ω 上下文无关语言和语言的附着之间的关系*

郭清泉[1] 王常青[2]

[1](山东大学计算机科学系 济南 250100)

[2](山东经济学院计算机管理系 济南 250014)

摘要 文章研究了用重复集生成的 ω 语言和语言的附着之间的关系,指出并证明了上下文无关语言附着类是 ω 上下文无关语言类的真子类,正规语言附着类是 ω 正规语言类的真子类.作为上下文无关语言的一个真子类——线性语言的附着类是 ω 正规语言类的真子类.

关键词 上下文无关语言的附着,ω 上下文无关语言,线性语言的附着,ω 正规语言,关系.

中图法分类号 TP301

1 上下文无关语言的附着和 ω 上下文无关语言的关系

R. S. Cohen 和 A. Y. Gold 在文献[1]中定义了用重复集生成的 ω 语言,L. Roasson 和 M. Nivat 在文献[2]中定义了另一类重要的 ω 语言——语言的附着,这两种 ω 语言定义的生成能力成为人们关注的问题之一.本文讨论了上下文无关语言的附着和 ω 上下文无关语言的关系,以及上下文无关语言的真子类——正规语言及线性语言的附着和 ω 正规语言的关系.

定理 1. 上下文无关语言附着类是 ω 上下文无关语言类的真子类.

证明:首先证明对于任意不含空字 λ 的 $cfl\ L$,存在 $\omega\text{-}cfl\ L'$,使得 $L'=adh(L)$.

设生成 L 的简化的 Chomsky 范式文法 $G=(N,\Sigma,P,S)$,构造 $\omega\text{-}cfg\ G'=(N,\Sigma,P,S,F)$,其中 $F=2^N$,则 $L'=L(G')=adh(L)$.

设 $z=\prod_{i=1}^{\infty}a_i\in L(G')$,即存在 G' 中的无穷派生 d':

$$S\overset{*}{\underset{G'}{\Rightarrow}}\alpha_1\gamma_1\overset{*}{\underset{G'}{\Rightarrow}}\cdots\overset{*}{\underset{G'}{\Rightarrow}}\Big(\prod_{i=1}^{n}a_i\Big)\gamma_n\overset{\omega}{\underset{G'}{\Rightarrow}}\prod_{i=1}^{\infty}a_i.$$

对于任意的正整数 k,$\prod_{i=1}^{k}a_i\in FG(z)$.注意到 G' 的构造,则 G 中有派生 d:

$$S\overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}}\alpha_1\gamma_1\overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}}\Big(\prod_{i=1}^{k}a_i\Big)\gamma_k\overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}}\Big(\prod_{i=1}^{k}a_i\Big)w\in L.$$

于是,$\prod_{i=1}^{k}a_i\in FG(L)$,从而 $FG(z)\subseteq FG(L)$,$z\in adh(L)$.

反之,设 $z=\prod_{i=1}^{\infty}a_i\in adh(L)$,则存在 G 中的派生系列:

$$d_1:S\overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}}\alpha_1\gamma_1,d_2:S\overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}}\alpha_1\alpha_2\gamma_2,\ldots,d_n:S\overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}}\Big(\prod_{i=1}^{n}a_i\Big)\gamma_n,\ldots$$

注意到 G' 的构造,当 $n\to\infty$ 时,得到 G' 的无穷派生

* 本文研究得到国家自然科学基金资助.作者郭清泉,1941 年生,教授,主要研究领域为形式语言及应用,智能系统.王常青,1971 年生,助教,主要研究领域为自动控制系统.

本文通讯联系人:郭清泉,济南 250100,山东大学计算机科学系

本文 1998-01-19 收到原稿,1998-05-15 收到修改稿

$$d':S\underset{G'}{\overset{*}{\Rightarrow}}\prod_{i=1}^{\infty}a_i.$$

无穷派生 d' 是存在的，否则，存在 N，没有 G 中的任何派生 d_N，使得

$$S\underset{G}{\overset{*}{\rightarrow}}\left(\prod_{i=1}^{N}a_i\right)\gamma_N\underset{G}{\overset{*}{\Rightarrow}}\left(\prod_{i=1}^{N}a_i\right)w.$$

这与 $\prod_{i=1}^{N}a_i\in adh(L)$ 矛盾.

