第10卷第2期　　软件学报　　Vol. 10, No. 2
1999年2月　　JOURNAL OF SOFTWARE　　Feb. 1999

与替换和集合运算有关的错误*

程晓春[1,2]　姜云飞[3]

[1](吉林大学计算机科学系　长春　130023)

[2](长春科技大学　长春　130026)

[3](中山大学软件所　广州　510275)

摘要　指出在使用归结方法的自动推理文献中,存在于提升引理和删除策略完备性定理证明中,与替换和集合运算有关的几个错误,并予以分析和改正.

关键词　归结,替换,合一,集合,删除策略.

中图法分类号　TP18

高效推理方法的研究有重要的意义,例如可用于可满足性问题求解.

归结原理[1~4]是根据已有子句产生新子句的推理规则.在归结演绎过程中可能产生大量对证明无用的子句.为了提高归结演绎的效率,在生成无用子句后可以用删除策略[1~3]来删除其中的一部分.

本文指出在使用归结方法的自动推理文献中,存在于提升引理和删除策略完备性定理证明中,与替换和集合运算有关的几个错误,并予以分析和改正.

1　提升引理证明中的错误

Chang 等人在文献[1]中第84页和第85页关于提升引理的证明中,使用了如下断言:

"C is a resolvent of C_1 and C_2.

$C=(C_1^{\lambda\sigma}-\{L_1^{1\lambda\sigma},\ldots,L_1^{r_1\lambda\sigma}\})\cup(C_2^{\lambda\sigma}-\{L_2^{1\lambda\sigma},\ldots,L_2^{r_2\lambda\sigma}\})$

$C'=\ldots=(C_1^{\theta\gamma}-\{L_1^{1\theta\gamma},\ldots,L_1^{r_1\theta\gamma}\})\cup(C^{\theta\gamma}{}_2-\{L_2^{1\theta\gamma},\ldots,L_2^{r_2\theta\gamma}\})$

and $\lambda\sigma$ is more general than $\theta\gamma$.

Clearly, C' is an instance of C."

这个断言是错误的.

反例:

$C_1=\{P(y),P(x)\}$,　　$C_2=\{\sim P(a),Q(a)\}$,

$C'_1=\{P(a),P(x)\}$,　　$C'_2=\{\sim P(a),Q(a)\}=C_2$,

$r_1=r_2=1$,　$L_1=L_1^1=P(x)$,　$L_2=L_2^1=\sim P(a)$,

$\lambda=\varnothing$,　$\sigma=\{a/x\}$(将 x 替换为 a),　$\theta=\{a/y\}$(将 y 替换为 a),　$\gamma=\{a/x\}$(将 x 替换为 a),

$$C=(C_1^{\lambda\sigma}-\{L_1^{\lambda\sigma}\})\cup(C_2^{\lambda\sigma}-\{L_2^{\lambda\sigma}\})$$
$$=(\{P(y),P(a)\}-\{P(a)\})\cup(\{\sim P(a),Q(a)\}-\{\sim P(a)\})$$
$$=\{P(y),Q(a)\},$$
$$C'=(C_1^{\theta\gamma}-\{L_1^{\theta\gamma}\})\cup(C_2^{\theta\gamma}-\{L_2^{\theta\gamma}\})$$
$$=(\{P(a),P(a)\}-\{P(a)\})\cup(\{\sim P(a),Q(a)\}-\{\sim P(a)\})$$

* 本文研究得到国家自然科学基金和国家863高科技项目基金资助.作者程晓春,1973年生,博士生,讲师,主要研究领域为人工智能,自动推理,模糊逻辑.姜云飞,1945年生,教授,博士生导师,主要研究领域为人工智能,自动推理,诊断推理.

本文通讯联系人:姜云飞,广州 510275,中山大学软件所

本文1997-10-31收到原稿,1998-02-10收到修改稿

$=\{Q(a)\}$.

C'不是 C 的例.

