B样条曲面在严格约束状态下的光顺拟合*

王国瑾 王振武 寿华好

(浙江大学CAD&CG国家重点实验室 杭州 310027)
(浙江大学应用数学系 杭州 310027)

摘要 提出一种新的B样条曲面造型方法:光顺地拟合空间型值点且同时严格地通过其中部分点.运用Lagrange乘子的条件极值法并引入光顺加权项,求出位置偏离和形状弯曲的最小二乘解,可以得到被称为B样条光顺准拟合的良好造型曲面.这一方法在包含门窗的交通工具外壳曲面设计、机械产品装配联接件制造中具有明显的实用价值.

关键词 曲线拟合,曲面拟合,插值,数据光顺,B样条,条件极值.

中图法分类号 O186,O182

曲面造型是计算机辅助几何设计(CAGD)的一项重要和基本的内容,已有大量文献描述了曲面造型的种种技术.[1,2]在这些技术中,最根本的方法有3类:逼近、插值和拟合.对于模型设计而言,大量地用到插值法或拟合法.[3~6]文献[5,6]实现了B样条曲线的光顺拟合和Bézier曲面的拟合,然而对Bézier曲面和B样条曲面的光顺拟合则暂付阙如,未提供有效的算法和试验.不仅如此,如果我们实际考察一下工业产品的模型设计过程就不难发现,需要对严格约束状态下光顺拟合曲面的造型,构造合理有效的数学模型.例如,某些机械产品外形曲面,可以用拟合空间型值点来产生,但在外形曲面上与安装、定位、联结、装配相关的某些部位,又必须要求精确地通过一批型值点.再如,飞机和汽车外形设计,整体曲面可以拟合,但在货舱或车身的门框线上又必须是插值.由此看来,建立B样条曲面光顺拟合和严格约束状态下光顺拟合(不妨称之为准拟合)的数学方程及数值解法,是摆在CAGD工作者面前的一项重要任务.本文运用Lagrange条件极值的思想,并通过引入曲面光顺加权项,把B样条曲面的光顺准拟合化为位置偏移和形状弯度的最小二乘求解,实例计算及显示表明效果良好.这一方法对曲面设计的软件工程具有理论意义和应用前景.

1 B样条曲线光顺准拟合

问题的提法:给定空间一组数据点列$\{Q_i\}_{i=0}^{n}$,要求作一条段数为m且整体光顺的3次均匀B样条曲线S_m

$$P(t)=\sum_{h=0}^{m+2}M_h(t)P_h,\ (0\leqslant t\leqslant 1),$$

拟合$\{Q_i\}_{i=0}^{n}$且插值$\{Q_{i_k}\}_{k=0}^{l}$,这里$\{Q_{i_k}\}_{k=0}^{l}\subset\{Q_i\}_{i=0}^{n}$,$l\leqslant n$.

分析:引入子曲线参数$u=mt-[mt]\in[0,1]$,段序号$j=[mt]+1\in[1,m]$,我们可以得到基函数

$$M_h(t)=\begin{cases}0 & h<j-1\text{ 或 }h>j+2\\ \frac{1}{6}(-u^3+3u^2-3u+1) & h=j-1\\ \frac{1}{6}(3u^3-6u^2+4) & h=j\\ \frac{1}{6}(-3u^3+3u^2+3u+1) & h=j+1\\ \frac{1}{6}u^3 & h=j+2\ .\end{cases}$$

用累加弦长法取型值点Q_i的对应参数t_i,并取点Q_i处的位置偏离权为α_i,曲线光顺权为β_i,则本问题的数学描述为:在条件$P(t_{i_k})=Q_{i_k}$,$(k=0,1,...,l)$之下,求$\{P_h\}_{h=0}^{m+2}$,使得

---

* 本文研究得到国家自然科学基金资助.作者王国瑾,1944年生,教授,博士导师,主要研究领域为计算机辅助几何设计,计算机图形学,几何造型与应用逼近论.王振武,1976年生,硕士生,主要研究领域为小波,分形与函数逼近论.寿华好,1964年生,讲师,主要研究领域为形位公差几何学,计算机辅助几何设计与图形学.

