第10卷第2期
1999年2月
软 件 学 报
JOURNAL OF SOFTWARE
Vol.10, No.2
Feb. 1999

不确定推理的支持度*

周 青[1] 鞠实儿[2]

[1](中山大学软件研究所 广州 510275)
[2](中山大学哲学系 广州 510275)

摘要 在引进的不确定性支持度的基础上,提出了不确定推理的一个可操作模型.定义了不确定推理的概念,引进了不确定推理的支持度,讨论了它们的初步性质.所有这些都是建立在经典的二值逻辑的基础上的,因而具有较牢固的基础.最后是该方法与当今流行方法的比较.

关键词 假定解,证据,知识集,不确定性,不确定性的支持度.

中图法分类号 TP18

本文讨论不确定推理的概念及其支持度.确定推理的研究是基于经典的二值逻辑,因而具有相当牢固的基础.而不确定推理的研究却是另一种情形.很明显的是,不确定推理的基础比确定推理的基础要弱得多.到目前为止,甚至还没有获得人们普遍接受的基础[1].本文将对不确定推理的基础进行讨论,并提出一个不确定推理的可计算模型.

我们认为下述问题对不确定推理来说是基本的问题:(1) 如何正确地、定性地刻画一个命题的不确定性?(2) 如何适当地度量一个命题的不确定性?要回答这些问题,让我们看看当我们有不确定问题时应当怎样做.

假定 P 是要解决的问题,h 是一个有关 P 的解的命题,称为假定解.我们的任务是要确定 h 是否为真.为了解决这一问题,很显然,我们需要一些有关 P 的知识,我们用 K 来表示有关的知识集合.于是 K 是个公式的集合,其中的公式都被认为是真.现在,如果 h 或 $\neg h$ 可以由 K 推导而得,那么,我们的问题就完全地解决了.所以,h 是确定的;否则,h 就是不确定的.当 h 是不确定的时候,我们的问题就变为:是否有进一步的方法来确定 h 是否为真.专家们常用以下的方法来解决这一问题:(1) 尽可能地收集证据(今后我们把证据集记为 E);(2) 试图由 $E\cup K$ 推导 h 或 $\neg h$,如果(2)成功,问题就解决了.否则,(3) 在 $E\cup K$ 的前提下度量 h 为真的可能性.下述例子说明我们是怎样确定 h 为真的可能性(或称对 h 的相信程度)的.

例:假定我们在调查一个谋杀案,并且有知识集:(1) 若 x 是凶手,则 x 在一定时间内在案发现场.(2) 若 x 是凶手,则 x 有犯罪动机.(3) 若 x 是凶手,则 x 有谋杀凶器.经过调查发现如下证据:张三曾在案发期间到过案发现场,并有谋杀动机,李四有和谋杀凶器十分类似的武器.于是我们有理由相信张三比李四更有可能是凶手.

这一例子说明,$K\cup\{h\}$ 和 $K\cup E$ 的相同推论越多,我们就越相信 h 为真,这对 $\neg h$ 也同样成立.

我们将形式地刻画这一过程,并提出一种确定相信 h 为真的程度的方法.这些都将以传统的二值逻辑为基础来完成.

1 不确定性和证据

设 h 是命题,K 是知识集.我们假定 K 是协调的,并且 K 中的公式都被接受为真,如逻辑公理、某一领域的基本定律等等.显然,如果 $K\vdash h$,h 就被认为是真;如果 $K\vdash\neg h$,则 h 就被认为是假;否则,h 就不能由 K 确定,即 h 的真值是不确定的.于是,命题的不确定性可以形式地定义如下.

---

* 本文研究得到国家863高科技项目基金资助.作者周青,1952年生,博士,副教授,主要研究领域为数理逻辑,理论计算机科学.鞠实儿,1953年生,教授,主要研究领域为逻辑学,人工智能.

本文通讯联系人:周青,广州 510275,中山大学软件研究所

本文1997-09-15收到原稿,1998-02-25收到修改稿

定义 1. 命题 h 是不能由 K 确定的，如果 h 在以 K 中的公式作公理的逻辑系统中是不可判定的(即 h 和 $\neg h$ 都不是该系统的定理).

