第9卷第6期
1998年6月
软件学报
JOURNALOF SOFTWARE
Vol. 9, No. 6
Jun. 1998

泛"蕴含"运算和泛"串行推理"运算研究*

何华灿 刘永怀 魏宝刚 胡麒 王瑛

(西北工业大学计算机科学与工程系 西安 710072) (西安矿业学院地质系 西安 710054)

摘要 泛"蕴含"运算是广泛存在于经验性思维、不确定性推理和各种多值逻辑系统具有普遍意义的逻辑运算之一.但常见蕴含算子往往凭主观经验给定,缺乏理论指导和使用的有效性分析,具有很大的随意性和盲目性.本文首先研究了"蕴含"运算的思想基础,认为"蕴含"运算是"串行推理"运算的逆运算.然后提出了"蕴含"公理,从代数系统角度给出了"蕴含"运算的定义,提出并证明了"蕴含"运算的表示定理,对常见的蕴含算子进行了有效性分析.最后研究了"蕴含"运算在"串行推理"运算中的运用.从而克服了已有的蕴含运算理论存在的不足.这样实际应用就可根据"蕴含"公理和"蕴含"运算的表示定理设计"蕴含"算子和泛"蕴含"运算公式簇,保证推理结果精确可信.

关键词 泛"蕴含"运算,不确定性推理,泛"串行推理"运算.

中图法分类号 TP18

在各种逻辑系统和专家系统中,典型的推理模型是三段论:

$$\begin{array}{l} R:\ \text{如果}\ A,\ \text{则}\ B \\ F:\qquad A \\ \hline \qquad \text{则}\ B \end{array}$$

在命题逻辑中,规则 R 和事实 F 是精确可信的.但在不确定性推理 UR(uncertain reasoning)中,规则 R 和事实 F 并不是百分之百的可信,而是具有一定的可信度 $t(A\rightarrow B)$, $t(A)$.因此,在应用三段论时,由推理得出的结论也具有一定的可信度 $t(B)$.三段论推理模型是典型的串行推理模型."串行推理"运算在 UR 中具有十分重要的作用,它把前提条件和规则的不确定性传播到结论.泛逻辑还发现,这种传播本身也具有不确定性.[1]

"蕴含"运算是"串行推理"运算的逆运算.因此,在 UR 过程中不能随便选取串行推理模型.事实上,"蕴含"运算比较抽象,难于把握其本质,但"串行推理"运算的本质却相对容易把握和认识.因此,只有将两者结合起来研究,才能相互映证,相得益彰.

"蕴含"运算的含义是已知前提条件 A 和结论 B 的可信度 $t(A)$, $t(B)$,求规则强度 $t(A\rightarrow B)$.显然, $t(A\rightarrow B)$ 是 $t(A)$ 和 $t(B)$ 的函数.不妨设 $t(A\rightarrow B)=I(t(A),t(B))$.因此,建立"蕴含"运算理论的核心问题是,定义单位区间[0,1]上的二元运算 $I(x,y)$ 应该满足的基本条件和构造相应的 $I(x,y)$.在泛逻辑中, $I(x,y)$ 应该是满足一组公理的运算簇,而不是几个固定的公式,这样就为实际应用选择恰当的运算公式提供了条件.这就是泛"蕴含"运算的思想基础和要解决的主要问题.

研究泛"蕴含"运算的目的是:(1) 已知事实和结论的可信度确定规则强度;(2) 已知规则强度和事实的可信度,计算结论的可信度.其中第1点是手段,第2点才是目的.文献[2~6]等都研究了蕴含算子,但他们的研究仅仅停留在规则强度上,无法保证这些算子是可逆的,更没有考虑运算本身的不确定性.

常见的蕴含算子有10多种.有些蕴含算子的定义具有很大的随意性和盲目性,有时把蕴含运算和与运算混为一谈,它们不在我们研究的"蕴含"运算之列.由逻辑常识知道:"蕴含"运算都应该满足下列必要条件:

---

* 本文研究得到航空基础科学基金和煤炭部青年基金资助. 作者何华灿,1938年生,教授,博士导师,主要研究领域为人工智能,泛逻辑.刘永怀,1966年生,博士,讲师,主要研究领域为不确定性推理,人工智能,专家系统.魏宝刚,1960年生,博士生,工程师,主要研究领域为分布式人工智能.胡麒,1975年生,硕士生,主要研究领域为知识表示.王瑛,1958年生,副教授,主要研究领域为煤田地质,模糊推理.