本文通讯联系人:王国瑾,杭州310027,浙江大学应用数学系

本文1998-02-28收到原稿,1998-04-20收到修改稿

$$I=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i[\boldsymbol{P}(t_i)-\boldsymbol{Q}_i]^2+\sum_{i=0}^{n}\beta_i|\boldsymbol{P}''(t_i)|^2=\text{MIN}.$$

为简单计，取 $\alpha_i\equiv\alpha,\beta_i\equiv\beta,\alpha+\beta=1,(i=0,1,\dots,n)$. 应用 Lagrange 乘子法，令待定矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda_0\\ \lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_l\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_0^x & \lambda_0^y & \lambda_0^z\\ \lambda_1^x & \lambda_1^y & \lambda_1^z\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \lambda_l^x & \lambda_l^y & \lambda_l^z\end{bmatrix}$$

再令

$$\boldsymbol{N}_{n\alpha}=[M_\alpha(t_0),M_\alpha(t_1),\dots,M_\alpha(t_n)]^T(\alpha=0,1,\dots,m+2),$$
$$\boldsymbol{M}=[\boldsymbol{N}_{n0},\boldsymbol{N}_{n1},\dots,\boldsymbol{N}_{n,m+2}],$$
$$\boldsymbol{N}''_{n\alpha}=[M''_\alpha(t_0),M''_\alpha(t_1),\dots,M''_\alpha(t_n)]^T(\alpha=0,1,\dots,m+2),$$
$$\boldsymbol{M}''=[\boldsymbol{N}''_{n0},\boldsymbol{N}''_{n1},\dots,\boldsymbol{N}''_{n,m+2}],$$
$$\overline{\boldsymbol{N}}_{l\alpha}=[M_\alpha(t_{i_0}),M_\alpha(t_{i_1}),\dots,M_\alpha(t_{i_l})]^T(\alpha=0,1,\dots,m+2),$$
$$\overline{\boldsymbol{M}}=[\overline{\boldsymbol{N}}_{l0},\overline{\boldsymbol{N}}_{l1},\dots,\overline{\boldsymbol{N}}_{l,m+2}],$$
$$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{P}_1,\dots,\boldsymbol{P}_{m+2}]^T,$$
$$\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{Q}_0,\boldsymbol{Q}_1,\dots,\boldsymbol{Q}_n]^T,$$
$$\overline{\boldsymbol{Q}}=[\boldsymbol{Q}_{i_0},\boldsymbol{Q}_{i_1},\dots,\boldsymbol{Q}_{i_l}]^T.$$

则曲线光顺准拟合问题转化为求合适的 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{A}$，使得 $G=\alpha(\boldsymbol{MP}-\boldsymbol{Q})^T(\boldsymbol{MP}-\boldsymbol{Q})+\beta(\boldsymbol{M}''\boldsymbol{P})^T(\boldsymbol{M}''\boldsymbol{P})+2(\overline{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{P}-\overline{\boldsymbol{Q}})^T\boldsymbol{A}$ 取极小值. 易知最小二乘解的法方程为

$$\begin{bmatrix}\alpha\boldsymbol{M}^T\boldsymbol{M}+\beta(\boldsymbol{M}'')^T\boldsymbol{M}'' & (\overline{\boldsymbol{M}})^T\\ \overline{\boldsymbol{M}} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}\\ \boldsymbol{A}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha\boldsymbol{M}^T\boldsymbol{Q}\\ \overline{\boldsymbol{Q}}\end{bmatrix}.$$

用选主元的 LU 三角分解法求解上述方程组，可保证数值计算的稳定性和较少的机时.

2　B 样条曲面光顺准拟合

问题的提法：给定空间数据点阵 $\{\boldsymbol{Q}_{ij}\}_{i=0}^{r}\,{}_{j=0}^{s}$，要作一张块数为 $m\times n$ 且整体光顺的双 3 次均匀 B 样条曲面 S_{mn}：$\boldsymbol{P}(u,v)=\sum_{\alpha=0}^{m+2}\sum_{\beta=0}^{n+2}M_\alpha(u)M_\beta(v)\boldsymbol{P}_{\alpha\beta},(0\leqslant u,v\leqslant 1)$ 拟合 $\{\boldsymbol{Q}_{ij}\}_{i=0}^{r}\,{}_{j=0}^{s}$ 且插值 $\{\boldsymbol{Q}_{i_kj_k}\}_{k=0}^{l}$，这里 $\{\boldsymbol{Q}_{i_kj_k}\}_{k=0}^{l}\subset\{\boldsymbol{Q}_{ij}\}_{i=0}^{r}\,{}_{j=0}^{s}$，$l\leqslant(r+1)(s+1)$.