用模型论的术语，命题 h 的不确定性可以等价地表达如下.

我们有形式语言 L 和一个 L 的公式集 K，其中 K 被称为是知识集. 为着某种目的，我们希望知道 L 的某一命题 h 是否为真，而我们又不能由 K 推导出 h 或 $\neg h$. 由于 h 独立于 K，根据完全性定理，K 有许多模型，h 在其中的一些模型中为真，而在另一些模型中为假. 在 K 的模型中我们知道有一个是我们所需要的. 但问题是我们不知道哪个模型是我们所需要的. 所以，h 的不确定性可以语义地定义如下.

定义 2. 命题 h 是不能由 K 确定的，如果我们无法确定 K 的哪个模型是我们所需要的.

定义 1 和 2 说明，命题的不确定性是推理系统的特征，所以，我们可用传统的二值逻辑来描述不确定推理.

为了确定 h 的真值，我们在 K 中加进一个命题集合 E. 对于我们的目的，我们相信 E 中的命题都为真. 然后，我们试图用 $K\cup E$ 来推导 h 或 $\neg h$. 我们把集合 E 称为证据集. 如果 $K\cup E\vdash h$ 或 $K\cup E\vdash\neg h$，h 就是确定的；否则，h 还是不确定的. 因此，我们可以把证据定义如下.

定义 3. 如果命题集合 E 中的命题都被认为为真，则称 E 是 K 中对 h 的证据集合. 如果 $K\cup E\vdash h$ 或 $K\cup E\vdash\neg h$，则称 E 是 K 中对 h 的完备证据集合；否则，E 是不完备的.

从以上定义可以看出，我们对证据在语法上仅要求它是命题. 它们的主要特征在于它们在语义中为真. 同时，我们还可以看出：定义 3 等价于：所谓的证据集 E 是一些在我们希望的模型中为真的命题集合，我们希望用它们来确定 h 在该模型中的真值. 如果 E 是完备的，就能确定我们所想要的模型，否则，h 还是不确定的. 在 E 是不完备的情形下，我们需要估价相信 h 为真的强度. 这里我们引进一个简单的事实：如果 $K\cup E\vdash h$，h 的所有逻辑推论在 $K\cup E$ 的所有模型中为真；如果 $K\cup E\vdash\neg h$，没有 h 的逻辑推论在 $K\cup E$ 的模型中为真. 如果 h 在 $K\cup E$ 中是不可判定的，一些 h 的逻辑推论在 $K\cup E$ 的某些模型中为真，而 h 的另一些逻辑推论在 $K\cup E$ 的另一些模型中为假. 于是，很自然地，如果 E 在 K 中的逻辑推论也是 h 在 K 中的逻辑推论，则这些推论对 h 提供正支持；如果 E 在 K 中的逻辑推论也是 $\neg h$ 在 K 中的逻辑推论，则这些推论对 $\neg h$ 提供正支持，即对 h 提供负支持；如果 E 在 K 中的逻辑推论既非 h 的逻辑推论也非 $\neg h$ 的逻辑推论，则这些推论对 h 是无关的. 显然，E 对 h 提供的正(负)支持的推论越多，E 对 h 的支持度(原始意义上，形式定义将在下节中给出)就越高(低). 同样明显的是，我们不必考虑那些与 h 无关的证据. 由此，正支持 h 的证据数量和负支持 h 的证据数量的比就有意义了. 下节将形式地把这一想法表述(文献[2]曾对类似的想法作过简短的叙述)出来.

2 假定解的支持度

我们将使用如下记号：

L：只有有穷个谓词的一阶语言. 我们还假定 L 只有有穷模型(因为在 AI 中只需考虑有穷多个谓词和有穷模型，我们作出如此假定. 对于无穷的情形，只需对文内的定义作少许修改即可)；

K：L 的一个公式集，语义上称为知识集；

E：L 的一个闭公式集，语义上称为证据集；

h：L 的一个闭公式，语义上称为假定解，我们假定 h 和 $\neg h$ 都不是 $K\cup E$ 的逻辑推论；

设 X 是 L 的任一公式集，A 是 L 的公式，我们用 $X\vdash A$ 表示 A 是 X 的逻辑推论.