本文通讯联系人:何华灿,西安710072,西北工业大学计算机科学与工程系

本文1997-01-03收到原稿,1997-06-11收到修改稿

(1) 与命题逻辑兼容：$t(F\to B)=t(T)$, $t(A\to T)=t(T)$, $t(T\to B)=t(B)$, $t(T\to F)=t(F)$, 即 $I(0,t(B))=1$, $I(t(A),1)=1$, $I(1,t(B))=t(B)$, $I(1,0)=0$.

(2) 单调性：$I(t(A),t(B))$关于 $t(A)$是单调减的．关于 $t(B)$是单调增的.

1 “蕴含”运算的数学定义和主要性质

$I(x,y)$是单位区间[0,1]上的二元运算．其中 x,y 分别表示事实可信度和结论可信度.

定义 1. 单位区间[0,1]上的二元运算 $I(x,y)$是“蕴含”运算，当且仅当它满足下列公理.

公理 1. 如果事实完全可信，则规则强度就等于结论的可信度；如果事实可信，结论却完全不可信，则该规则就完全不可信，所以 $I(1,x)=x$；如果 $x>0$，则 $I(x,0)=0$.

公理 2. 如果事实越不可信，结论却越可信，则该规则就越可信，所以 $I(x,y)$关于 x 是单调减的，关于 y 是单调增的.

公理 3. 最终规则强度与事实在推理链中的位置无关，所以 $I(x,I(y,z))=I(y,I(x,z))$.

公理 4. 如果结论比事实更可信，则该规则就完全可信，所以如果 $x\leqslant y$，则 $I(x,y)=1$.

显然，“蕴含”运算是满足一组公理的运算簇．例如：

$$I(x,y)=\{\min(y/x,1),xy/\max(x-py+pxy,xy),\min(y/x^p,1)\ldots\}\quad(p\geqslant 1)$$

由“蕴含”运算的定义可得出如下推论.

推论 1. “蕴含”运算 $I(x,y)$满足封闭性，即 $I(x,y)\in[0,1]$.

证明：由“蕴含”运算的定义可知 $0=I(1,0)\leqslant I(x,y)\leqslant I(0,1)=1$，所以 $I(x,y)\in[0,1]$.

推论 2. 设 $N(x)$是可逆“非”运算．当 $x\leqslant y$ 时，$I(x,y)=I(N(y),N(x))$.

该推论表明，当结论比事实更可信时，原命题等于逆否命题.

推论 3. $I(x,y)\geqslant y$．当 $y>0$ 时，$I(x,y)>0$，且 $I(x,x)=1$(同一律).

该推论表明，规则强度不小于结论的可信度．且如果事实与结论相同，则该规则就完全可信.

2 “蕴含”运算公式的构造

常见的有两种方式定义蕴含运算.[2,4,5]

$$I_R(x,y)=\sup\{c\in[0,1]\mid T(x,c)\leqslant y\}\qquad I_S(x,y)=S(N(x),y)$$

其中前者称为 R-蕴含，后者称为 S-蕴含，$T(x,y)$，$S(x,y)$，$N(x)$分别是“与”运算、“或”运算和可逆“非”运算.

R-蕴含有一部分算子不满足 $I_R(x,0)=0$ $(x>0)$，所以只有部分 R-蕴含算子是“蕴含”运算．除了二值逻辑外，S-蕴含不满足蕴含运算的性质：$I_S(x,0)=0$ $(x>0)$，或当 $x\leqslant y$ 时，$I(x,y)=1$，所以 S-蕴含不可能是“蕴含”运算，我们必须另寻出路.

由定义可知：“蕴含”运算是满足一组公理的运算簇，这样就为实际应用选择恰当的“蕴含”运算公式提供了条件．下面给出构造这样运算的若干定理和推论.