错误原因

$(C_1^{\theta\gamma}-\{L_1^{\theta\gamma}\})$不等于$(C_1-\{L_1\})^{\theta\gamma}$. 因此,$\theta\gamma=\lambda\sigma\eta$ 并不能保证$(C_1^{\theta\gamma}-\{L_1^{\theta\gamma}\})\cup(C_2^{\theta\gamma}-\{L_2^{\theta\gamma}\})$是$(C_1^{\lambda\sigma}-\{L_1^{\lambda\sigma}\})\cup(C_2^{\lambda\sigma}-\{L_2^{\lambda\sigma}\})$的例. 如反例所示,当 $\theta\gamma$ 下 C_1 中与 L_1^1 可合一的文字比 $\lambda\sigma$ 下 C_1 中与 L_1^1 可合一的文字多时,$C_1^{\theta\gamma}-\{L_1^{\theta\gamma}\}$未必是 $C_1^{\lambda\sigma}-\{L_1^{\lambda\sigma}\}$的例.

这个断言的错误能说明 Chang 等人在文献[1]中提升引理的证明是错误的,而不能说明提升引理本身是错误的. 事实上,提升引理本身是正确的. 1987 年,刘叙华和姜云飞在文献[2]中第 60 页~第 63 页给出了提升引理的一个修正了的证明. 1989 年,Leitsch 也指出了 Chang 等人的上述错误[5].

2　删除策略完备性定理证明中的错误

文献[2]中第 71 页给出删除策略的一种定义:"设 S 是子句集. 下面的子句序列是从 S 出发推出 C 的一个演绎,D:$C_1,C_2,\ldots,C_k=C$. 如果 $C_i(1\leqslant i\leqslant k)$是重言式,或者 C_i 被某个 C_j 包含$(j<i)$,则将 C_i 从这个演绎中删除. 我们称对此演绎 D 实行了删除策略."

文献[2]中第 71 页给出删除策略的完备性定理.

刘叙华和姜云飞在文献[2]第 72 页,删除策略完备性定理的证明中,有如下几处错误:

错误 1. 第 6~7 行:"设 $C=L_1\vee\sim L_1\vee G$,其中 G 是子句,L_1 是原子,若 C 和 D 的归结文字是 C 中 L_1 和 D 中文字$\sim L_2$,则 $R(C,D)=D^\sigma\vee G^\sigma$. 故 $D^\sigma\subseteq R(C,D)$."

$D^\sigma\subseteq R(C,D)$是正确的,但是 $R(C,D)=D^\sigma\vee G^\sigma$ 是错误的.

反例:

$$C=\{P(x),\sim P(x),P(a)\},\qquad L_1=P(x),\qquad G=\{P(a)\},$$
$$D=\{\sim P(a)\},\qquad \sim L_2=\sim P(a),\qquad \sigma=\{a/x\}(\text{将 } x \text{ 替换为 } a),$$
$$\begin{aligned}R(C,D)&=(C^\sigma-\{L_1^\sigma\})\cup(D^\sigma-\{(\sim L_2)^\sigma\})\\&=(\{P(a),\sim P(a),P(a)\}-\{P(a)\})\cup(\{\sim P(a)\}-\{\sim P(a)\})\\&=\{\sim P(a)\},\end{aligned}$$
$$D^\sigma\vee G^\sigma=\{\sim P(a),P(a)\}.$$

显然,$R(C,D)=D^\sigma\vee G^\sigma$ 是错误的.

关于 $D^\sigma\subseteq R(C,D)$的改正的证明:

$$\begin{aligned}R(C,D)&=(C^\sigma-\{L_1^\sigma\})\cup(D^\sigma-\{(\sim L_2)^\sigma\})\\&=(\{L_1^\sigma,\sim L_1^\sigma\}\cup G^\sigma-\{L_1^\sigma\})\cup(D^\sigma-\{\sim L_2^\sigma\}).\end{aligned}$$

因为 C 中 L_1 和 D 中$\sim L_2$ 是归结文字,显然,$\sim L_1^\sigma=\sim L_2^\sigma$.

于是　　$R(C,D)=\{\sim L_1^\sigma\}\cup\ldots\cup(D^\sigma-\{\sim L_1^\sigma\})=D^\sigma\cup\ldots$

因此　　$D^\sigma\subseteq R(C,D)$.

错误 2. 第 15~17 行:"设 $C^\gamma\in D_1$(应为 $C^\gamma\subseteq D_1$),$D_1=L_1\vee D'_1$,$D_2=\sim L_2\vee D'_2$,其中 D'_1,D'_2 是子句. 又设 L_1 和 L_2 的 mgu 是 σ,于是 $R(D_1,D_2)=(D'_1\cup D'_2)^\sigma-\{L_1^\sigma,\sim L_2^\sigma\}$."