我们假定 $K\cup E$ 是协调的.

设 A,B 是 L 的闭公式. 如果 $K\vdash A\longleftrightarrow B$，则称 A 和 B 是等价的，记作 $A\sim B$. 显然，$\sim$ 是 L 的闭公式集上的等价关系. 因为 L 只有有穷多个谓词和有穷模型，因而，L 也就只有有穷多个无变元项，所以，只有有穷多个等价类. 我们用 S 表示这些等价类的集合.

定义 4. 设 X,Y 是 L 的公式集，我们定义

$$C_X=\{U\in S:\ \text{存在 } A\in U \text{ 使 } X\vdash A\},$$
$$D_{X,Y}=C_X-C_Y,$$

$$B_{K,E,h}=D_{K\cup\{h\},K}\cap D_{K\cup E,K},$$

$$T_{K,E,h}=|B_{K,E,h}|/|B_{K,E,h}\cup B_{K,E,\neg h}|.$$

$T_{K,E,h}$称为<u>K 和 E 对 h 的支持度</u>. 在本节中因为 K 和 E 都是固定的，所以，我们使用 B_h 和 T_h，而不用 $B_{K,E,h}$和 $T_{K,E,h}$，以简化书写.

以下是一些关于对较复杂的公式 A 如何求 T_A 的结果.

引理 1. $B_h\cap B_{\neg h}=\varnothing$.

证明：如果 $A\in B_h\cap B_{\neg h}$，由定义，$A\in C_{K\cup\{h\}}$ 且 $A\in C_{K\cup\{\neg h\}}$，即存在 $p\in A$，$K\cup\{h\}\vdash p$ 且 $K\cup\{\neg h\}\vdash p$. 根据演绎定理，$K\vee h\rightarrow p$ 且 $K\vee\neg h\rightarrow p$. 于是，$K\vdash p$. 所以，$A\in C_K$，即 $A\notin D_{K\cup\{h\},K}$，因此，$A\notin B_h$. 矛盾. □

定理 1. $T_h=1-T_{\neg h}$.

证明：由引理 1，$|B_{\neg h}\cap B_h|=0$. 由集合论的结果，$|B_{\neg h}\cup B_h|=|B_{\neg h}|+|B_h|-|B_{\neg h}\cap B_h|$，所以，$|B_{\neg h}\cup B_h|=|B_{\neg h}|+|B_h|$. 于是，

$$T_h+T_{\neg h}=|B_h|/|B_{\neg h}\cup B_h|+|B_{\neg h}|/|B_{\neg h}\cup B_h|=(|B_h|+|B_{\neg h}|)/|B_{\neg h}\cup B_h|=1. \qquad \square$$

引理 2. $B_h\cap B_g=B_{h\&g}$.

证明：设 $p\in A$，我们有 $A\in B_h\cap B_g$ 当且仅当 $h\rightarrow p$ 且 $g\rightarrow p$，由经典逻辑的结果，当且仅当 $h\&g\rightarrow p$. 所以，$B_h\cap B_g=B_{h\&g}$. □

引理 3. $|B_h\cup B_g|=|B_h|+|B_g|-|B_{h\&g}|$.

证明：因为 $|B_h\cup B_g|=|B_h|+|B_g|-|B_h\cap B_g|$，根据引理 2，$|B_h\cup B_g|=|B_h|+|B_g|-|B_{h\&g}|$. □

定理 2. $T_{h\vee g}=(|B_h|+|B_g|-|B_h\cap B_g|)/(|B_h|+|B_g|-|B_h\cap B_g|+|B_{\neg h}\cap B_{\neg g}|)$.