分析：类似于曲线场合，我们可引入子曲面块参数 (μ,v)，$\mu=mu-[mu]\in[0,1]$，$v=nv-[nv]\in[0,1]$，块序号 (ξ,η)，$\xi=[mu]+1\in[1,m]$，$\eta=[nv]+1\in[1,n]$，从而得到基函数 $M_\alpha(u),M_\beta(v)$. 再用两个方向上的累加弦长法取得型值点 $\boldsymbol{Q}_{ij}$ 的对应参数 (u_{ij},v_{ij}). 注意到反映曲面弯曲度的曲面第二基本量 $\{L,M,N\}$ 和曲面单位法矢 $\boldsymbol{n}$ 之间有关系式

$$L=\boldsymbol{P}_{uu}\cdot\boldsymbol{n},M=\boldsymbol{P}_{uv}\cdot\boldsymbol{n},N=\boldsymbol{P}_{vv}\cdot\boldsymbol{n},L^2+M^2+N^2\leqslant|\boldsymbol{P}_{uu}|^2+|\boldsymbol{P}_{uv}|^2+|\boldsymbol{P}_{vv}|^2,$$

因而最小二乘光顺拟合的目标函数可取为

$$I=\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\alpha_{ij}|\boldsymbol{P}(u_{ij},v_{ij})-\boldsymbol{Q}_{ij}|^2+\sum_{(p,q)=(u,u),(u,v),(v,v)}\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\beta_{ij}|\boldsymbol{P}_{pq}(u_{ij},v_{ij})|^2.$$

这里，α_{ij},β_{ij} 分别代表点 $\boldsymbol{Q}_{ij}$ 的偏离权和光顺权. 为简单计，不妨取 $\alpha_{ij}\equiv\alpha,\beta_{ij}\equiv\beta,\alpha+\beta=1$. 与此同时，严格约束条件是

$$\boldsymbol{P}(u_{i_k},v_{j_k})=\boldsymbol{Q}_{i_kj_k}\quad(k=0,1,\dots,l).$$

为把条件极值问题化为无条件极值，引入与曲线场合类似的 Lagrange 乘子矩阵 $\boldsymbol{A}$，再令

$$N_{ii}^{\alpha\beta}=[M_\alpha(u_{i0})M_\beta(v_{i0}),M_\alpha(u_{i1})M_\beta(v_{i1}),\dots,M_\alpha(u_{is})M_\beta(v_{is})]^T,$$
$$(i=0,1,\dots,r;\ \alpha=0,1,\dots,m+2;\ \beta=0,1,\dots,n+2);$$
$$N_{\alpha\beta}^{(1)}=[N_{0i}^{\alpha\beta},N_{1i}^{\alpha\beta},\dots,N_{ri}^{\alpha\beta}]^T,(\alpha=0,1,\dots,m+2;\ \beta=0,1,\dots,n+2);$$
$$\boldsymbol{N}_{\alpha,n+2}^{(2)}=[\boldsymbol{N}_{\alpha0}^{(1)},\boldsymbol{N}_{\alpha1}^{(1)},\dots,\boldsymbol{N}_{\alpha,n+2}^{(1)}],(\alpha=0,1,\dots,m+2);$$
$$\boldsymbol{M}=[\boldsymbol{N}_{0,n+2}^{(2)},\boldsymbol{N}_{1,n+2}^{(2)},\dots,\boldsymbol{N}_{m+2,n+2}^{(2)}].$$

类似地，用 $\boldsymbol{M}_{uu},\boldsymbol{M}_{uv},\boldsymbol{M}_{vv}$ 表示对 $\boldsymbol{M}$ 矩阵内各元素求 (u,v) 二阶混合偏导数所产生的新矩阵；令

$$\overline{N}_{\alpha\beta}^{(1)}=[M_\alpha(u_{i_0j_0})M_\beta(v_{i_0j_0}),M_\alpha(u_{i_1j_1})M_\beta(v_{i_1j_1}),\dots,M_\alpha(u_{i_lj_l})M_\beta(v_{i_lj_l})]^T;$$
$$(\alpha=0,1,\dots,m+2;\ \beta=0,1,\dots,n+2);$$
$$\overline{\boldsymbol{N}}_{\alpha,n+2}^{(2)}=[\overline{\boldsymbol{N}}_{\alpha0}^{(1)},\overline{\boldsymbol{N}}_{\alpha1}^{(1)},\dots,\overline{\boldsymbol{N}}_{\alpha,n+2}^{(1)}],(\alpha=0,1,\dots,m+2);$$
$$\overline{\boldsymbol{M}}=[\overline{\boldsymbol{N}}_{0,n+2}^{(2)},\overline{\boldsymbol{N}}_{1,n+2}^{(2)},\dots,\overline{\boldsymbol{N}}_{m+2,n+2}^{(2)}];$$
$$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{P}_{00},\boldsymbol{P}_{01},\dots,\boldsymbol{P}_{0,n+2},\boldsymbol{P}_{10},\dots,\boldsymbol{P}_{m+2,n+2}]^T;$$
$$\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{Q}_{00},\boldsymbol{Q}_{01},\dots,\boldsymbol{Q}_{0s},\boldsymbol{Q}_{10},\dots,\boldsymbol{Q}_{rs}]^T;$$
$$\overline{\boldsymbol{Q}}=[\boldsymbol{Q}_{i_0j_0},\boldsymbol{Q}_{i_1j_1},\dots,\boldsymbol{Q}_{i_lj_l}]^T.$$