反例:

$$D_1=L_1\vee\sim L_1,\qquad D_2=\sim L_2\vee L_2.$$

设 L_1 和 L_2 的 mgu 是 σ,因此,

$$L_1^\sigma=L_2^\sigma,\qquad D'_1=\sim L_1,\qquad D'_2=L_2,$$
$$R(D_1,D_2)=(D_1^\sigma-\{L_1^\sigma\})\cup(D_2^\sigma-\{\sim L_2^\sigma\})=\{\sim L_1^\sigma,L_2^\sigma\},$$

而　　$(D'_1\cup D'_2)^\sigma-\{L_1^\sigma,\sim L_2^\sigma\}=\{\sim L_1^\sigma,L_2^\sigma\}-\{L_1^\sigma,\sim L_2^\sigma\}=\varnothing$.

错误 3. 第 18~19 行:$(D_2=\sim L_2\vee D'_2$,L_1 和 L_2 的 mgu 是 $\sigma)$"(1) 若 $L_1\in C^\gamma$,令 $C^\gamma=L_1\vee C'$,于是 $R(C^\gamma,$

$D_2)=(C'\cup D'_2)^\sigma-\{L_1^\sigma,\sim L_2^\sigma\}$."

反例：

$$C^\theta=L_1\vee\sim L_1,\qquad D_2=\sim L_2\vee L_2,$$

设 L_1 和 L_2 的 mgu 是 σ. 因此

$$L_1^\sigma=L_2^\sigma,\qquad C'=\sim L_1,\qquad D'_2=L_2,$$

$$R(C^\theta,D_2)=(C^{\theta\sigma}-\{L_1^\sigma\})\cup(D_2^\sigma-\{\sim L_2^\sigma\})=\{\sim L_1^\sigma,L_2^\sigma\},$$

而 $$(C'\cup D'_2)^\sigma-\{L_1^\sigma,\sim L_2^\sigma\}=\{\sim L_1^\sigma,L_2^\sigma\}-\{L_1^\sigma,\sim L_2^\sigma\}=\varnothing.$$

上述错误没有影响删除策略的完备性，其正确的证明如下：

定理 1（删除策略的完备性）. 设 S 是不可满足子句集，如果在归结演绎中使用删除策略，则仍然存在从 S 出发推出空子句□的归结演绎.

证明：首先分析 S 中子句的两个性质.

性质 1. 设 C_1 为重言式，C_1 与 C_2 有归结式 $R(C_1,C_2)$，则 $R(C_1,C_2)$ 或为重言式，或被 C_2 包含.

设 $C_1=L_1\vee L'_1\vee G$，其中 G 是子句，L_1 和 L'_1 为互补对. σ 是 C_1 和 C_2 中归结原子的 mgu.

(1.1) 若 C_1 的 L_1 和 C_2 的 L_2 是归结文字，则

$$R(C_1,C_2)=(C_1^\sigma-\{L_1^\sigma\})\cup(C_2^\sigma-\{L_2^\sigma\})=(\{L'^\sigma_1\}\cup G^\sigma-\{L_1^\sigma\})\cup(C_2^\sigma-\{L_2^\sigma\}).$$

显然 $L'^\sigma_1=L_2^\sigma$，于是 $R(C_1,C_2)=C_2^\sigma\cup\ldots$. 因此，$R(C_1,C_2)$ 被 C_2 包含.

若 C_1 的归结文字为 L'_1，同理可证 $R(C_1,C_2)$ 被 C_2 包含.

(1.2) 若 C_1 的归结文字不是 L_1 和 L'_1，则 $R(C_1,C_2)=\{L_1^\sigma,L'^\sigma_1\}\cup\ldots$，于是 $R(C_1,C_2)$ 是重言式.

性质 2. 若 C_1 包含 C_2，C_3 是任一与 C_2 有归结式 $R(C_2,C_3)$ 的子句，则或者 $R(C_2,C_3)$ 被 C_1 包含，或者 C_3 与 C_1 有归结式 $R(C_1,C_3)$，且 $R(C_1,C_3)$ 包含 $R(C_2,C_3)$.