证明：由定义

$$T_{h\vee g}=|B_{h\vee g}|/|B_{h\vee g}\cup B_{\neg h\vee g}|=|B_{h\vee g}|/|B_{h\vee g}\cup B_{\neg h\&\neg g}|, \tag{*}$$

证明 $|B_{h\vee g}|=|B_h\cup B_g|$. 为此，我们需要证明 $h\rightarrow p$ 或者 $g\rightarrow p$，则 $h\vee g\vdash p$. 而这可以由经典逻辑直接得出. 由此，根据引理 3，$|B_h\cup B_g|=|B_h|+|B_g|-|B_{h\&g}|$. 同时，根据引理 2，$|B_h\cap B_g|=|B_{h\&g}|$ 及 $|B_{\neg h}\cap B_{\neg g}|=|B_{\neg h\&\neg g}|$. 把这些等式代入（*）式中相应的项，即得定理. □

因为假定了只有有穷多个谓词和有穷多个无变元项，我们不需要量词. 由此，根据定理 1 和 2，对于任何公式 A，对 A 中出现的所有原子公式 p，只要知道了 B_p，我们就能够求得 T_A.

3 比　较

本节将主要讨论本文所定义的不确定支持度和不确定的概率测度的关系. 在 AI 研究中，概率论在不确定推理中有广泛的应用，人们提出了各种基于概率的不确定性测度[3]. 我们首先证明这些基于概率的测度方法是可以用本文提出的支持度来表示的. 为此，我们并不需要对各种不同的概率测度一一进行考察，而只需证明概率是能够由支持度来表示的就行了. 如果能够做到这一点，各种基于概率的不确定性测度方法就自然地可以由本文提出的支持度来表示了.

在概率论中，事件 P 将会发生的概率是这样计算的：如果在 n 次实验中 P 发生了 k 次，则事件 P 在第$(n+1)$次实验中发生的概率是 k/n. 以下定理说明，这是可以由不确定性支持度来表示的.

定理 3. 概率是能够由不确定性支持度表示的.

证明：设 L 是只有一个一元谓词符号 p 的一阶语言，为了定义知识集 K，我们首先定义

$$K_1=\{p'(k)\rightarrow p'(k)\vee p'(m):1\leqslant k,m\leqslant n+1, p'\text{是 } p \text{ 或 } p'\text{是}\neg p\},$$

$$K_2=\{A\vee B\rightarrow B\vee A:A,B\text{ 是 } L \text{ 中的公式}\},$$

然后令 $K=K_1\cup K_2$. 我们只用一条推理规则：对于 L 中的一切公式 A 和 B，

$$\frac{A\rightarrow B \quad A}{B}.$$

语义上，$p(k)$表示 P 在第 k 次实验中发生，而$\neg p(k)$表示 P 在第 k 次实验中不发生. 证据集 E 中含有 $p'(k)$，其

中 $k=1,\dots,n$，p' 是 p 还是 $\neg p$ 根据 P 是否在第 k 次实验中发生而定. 现在的问题是要确定 $p(n+1)$ 的概率. 显然，$C_{K\cup E}=\{[p'(k)\vee p'(m)]: p'(k)\in E, 1\leqslant k\leqslant n, 1\leqslant m\leqslant n+1\}$，其中 $[A]$ 表示公式 A 的等价类. 根据 C_X，$D_{X,Y}$ 和 $B_{K,E,h}$ 的定义，$B_{K,E,p(n+1)}=\{[p(k)\vee p(n+1)]: p(k)\in E\}$，而 $B_{K,E,\neg p(n+1)}=\{[\neg p(k)\vee\neg p(n+1)]: \neg p(k)\in E\}$. 所以，$T_{K,E,p(n+1)}=k/n$，其中 k 是 P 在 n 次实验中发生的次数. 显然，$T_{K,E,p(n+1)}$ 正是 $p(n+1)$ 的概率. □