于是曲面光顺准拟合问题就转化为求合适的 P 和 A，使得 $G=\alpha(MP-Q)^T(MP-Q)+\beta\sum_{(p,q)=(u,u),(u,v),(v,v)}(M_{pq}P)^T\cdot(M_{pq}P)+2(\overline{M}P-\overline{Q})^TA$ 取极小值. 法方程组 $\frac{\partial G}{\partial P}=0,\frac{\partial G}{\partial A}=0$ 的矩阵形式是

$$\begin{bmatrix}\alpha M^TM-\beta\sum\limits_{(p,q)=(u,u),(u,v),(v,v)}M_{pq}^TM_{pq} & \overline{M}^T\\ \overline{M} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P\\ A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha M^TQ\\ \overline{Q}\end{bmatrix}.$$

我们也可用选主元的 LU 分解法求解上述方程组.

3 实例及结论

根据以上推导的方程，做了大量试验. 例如，在直角折线上取型值点进行准拟合，若不加光顺权，则拟合曲线明显抖动；加光顺权 $\beta=0.01$，则抖动消失，如图 1 所示. 作为曲面准拟合的试验，我们在单叶双曲面 $x^2+y^2-z^2=0.4$ 上取 $z_{ij}=0.1i,(x_{ij},y_{ij})=\left(\sqrt{0.4+z_{ij}^2}\cos\frac{\pi j}{8},\sqrt{0.4+z_{ij}^2}\sin\frac{\pi j}{8}\right)(i=0,1,\ldots,10;j=0,1,\ldots,10)$，对这 11×11 个型值点，用 5×5 块拼合而成的双三次 B 样条曲面进行光顺准拟合，其中插值足标 (i,j) 为(1,1)，(1,7)，(4,9)，(5,6)，(6,8)，(6,10)，(7,3)，(8,4)，(9,5)，(10,5)的 10 个型值点 P_{ij}，达到了良好效果，如图 2 所示(插值点加圈表示). 试验还表明，在某些情况下，光顺权对拟合曲面的光顺性有较大贡献，在另一些情况下则贡献不大，这与曲线情况有所不同.

图 1 B 样条曲线光顺准拟合

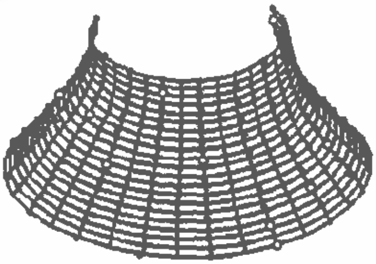

图 2 B 样条曲面光顺准拟合

参考文献

1 Mortenson M E. Geometric Modeling. New York: John Wesley & Sons, 1985

2 Hoschek J, Lasser D. Fundamentals of Computer Aided Geometric Design. Translated by Schumaker L L, Wellesley: A K Peters, 1993

3 Choi B K, Shin H Y, Yoo W S. Visually smooth composite surfaces for an unevenly spaced 3D data array. Computer Aided Geometric Design, 1993,10(2):157～171

4 Peters J. Local smooth surface interpolation: a classification. Computer Aided Geometric Design, 1990,7(1～4):191～196

5 刘鼎元，赵玉琦，詹廷雄等. Bézier 曲线和 B 样条曲线光顺拟合法. 计算数学，1984,6(4):360～365
(Liu Ding-yuan, Zhao Yu-qi, Zhan Ting-xiong *et al*. Fair fitting methods using Bézier curves and B-spline curves. Mathematica Numerica Sinica, 1984,6(4):360～365)

6 刘鼎元，胡康生. Bézier 曲面拟合. 应用数学学报，1984,7(2):250～256
(Liu Ding-yuan, Hu Kang-sheng. Fitting of Bézier surfaces. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 1984,7(2):250～256)

Smooth Fitting of B-Spline Surfaces with Strict Interpolation Conditions

WANG Guo-jin WANG Zhen-wu SHOU Hua-hao

(*State Key Laboratory of CAD & CG Zhejiang University Hangzhou* 310027)

(*Department of Applied Mathematics Zhejiang University Hangzhou* 310027)

Abstract In this paper, the authors present a new B-spline surface modelling method which fairly fits 3D data points while at the same time strictly interpolates some of them. By using Lagrange multiplier's conditional extreme method, introducing fairness weights and finding the least squares solutions of position deviation and shape curvature, some B-spline fair quasi-fitting modelling surfaces can be obtained. This method obviously has some practical applications in designing outer shell surfaces of transportation tools with windows and gates, or in manufacturing assembled/joined parts of mechanical productions.

Key words Curve fitting, surface fitting, interpolation, smoothing of data, B-spline, conditional extremum.