设 $C_1^\theta\subseteq C_2$，L_2 和 L_3 分别是 C_2 和 C_3 中的归结文字，σ 是 L_2 和 L_3 中原子的 mgu，$R(C_2,C_3)=(C_2^\sigma-\{L_2^\sigma\})\cup(C_3^\sigma-\{L_3^\sigma\})$.

(2.1) 若 $L_2\in C_1^\theta$，则 C_1^θ 和 C_3 有归结式 $R(C_1^\theta,C_3)=(C_1^{\theta\sigma}-\{L_2^\sigma\})\cup(C_3^\sigma-\{L_3^\sigma\})$. 因为 $C_1^\theta\subseteq C_2$，所以，$C_1^{\theta\sigma}-\{L_2^\sigma\}\subseteq C_2^\sigma-\{L_2^\sigma\}$，$R(C_1^\theta,C_3)\subseteq R(C_2,C_3)$. 由归结的提升引理[1~3]，存在 C_1 和 C_3 的归结式 $R(C_1,C_3)$，满足 $(R(C_1,C_3))\lambda=R(C_1^\theta,C_3)\subseteq R(C_2,C_3)$. 因此，$R(C_1,C_3)$ 包含 $R(C_2,C_3)$.

(2.2) 若 $L_2\notin C_1^\theta$，但是 C_1^θ 中有文字 L_1^1 满足 $L_1^{1\sigma}=L_2^\sigma$. 设 σ 下 C_1^θ 中与 L_2 可合一的文字为 $L_1^1,\ldots,L_1^{K_1}$，σ 下 C_3 中与 L_3 可合一的文字为 $L_3^1,\ldots,L_3^{K_3}$，$L_3\in\{L_3^1,\ldots,L_3^{K_3}\}$. 于是 $L_1^{1\sigma}=\ldots=L_1^{K_1\sigma}=L_2^\sigma$，$L_3^{1\sigma}=\ldots=L_3^{K_3\sigma}=L_3^\sigma$. σ 是 L_2 和 L_3 中原子的 mgu，所以 σ 也是 $\{L_1^1,\ldots,L_1^{K_1}\}$ 和 $\{L_3^1,\ldots,L_3^{K_3}\}$ 中原子的合一. 因为有改名规则，不妨设 C_1 和 C_3 无公共变量，于是 C_1^θ 和 C_3 无公共变量. 设 λ_1 是 $\{L_1^1,\ldots,L_1^{K_1}\}$ 的正规 mgu，λ_3 是 $\{L_3^1,\ldots,L_3^{K_3}\}$ 的正规 mgu，$\lambda=\lambda_1\cup\lambda_3$，$\delta$ 是 $L_1^{1\lambda_1}$ 和 $L_3^{1\lambda_3}$ 中原子的 mgu. 由文献[3]中命题 2.3 可知，$\lambda\cdot\delta$ 是 $\{L_1^1,\ldots,L_1^{K_1}\}$ 和 $\{L_3^1,\ldots,L_3^{K_3}\}$ 中原子的 mgu. 因此，可设 $\sigma=\lambda\cdot\delta\cdot\psi$，而且 $C_1^{\theta\lambda_1}$ 和 $C_3^{\lambda_3}$ 有归结式：

$$R(C_1^{\theta\lambda_1},C_3^{\lambda_3})=(C_1^{\theta\lambda_1\delta}-\{L_1^{1\lambda_1\delta}\})\cup(C_3^{\lambda_3\delta}-\{L_3^{1\lambda_3\delta}\}).$$

