

Times ^①	Approximate parameter ^②	Error ^③
1	0.12345889224981	0.00000219224981
2	0.12345670000433	0.00000000000433
3	0.12345670000000	0

①次数,②近似参数,③误差.

例 2:反求曲面参数.

一条 4×4 阶 Nurbs 曲面,按 7×4 分布的 28 个控制顶点分别为:

- (100,100,0), (130,180,30), (120,270,30), (90,360,0),
- (180,120,30), (160,200,60), (190,320,60), (150,440,30),
- (250,140,30), (230,200,60), (260,330,60), (240,400,30),
- (330,100,0), (350,220,30), (340,290,30), (330,400,0),
- (410,120,30), (380,200,60), (400,320,60), (390,440,30),
- (460,140,30), (440,200,60), (460,330,60), (480,400,30),
- (540,100,0), (570,220,30), (550,290,30), (575,400,0).

节点向量分别为{0,0,0,0,0.25,0.5,0.75,1,1,1,1}和{0,0,0,1,1,1};按 7×4 分布的 28 个权因子分别为{1,1,1,1,1.2,1,1,0.8,1,1,1,1,1,0.81,1,0.65,1,1,1,1,1,1.6,0.89,1,1,1,1,1}. 对于给定的曲面上的点(277.34742334732,248.13730252438,28.748699053051),由离散法可求得近似参数为(0.1275,0.375),再由迭代得到精确参数为(0.123,0.456). 迭代情况见表 2.

Table 2

表 2

Times ^①	Approximate parameter ^②
1	(0.12605963537084,0.45777731019774)
2	(0.12282564488140,0.45574907305541)
3	(0.12299892247181,0.45599845953458)
4	(0.12300011806077,0.45600008679545)
5	(0.12300000072886,0.45600000053584)
6	(0.12299999995893,0.45599999994129)
7	(0.12300000000000,0.45600000000000)

①次数,②近似参数.

以上例子表明,该方法具有较高的效率,以曲线为例,传统迭代法通常需要迭代数 10 次才能由近似参数收敛到精确参数.

参考文献

- 1 Farin G. NURB Curves and Surfaces; from Projective Geometry to Practical Use. Wellesley, MA: A K Peters Ltd., 1994
- 2 Hoschek J, Lasser D. Fundamentals of Computer Aided Geometric Design. Wellesley, MA: A K Peters Ltd., 1992
- 3 Piegl L. On NURBS: a survey. IEEE Computer Graphics and Applications, 1991,11(1):55~71
- 4 Jin Tong-guang, Wang Guo-zhao. MAF method for intersection calculation between parametric surfaces. Technical Report, No. #8801057, Zhejiang University, 1988

(金通光,汪国昭. 参数曲面求交的 MAF 方法. 科技报告, No. #8801057, 浙江大学, 1988)

Computing the Parameters of Points on Nurbs Curves and Surfaces via Moving Affine Frame Method

HU Shi-min^{1,2} SUN Jia-guang^{1,2} JIN Tong-guang³ WANG Guo-zhao³

¹(National CAD Engineering Center Tsinghua University Beijing 100084)

²(Department of Computer Science and Technology Tsinghua University Beijing 100084)

³(Department of Applied Mathematics Zhejiang University Hangzhou 310027)

Abstract The numerical instability in computing the parameters of the points on Nurbs curves/surfaces is a fatal disadvantage of Nurbs methods. In this paper, the authors introduce the moving affine frame (MAF) method for intersection calculation of parametric curves and surfaces. Based on the principle of a MAF method, a new method for computing the parameters of the points on Nurbs curves and surfaces is presented. The numerical stability and the efficiency of the method are better than all traditional iterative methods. The new method has been applied to the commercial 3D CAD system GEMS5.0.

Key words Moving affine frame (MAF) method, Nurbs surface, CAD system © 中国科学院软件研究所 <http://www.jos.org.cn>