定理 1. 单位区间[0,1]上的二元运算 $I(x,y)$是“蕴含”运算，当且仅当在[0,1]上存在严格单调增函数 $h(x)$和单调增函数 $f(x)$，且(1) $h(0)=f(0)=0$，$h(1)=f(1)=1$；(2) $x\leqslant y$ 时，$f(x)\leqslant h(y)$，使

$$I(x,y)=\begin{cases}h^{-1}(\min(h(y)/f(x),1)) & x>0,f(x)>0\\ 0 & x>0,f(x)=0,y=0\\ 1 & \text{else}\end{cases}$$

其中 $h^{-1}(x)$是 $h(x)$关于 x 的逆函数.

证明：充分性．显然 $I(x,y)\in[0,1]$.

(1) $I(1,x)=h^{-1}(\min(h(x)/f(1),1))=h^{-1}(h(x))=x$

$x>0$ 时，如果 $f(x)=0$，则 $I(x,0)=0$；否则，$I(x,0)=h^{-1}(\min(h(0)/f(x),1))=h^{-1}(0)=0$

(2) 设 $x_1<x_2$，则 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$．如果 $x_1=0$，则 $I(x_1,y)=1\geqslant I(x_2,y)$；否则，$0<x_1<x_2$.

(a) 如果 $f(x_1)=f(x_2)=0$，则 $I(x_1,y)=I(x_2,y)$；

(b) 如果 $f(x_1)=0$，$f(x_2)>0$，$y=0$，则 $I(x_1,y)=I(x_2,y)=0$；

(c) 如果 $f(x_1)=0$，$f(x_2)>0$，$y>0$，则 $I(x_1,y)=1\geqslant I(x_2,y)$；

(d) 如果 $0<f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则 $h(y)/f(x_1)\geqslant h(y)/f(x_2)$，所以 $h^{-1}(\min(h(y)/f(x_1),1))\geqslant h^{-1}(\min(h(y)/$

$f(x_2),1))$，即 $I(x_1,y)\geqslant I(x_2,y)$.

所以 $I(x,y)$ 关于 x 是单调减的.

显然 $I(x,y)$ 关于 y 是单调增的.

(3) 如果 $x=0$ 或 $y=0$，则 $I(x,I(y,z))=1$，$I(y,I(x,z))=1$；

否则 $x>0$，$y>0$. 如果 $z=0$，则 $I(x,I(y,z))=0$，$I(y,I(x,z))=0$. 否则

(a) 如果 $f(x)=f(y)=0,z>0$，$I(x,I(y,z))=I(y,I(x,z))=1$.

(b) 如果 $f(x)=0$，$f(y)>0$，$z>0$，则 $I(x,I(y,z))=I(x,h^{-1}(\min(h(z)/f(y),1)))=1$；$I(y,I(x,z))=I(y,1)=1$.

(c) 情况 $f(x)>0,f(y)=0,z>0$ 与情况(b)类似.

(d) 如果 $f(x)>0,f(y)>0,z>0$，则

$$\begin{aligned}I(x,I(y,z))&=I(x,h^{-1}(\min(h(z)/f(y),1)))=h^{-1}(\min(\min(h(z)/f(y),1)/f(x),1))\\&=h^{-1}(\min(h(z)/(f(y)f(x)),1/f(x),1))=h^{-1}(\min(h(z)/(f(x)f(y)),1))\end{aligned}$$

$$I(y,I(x,z))=I(y,h^{-1}(\min(h(z)/f(x),1)))=h^{-1}(\min(h(z)/(f(x)f(y)),1))$$

所以 $I(x,I(y,z))=I(y,I(x,z))$.

(4) $x\leqslant y$ 时，

(a) 如果 $x=0$，则 $I(x,y)=1$；

(b) 如果 $0<x\leqslant y,f(x)=0$，则 $I(x,y)=1$；

(c) 如果 $0<x\leqslant y,0<f(x)$，因为 $f(x)\leqslant h(y)$，所以 $h(y)/f(x)\geqslant 1$，所以 $I(x,y)=h^{-1}(\min(h(y)/f(x),1))=h^{-1}(1)=1$.

充分性成立.