注意，$\lambda\delta\psi$ 下 C_1^θ 中与 L_1^1 可合一的文字在 $\lambda\delta$ 下已合一，$\lambda\delta\psi$ 下 C_3 中与 L_3^1 可合一的文字在 $\lambda\delta$ 下已合一. 因此，ψ 未增加 $C_1^{\theta\lambda_1\delta}$ 中与 $L_1^{1\lambda_1\delta}$ 可合一的文字，也未增加 $C_3^{\lambda_3\delta}$ 中与 $L_3^{1\lambda_3\delta}$ 可合一的文字. 因此

$$\begin{aligned}(R(C_1^{\theta\lambda_1},C_3^{\lambda_3}))^\psi&=((C_1^{\theta\lambda_1\delta}-\{L_1^{1\lambda_1\delta}\})\cup(C_3^{\lambda_3\delta}-\{L_3^{1\lambda_3\delta}\}))^\psi\\&=(C_1^{\theta\lambda_1\delta\psi}-\{L_1^{1\lambda_1\delta\psi}\})\cup(C_3^{\lambda_3\delta\psi}-\{L_3^{1\lambda_3\delta\psi}\})\\&=(C_1^{\theta\sigma}-\{L_1^{1\sigma}\})\cup(C_3^\sigma-\{L_3^{1\sigma}\})\\&=(C_1^{\theta\sigma}-\{L_2^\sigma\})\cup(C_3^\sigma-\{L_3^\sigma\}).\end{aligned}$$

因为 $C_1^\theta\subseteq C_2$，$C_1^{\theta\sigma}\subseteq C_2^\sigma$，所以 $(R(C_1^{\theta\lambda_1},C_3^{\lambda_3}))^\psi\subseteq R(C_2,C_3)$. 由归结的提升引理[1~3]，存在 C_1 和 C_3 的归结式 $R(C_1,C_3)$，满足 $(R(C_1,C_3))^\theta=R(C_1^{\theta\lambda_1},C_3^{\lambda_3})$. 于是 $(R(C_1,C_3))^{\theta\psi}\subseteq R(C_2,C_3)$，$R(C_1,C_3)$ 包含 $R(C_2,C_3)$.

(2.3) 若 $L_2\notin C_1^\theta$ 且 C_1^θ 中不存在文字在 σ 下与 L_2 可合一，则

$$C_1^{\theta\sigma}\subseteq C_2^\sigma-\{L_2^\sigma\}\subseteq(C_2^\sigma-\{L_2^\sigma\})\cup(C_3^\sigma-\{L_3^\sigma\})=R(C_2,C_3).$$

于是 C_1 包含 $R(C_2,C_3)$.

因为归结方法完备[1~3],不可满足子句集 S 有归结反驳 D. 根据性质(1)、(2),重言式或被包含子句,其归结式或为重言式,或被包含. 空子句既不是重言式,也不被非空子句包含. 因此,D 中空子句不由重言式或被包含子句导出,即存在从 S 导出空子句的联用删除策略的归结演绎. □

3 结束语

归结方法作为一种基本的自动推理方法,在自动定理证明、逻辑程序设计等人工智能领域有广泛的应用,因而其基础问题研究具有重要意义. 本文指出归结推理文献中与替换和集合运算有关的几个错误,并予以分析和改正. 这是进一步研究归结推理的基础.

参考文献

1 Chang C L, Lee R C T. Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving. New York: Academic Press, 1973

2 刘叙华,姜云飞. 定理机器证明. 北京:科学出版社,1987
(Liu Xu-hua, Jiang Yun-fei. Mechanical Theorem Proving. Beijing: Science Press, 1987)

3 刘叙华. 基于归结方法的自动推理. 北京:科学出版社, 1994
(Liu Xu-hua. Automated Reasoning Based on Resolution. Beijing: Science Press, 1994)

4 程晓春,孙吉贵,刘叙华. 基于广义归结的定理机器证明系统. 软件学报,1995,6(7):425~428
(Cheng Xiao-chun, Sun Ji-gui, Liu Xu-hua. Mechanical theorem proving system based on the general resolution. Journal of Software, 1995,6(7):425~428)

5 Leitsch A. On different concepts of resolution. Zeitschrift Fuer Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 1989,(35):71~77

Errors Related to Substitution and Set Operations

CHENG Xiao-chun[1,2] Jiang Yun-fei[3]

[1](*Department of Computer Science Jilin University Changchun* 130023)

[2](*Changchun University of Science and Technology Changchun* 130026)

[3](*Institute of Software Zhongshan University Guangzhou* 510275)

Abstract In this paper, some errors related to substitution and set operations in the proof procedures of lifting lemma and the completeness theorem of deletion strategy, which are in the literatures on resolution-based automated reasoning, are pointed out, analyzed, and corrected.

Key words Resolution, substitution, unification, set, deletion strategy.