由于 $F=2^N$，故 $z=\prod_{i=1}^{\infty}a_i\in L(G')=L'$.

另外，存在不是 cfl 附着的 ω-cfl. 设 ω-cfg $G=(N,\Sigma,P,S,F)$，其中 $N=\{S,A,B\}$，$\Sigma=\{a,b\}$，$P=\{S\rightarrow AB$，$A\rightarrow aAb$，$A\rightarrow ab$，$B\rightarrow aB$，$B\rightarrow a\}$，$F=\{B\}$，则 G 生成 ω-cfl $L=\{a^nb^na^\omega|n\geqslant 1\}$. 假定存在 cfl L'，使 $Adh(L')=L$，对于任意的 n，$z_n=a^nb^na^\omega\in L$，$a^n\in FG(z_n)$，故 $a^n\in FG(L')$，即存在 $w_n\in\Sigma^*$，使 $a^nw_n\in L'$. 取 $z=a^\omega$，则 $FG(z)\subseteq FG(L')$，$z\in Adh(L')$. 显然，$z\notin L$. 这与假设矛盾. 于是得证. □

2 正规语言的附着和ω正规语言的关系

定理 2. 正规语言附着类是ω正规语言类的真子类.

证明：类似于定理1的证明，可以证明对于任意的正规语言 L，存在ω正规语言 L'，使得 $L'=Adh(L)$.

同样地，存在不是正规语言附着的ω正规语言. 设ω正规文法 $G=(N,\Sigma,P,S,F)$，其中 $N=\{S,A\}$，$F=\{A\}$，$\Sigma=\{a,b\}$，$P=\{S\rightarrow aS,S\rightarrow aA,A\rightarrow bA,A\rightarrow b\}$，则 G 生成ω正规语言 $L=\{a^nb^\omega|n\geqslant 1\}$. 假定存在正规语言 L'，使 $Adh(L')=L$. 对任意的 n，$z_n=a^nb^\omega\in L$，$a^n\in FG(z_n)$，故 $a_n\in FG(L')$，即存在 $w_n\in\Sigma^*$，使 $a^nw_n\in L'$. 取 $z=a^\omega$，则 $FG(z)\subseteq FG(L')$，$z\in Adh(L')$，但 $z\notin L$. 这与假设矛盾. 于是得证. □

3 线性语言的附着和ω正规语言的关系

正规语言类是线性语言类的真子类，但是作为线性语言的附着并没有比正规语言的附着更强的生成能力，我们有下面的定理.

定理 3. 线性语言附着类是ω正规语言类的真子类.

证明：只要证明对于任意不含空字 λ 的线性语言 L，存在正规语言 L'，使 $Adh(L')=Adh(L)$.

设生成 L 的简化的线性范式文法 $G=(N,\Sigma,P,S)$，$L=L(G)$，其中 P 中的生成式仅为形式：(1) $A\rightarrow aBb$，(2) $A\rightarrow aB$，(3) $A\rightarrow a$，$A,B\in N$，$a,b\in\Sigma$，构造正规文法 $G'=(N,\Sigma,P',S)$，其中 P' 包含 P 中的(2)和(3)型生成式及 $A\rightarrow aB$ iff $(A\rightarrow aBb)\in P$. 下面证明 $L'=L(G')$ 满足要求.