必要性. 在单位区间[0,1]上任取一个严格单调增的一元函数 $g(x)$. 则令

$$h(x)=(g(x)-g(0))/(g(1)-g(0))$$

所以 $h(x)$ 是一个严格单调增函数，且 $h(0)=0,h(1)=1$. 取

$$f(x)=\begin{cases}h(y_0)/h(I(x,y_0)) & x>y_0,I(x,y_0)>0\\ p*h(x) & x\leqslant y_0\\ 1 & \text{else}\end{cases}\tag{1}$$

其中 $0<p\leqslant 1,y_0\in(0,1)$，则因为 $I(x,y_0)\geqslant y_0$，所以 $h(y_0)\leqslant h(I(x,y_0))$，即 $h(y_0)/h(I(1,y_0))\leqslant 1$，所以 $f(x)\leqslant 1$

(1) $f(0)=p*h(0)=p*0=0,f(1)=h(y_0)/h(I(1,y_0))=h(y_0)/h(y_0)=1$

(2) $x>y_0$ 时，设 $x_1<x_2$，则 $I(x_1,y_0)\geqslant I(x_2,y_0)$.

(a) 如果 $I(x_1,y_0)=I(x_2,y_0)=0$，则 $f(x_1)=f(x_2)=1$

(b) 如果 $I(x_1,y_0)>0,I(x_2,y_0)=0$，则 $f(x_2)=1\geqslant f(x_1)$

(c) 如果 $I(x_1,y_0)>0,I(x_2,y_0)>0$，则 $h(I(x_1,y_0))\geqslant h(I(x_2,y_0))>0$

所以 $h(y_0)/h(I(x_1,y_0))\leqslant h(y_0)/h(I(x_2,y_0))$，即 $f(x)$ 是单调增函数.

$x\leqslant y_0$ 时，显然 $f(x)$ 是单调增函数.

所以 $f(x)$ 是[0,1]上的单调增函数.

(3) $x\leqslant y_0$ 时，$f(x)=p*h(x)\leqslant h(x)\leqslant h(y_0)$. 因为 $y_0\in(0,1)$，且 $f(0)=h(0)=0,f(1)=h(1)=1$，所以当 $x\leqslant y$ $(x,y\in[0,1])$ 时，$f(x)\leqslant h(y)$.

由式(1)得：$x>0,f(x)>0$ 时，$I(x,y_0)=h^{-1}(\min(h(y_0)/f(x),1))/f(x),1))$，其中 $y_0\in(0,1)$.

因为，$I(0,y)=1,I(x,1)=1,I(x,0)=0(x>0)$，

$$\text{所以},I(x,y)=\begin{cases}h^{-1}(\min(h(y)/f(x),1)) & x>0,f(x)>0\\ 0 & x>0,f(x)=0,y=0\\ 1 & \text{else}\end{cases}$$

原命题成立.

该定理称为"蕴含"运算的表示定理，它一方面保证了通过这样的算法生成的是"蕴含"运算，另一方面保证了所有的"蕴含"运算公式都可以通过这样的算法来生成. 因此，它是"蕴含"运算理论的基本定理.

例 1：令 $h(x)=f(x)=x$，则 $I(x,y)=\min(y/x,1)$，就是 Goguen 蕴含.

由该定理可以得出如下推论.

推论 4. 如果 $I_1(x,y)$ 是任意的"蕴含"运算公式,则 $I(x,y)=(I_1(x^n,y^n))^{1/n}$ 也是"蕴含"运算公式,其中 $n>0$.

推论 5. 如果 $I_1(x,y)$ 是任意的"蕴含"运算公式,$\Phi(x)$ 是单位区间 $[0,1]$ 上的严格单调增的一元函数,且 $\Phi(0)=0,\Phi(1)=1$,则 $I(x,y)=\Phi^{-1}(I_1(\Phi(x)\Phi(y)))$ 也是"蕴含"运算公式,其中 $\Phi^{-1}(x)$ 是 $\Phi(x)$ 的逆函数.

由以上"蕴含"运算公式的构造方法可以看出,有3种方法可以构造"蕴含"运算公式:(1) 利用严格单调的一元函数;(2) 利用已知的"蕴含"运算公式;(3) 综合利用以上两种方法.这样就为实际应用设计恰当的"蕴含"运算公式提供了极大的方便.