根据不确定性支持度的定义不难看出，如果证据集 D 是由在证据集 E 中加进一些和 h 有相同推论的命题，则 $T_{K,D,h}>T_{K,E,h}$. 但这并不表明不确定性的支持度和概率测度总是能够保持相同的大小关系. 当证据集 E 中的命题除本身之外没有其他的逻辑推论的时候，很容易看出不确定性的支持度和概率测度是能够保持相同的大小关系的. 事实上，定理 3 的证明给出了利用支持度来计算不确定的概率测度的方法. 但是，在较复杂的情形中一般来说就不行了. 例如，如果一个证据集 E 有 7 个命题，其中 5 个从概率上正支持 h，其他的两个从概率上负支持 h；假定 $|B_{K,E,h}|=5$，$|B_{K,E,\bar{h}}|=3$，则 $T_{K,E,h}=5/8$. 而概率测度 $P_{K,E,h}=5/7$. 现在，设 $D\supset E$ 是个证据集，使得 $|D-E|=3$，而且 $D-E$ 中的一个命题有 5 个和 $\neg h$ 一样的逻辑推论，而其他两个命题各有一个和 $\neg h$ 一样的逻辑推论. 于是，$T_{K,D,h}=7/15<5/8=T_{K,E,h}$，而概率测度 $P_{K,D,h}=7/10>5/7=P_{K,E,h}$. 这样就产生了一个问题，这两种方法中哪一个较合理？为了探讨这个问题，让我们考虑这样一种情况：假定知识集 K 中有个公式 $p\rightarrow q$，其中 p 和 q 不等价，并且 $p\in E\&q\notin E$. 在概率测度中，q 对 h 和 $\neg h$ 不提供任何形式的支持，然而，在本文引进的不确定性支持度中，q 对 h 或 $\neg h$ 提供部分的支持. 所以，实际的问题是：我们是否需要考虑假定解和证据的逻辑推论？我们认为答案是肯定的. 在引言的例子中，我们能够认为张三和李四不是谋杀嫌疑人吗？显然不能.

对于 Carnap 的逻辑方法[4]，其公式是 $m*(E\&h)/m*(E)$，其中 $m*(X)$ 是对命题集合 X 的一种依赖于 L 的加权测度. 我们可以把知识集 K 看作是此系统的公理集. 但是，假定解 h 和证据 E 的逻辑推论在这里仍然没有任何意义. 于是，上段所述的问题在这里仍然存在. 另外，这种方法预先假定系统中的每个谓词和假定解有某种联系. 在实际工作中这是个十分强的假定. 因为我们通常无法预先知道哪些证据和假定解有关. 而在本文中引进的方法并不需要这一假定，因为我们取 $B_{K,E,h}=D_{K\cup h,K}\cap D_{K\cup E,K}$，这就去掉了所有和 h 无关的公式. 最后，在 Carnap 的方法中的加权 $m*$ 是由语言 L 来决定的，而非由系统确定，而我们的方法除经典逻辑之外无需事先假定任何东西.

通过以上的比较可以看出，由于以经典逻辑作为考虑的起点，本文所引进的方法和人的不确定推理比较类似，因而具有较牢固的逻辑基础. 它不仅在适用于概率测度的简单情形的不确定推理中能和概率测度一样有效，在概率测度无法进行的复杂情形的不确定推理中，它也能够有效地工作. 因此，本文所引进的方法是有意义的.

参考文献

1 Kyburg K. Why do we need foundation for modeling uncertainties?. In: Ambrosio D, Smets, Bonissone eds. Proceedings of the Conference on Uncertainty in AI. San Mateo, California: Morgan Kaufmann Publishers, 1991. 438～442

2 鞠实儿. 三种信念悖论的消除. 自然辩证法通讯，1995，17(2)：9～14
(Ju Shi-er. The dissolution of three believe paradoxes. Journal of Dialectics of Nature, 1995，17(2)：9～14)

3 Kanal L N, Lemmer J F. Uncertainty in Artificial Intelligence. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1986. 1～509

4 Carnap R. Logic Foundation of Probability. Chicago: University of Chicago Press, 1950

Supporting Degree of Uncertain Reasoning

ZHOU Qing[1] JU Shi-er[2]

[1](*Software Institute Zhongshan University Guangzhou 510275*)
[2](*Department of Philosophy Zhongshan University Guangzhou 510275*)

Abstract A new and operatable model of uncertain reasoning is provided which is based on the supporting degree of uncertainty introduced in this paper. The basic concepts are precisely defined, the supporting degree of uncertainty of a proposition is introduced, some basic properties are discussed. All of these are done by means of the classic logic, and hence have a solid foundation. The paper concludes with a comprehensive comparison of the presented method with other traditional methods.

Key words Hypothesis, evidence, corpus of knowledge, uncertainty, supporting degree of uncertainty.