首先设 $z=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\in Adh(L)$，对于任意的 k，由于 $\sum_{i=1}^{2k}a_i\in FG(L)$，即有 G 中的派生 $d:S\underset{G}{\Rightarrow}a_1C_1w_1\underset{G}{\Rightarrow}a_1a_2C_2w_2w_1\underset{G}{\Rightarrow}\ldots\Rightarrow\left(\prod_{i=1}^{k}a_i\right)C_k\left(\prod_{i=k}^{1}w_i\right)\underset{G}{\overset{*}{\Rightarrow}}\left(\prod_{i=1}^{k}a_i\right)w\in L$，其中 $C_i\in N$，$w_i=\lambda$ iff i 步派生使用(2)型生成式，以及 $w_i\in\Sigma$ iff i 步派生使用(1)型生成式，$1\leqslant i\leqslant k$.

注意到 G' 的构造，有 G' 中的派生 $d':S\underset{G'}{\Rightarrow}a_1C_1\underset{G'}{\Rightarrow}a_1a_2C_2\underset{G'}{\overset{*}{\Rightarrow}}\left(\prod_{i=1}^{k}a_i\right)C_k\underset{G'}{\overset{*}{\Rightarrow}}\left(\prod_{i=1}^{k}a_i\right)w'\in L'$，这样，$\prod_{i=1}^{k}a_i\in FG(L')$，$z\in Adh(L')$.

反之，设 $z=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\in Adh(L')$，对于任意的 k，由于 $\sum_{i=1}^{k}a_i\in FG(L')$，即有 G' 中的派生 $d':S\underset{G'}{\Rightarrow}a_1C_1\underset{G'}{\Rightarrow}a_1a_2C_2\underset{G'}{\overset{*}{\Rightarrow}}\left(\prod_{i=1}^{k}a_i\right)C_k\underset{G'}{\overset{*}{\Rightarrow}}\left(\prod_{i=1}^{k}a_i\right)w'\in L'$. 在 i 步派生中，如果使用了 P 中的(2)型生成式 $C_{i-1}\rightarrow a_iC_i$，则记为 $C_{i-1}\rightarrow a_iC_iw_i$，$w_i=\lambda$；如果使用了 P' 中的生成式 $C_{i-1}\rightarrow a_iC_i$ iff $(C_{i-1}\rightarrow a_iC_ib_i)\in P$，则记为 $C_{i-1}\rightarrow a_iC_iw_i$，$w_i=b_i$，$1\leqslant i\leqslant k$. 这样可以构造 G 中的派生 $d:S\underset{G}{\Rightarrow}a_1C_1w_1\underset{G}{\Rightarrow}a_1a_2C_2w_2w_1\underset{G}{\overset{*}{\Rightarrow}}\left(\prod_{i=1}^{k}a_i\right)C_k\left(\prod_{i=k}^{1}w_i\right)\underset{G}{\overset{*}{\Rightarrow}}\left(\prod_{i=1}^{k}a_i\right)w\in L$，这样，$\left(\prod_{i=1}^{k}a_i\right)\in FG(L)$，

$z \in Adh(L)$. □

致谢 本文的研究工作得到国家自然科学基金资助,此项目批准号为69773039.

参考文献

1 Cohen R S, Gold A Y. Theory of ω-languages. Journal of Computer and System Sciences, 1977,15(2):169~208

2 Boasson L, Nivat M. Adherence of languages. Journal of Computer and System Sciences, 1980,20(3):285~309

On the Relationship Between the Class of ω-Context-Free Languages and the Class of Adherence of Languages

GUO Qing-quan[1] WANG Chang-qing[2]

[1](*Department of Computer Science Shandong University Ji'nan* 250100)

[2](*Department of Computer Management Shandong Institute of Economics Ji'nan* 250014)

Abstract In this paper, the authors study the relationship between the class of ω-languages generated by ω-grammars with production repetitions set and the class of adherence of languages, and prove that the class of adherence of context-free languages is the proper subclass of ω-context-free languages and the class of adherence of regular languages is the proper subclass of ω-regular languages. As a proper class of context-free languages——the class of linear languages, its adherence is the proper class of ω-regular languages.

Key words Adherence of ω-context-free languages, ω-contcxt free language, adherence of linear languages, ω-regular language, relationship.