3　某些蕴含运算公式的有效性分析

常见的蕴含算子有

$$I_1(x,y)=\begin{cases}1 & x\leqslant y\\ y & \text{else}\end{cases}$$

$I_2(x,y)=\min(1,1-x+y)$(Lukasiewicz 蕴含)

$I_3(x,y)=\min(1,y/x)$　(Goguen 蕴含)

$I_4(x,y)=1-x+xy$

$I_5(x,y)=\max(1-x,y)$　(Kleene-Diens 蕴含)

$I_6(x,y)=\min(x,y)$　(Mamdani 蕴含)

$I_7(x,y)=\max(1-x,\min(x,y))$　(Willmott 蕴含)

分析结果有如下结论:

(1) $I_5(x,y)\leqslant I_4(x,y)\leqslant I_2(x,y)$　　$I_1(x,y)\leqslant I_3(x,y)$　　$I_6(x,y)\leqslant I_7(x,y)$

(2) $I_1(x,y)$,$I_2(x,y)$ 和 $I_3(x,y)$ 满足同一律,即 $P\to P=T$. $I_4(x,y)$,$I_5(x,y)$,$I_6(x,y)$ 和 $I_7(x,y)$ 不满足同一律.

(3) $I_6(x,1)=x$. 它与二值逻辑不兼容,与公理4不相容.

(4) $I_1(x,y)$ 关于 x 不连续,其他的蕴含算子关于 x 都是连续的.

(5) 取 $N(x)=1-x$,则 $I_2(x,y)$,$I_4(x,y)$ 和 $I_5(x,y)$ 可以保证 $I(x,y)=I(N(y),N(x))$,即 $P\to Q=\sim P\to\sim Q$

(6) $I_6(x,y)$ 关于 x 是单调增的,与公理2不相容.其它算子关于 x 是单调减的.

(7) $x>0$ 时,$I_2(x,0)=I_4(x,0)=I_5(x,0)=I_7(x,0)=1-x$,它们与公理1不相容.

(8) $x\leqslant y$ 时,$I_4(x,y)$,$I_5(x,y)$,$I_6(x,y)$,$I_7(x,y)$ 都不等于1,它们与公理4不相容.

由以上分析不难看出:有些算子的定义具有很大的随意性和盲目性,往往不具有人们期望的性质,无法保证蕴含算子是可逆的.因此,其研究结果也就无法用于串行推理.上述蕴含算子中仅 $I_1(x,y)$ 和 $I_3(x,y)$ 具有"蕴含"运算特性.

4　"蕴含"运算用于"串行推理"

"串行推理"运算的含义是已知事实 A 的可信度 $t(A)$ 和规则强度 $t(A\to B)$,求结论 B 的可信度 $t(B)$. 显然,$t(B)$ 是 $t(A)$ 和 $t(A\to B)$ 的函数,不妨设 $t(B)=R(t(A),t(A\to B))$. 因此,建立"串行推理"运算的核心问题是,定义单位区间 $[0,1]$ 上的二元运算 $R(x,y)$ 应该满足的基本条件和构造这样的运算.显然,按泛逻辑的思想 $R(x,y)$ 也应该是满足一组公理的运算簇,而不是几个固定的公式.这样就为实际应用选择恰当的串行推理模型提供了条件.这就是泛"串行推理"运算的思想基础和要解决的主要问题.

定义 2. 单位区间 $[0,1]$ 上的二元运算 $R(x,y)$

$$R(x,y)=\inf\{c\in[0,1]\mid I(x,c)\geqslant y\}$$

则称 $R(x,y)$ 为"串行推理"运算.其中 $I(x,c)$ 是"蕴含"运算.

例 2:令 $I(x,y)=\min(y/x,1)$,则 $R(x,y)=xy$,这就是传染病治疗专家系统 EMYCIN 采用的串行推理模型.

由"串行推理"运算的定义可以得出如下推论.

推论 6. $R(0,x)=R(x,0)=0$,该推论表明,如果事实完全不可信或规则完全不可信,则结论就完全不可信.

推论 7. $R(1,x)=x$,该推论表明,如果事实完全可信,则结论的可信度就等于规则强度.

推论 8. $R(x,y)$ 关于 x,y 都是单调增的,该推论表明,如果事实和规则越可信,则结论就越可信.

推论 9. $R(x,y)\leqslant\min(x,y)$. 如果 $x<1$,则 $R(x,1)<1$. 该推论表明,结论的可信度不可能超过事实可信度或规则强度.如果事实不完全可信,则结论就不可能完全可信.

推论 10. $x>0,y>0$,则 $R(x,y)>0$,该推论表明,如果事实和规则都可信,则结论就应该可信.

推论 11. $R(x,R(y,z))=R(y,R(x,z))$,该推论表明,最终结论的可信度与事实激活规则的顺序无关.

推论 12. $R(x,I(x,y))\leqslant y$.

推论 13. $I(x,R(x,y))\leqslant y$.

定理 2. **满足推论 8、推论 12 和推论 13 的二元算子一定是"串行推理"运算.**

证明：设二元算子 φ 满足下列条件

$$\varphi^{-1}, x\varphi y \text{ 关于 } x,y \text{ 都是单调增的；}$$
$$\varphi^{-2}, x\varphi I(x,y)\leqslant y;$$
$$\varphi^{-3}, I(x,x\varphi y)\geqslant y.$$

则由"串行推理"运算的定义和 φ^{-3} 可知 $R(x,y)\leqslant x\varphi y$.

由 φ^{-1}、推论 13 可知 $x\varphi y\leqslant x\varphi I(x,R(x,y))$.

由 φ^{-2} 可知 $x\varphi I(x,R(x,y))\leqslant R(x,y)$.

所以，$x\varphi y\leqslant R(x,y)$.

所以，$x\varphi y=R(x,y)$，即原命题成立.

5 结 论

本文把"蕴含"运算和"串行推理"运算结合起来研究，揭示了二者之间的内在联系，避免了"蕴含"运算研究流于形式，保证了二者的运算可逆性，泛"蕴含"运算和泛"串行推理"运算都是满足一组公理的运算簇. 本文为根据实际应用选择和设计恰当的运算公式提供了理论基础.

参考文献

1 He Hua-can, Liu Yong-huai, He Da-qing *et al*. Generalized logic in experience thinking. Science in China (Series E), 1996,39(3):225～234

2 Weber S. A general concept of fuzzy connectives, negations and implications based on t-norms and t-conorms. Fuzzy Sets and Systems, 1983,11(2):115～134

3 Hall L O. The choice of ply operators in intelligent systems. Fuzzy Sets and Systems, 1990,34(2):135～144

4 Fodor J C. On fuzzy implication operators. Fuzzy Sets and Systems, 1991,41(2):161～166

5 Fodor J C. Fuzzy connectives via matrix logic. Fuzzy Sets and Systems, 1993,56(1):67～77

6 Fodor J C, Keresztfalvi T. On the compositional rule of inference under triangular norms. Fuzzy Sets and Systems, 1994,65(1):51～65

Studies on Generalized Implication Operation and Generalized Series Reasoning Operation

HE Hua-can　LIU Yong-huai　WEI Bao-gang　HU Qi

(*Department of Computer Science and Engineering　Northwestern Polytechnical University　Xi'an*　710072)

WANG Ying

(*Department of Geology　The Mining Institute of Xi'an　Xi'an*　710054)

Abstract　Generalized "IMPLICATION" operation (IO) is one of the logical operations that widely exist in experienced thinking, uncertain reasoning, and all kinds of multi-valued logical systems and have general significance. But the applications often give the logical operators without theoretic guide and the analyses of their effectiveness. In addition, they are often given at will and blindly. The authors first study the thinking foundation of IO, hold that IO is the inverse operation of series reasoning operation, then put forward the IO axiom, give the definition of IO from the viewpoint of algebraic system, raise and prove the representation theorem of IO which guarantees that the operators generated by it belong to IO and all operators belonging to IO can be generated by it, compare and analyse the implication operators in common use, finally study the utilization of IO in series reasoning operation. Thus the faults that the existing theory about IO have been overcome, the applications can design the implication operators according to the IO axiom and the representation theorem of IO which provide the theoretic foundation for the designing of generalized implication operators and ensure the reasoning conclusions exact and believable.

Key words　Generalized implication operation, uncertain reasoning, generalized series reasoning operation.