第8卷第7期
1997年7月

软 件 学 报
JOURNAL OF SOFTWARE

Vol. 8, No. 7
Jul. 1997

基于算子模糊逻辑的不确定程度计算*

程晓春

（吉林大学计算机系 长春 130023）

摘要 本文提出并比较了在信度语义下，计算算子模糊逻辑中公式（集）模糊程度的3种方法——归结法、广义归结法和TABLEAU方法.

关键词 算子模糊逻辑，可信度，归结，广义归结，TABLEAU方法.

中图法分类号 TP18

不确定知识的表示和推理随着知识工程的崛起而显得日益重要. 逻辑方法由于有语义直观的特点而被广泛应用于知识表示和推理的研究.[1,2]1985年，刘叙华将程度词(Hedges)从谓词符号中分离，建立了语法与经典逻辑不同的算子模糊逻辑OFL[3]，将命题的不确定程度用算子显式地表示在命题原子的左侧；关于同一命题的不同层次的程度词间通过算子运算进行综合. 算子模糊逻辑由于语法上可显式表示不确定程度而引起了同行的注意.[4]安直[5]改进OFL，提出了新的算子模糊逻辑模型 A_1OFL. 算子模糊逻辑中算子格上的不同算子运算体现为对程度词的不同理解. 陆汝钤[6,7]指出OFL和 A_1OFL 在证据语义下的不合理，提出了符合证据语义的算子模糊逻辑模型. 作者[8]指出了OFL和 A_1OFL 在信度语义下的不合理，提出了符合信度语义的算子模糊逻辑模型BAOFL. 算子模糊逻辑的优点是不仅能描述一个模糊定理，而且能描述这个模糊定理成立的模糊程度. 本文提出并比较了在信度语义下，计算BAOFL中公式（集）模糊程度的3种方法——归结法、广义归结法和TABLEAU方法.

1 基于信度语义的算子模糊逻辑BAOFL

在基于信度语义的算子模糊逻辑中，公式 λP 的语义解释为[3,5,8]：命题 P 在程度 λ 上是可信的或 P 的可信度是 λ. 当算子集与值域均为[0,1]时，[0,1]上的余运算′定义为：$\lambda'=1-\lambda$, $v(\sim G)=v(G)'=1-v(G)$. $1P$ 表示 P 完全可信（支持 P），$0P$ 表示 P 完全不可信（反对 P），$0.5P$ 表示不能确定 P 是否可信（中立）. 相应的算子运算应满足性质：$\forall\ a\in[0,1]$, $1\bigcirc a=a$, $0\bigcirc a=1-a$, $0.5\bigcirc a=0.5$.

命题1.1. 若二元算子运算是二次实系数多项式，而且满足 $\forall\ a,b\in[0,1]$，(1) $1\bigcirc a$

---

* 本文研究得到国家自然科学基金和国家863高科技项目基金资助. 作者程晓春，1973年生，长春地院博士后，主要研究领域为人工智能，自动推理.

本文通讯联系人：程晓春，长春130023，吉林大学计算机系

本文1996-09-01收到修改稿

$=a$,(2)$0\bigcirc a=1-a$,(3)$a\bigcirc b=b\bigcirc a$,则算子运算只能为 $x\bigcirc y=1-x-y+2xy$.

证明:注意,$0.5\bigcirc 0=0\bigcirc 0.5=1-0.5=0.5$.

令 $x\bigcirc y=a+bx+cy+dx^2+ey^2+fxy$;对上式分别代入 $0\bigcirc 0=1$,$0\bigcirc 1=0$,$1\bigcirc 0=0$,$1\bigcirc 1=1$,$0.5\bigcirc 0=0.5$,$0\bigcirc 0.5=0.5$.

代入 $0\bigcirc 0=1$ 知 $a=1$

代入 $0\bigcirc 1=0$ 知 $c+e=-1$ ①

代入 $1\bigcirc 0=0$ 知 $b+d=-1$ ②

代入 $1\bigcirc 1=1$ 有 $1+b+c+d+e+f=1$,结合①②知 $f=2$

代入 $0.5\bigcirc 0=0.5$ 知 $1+b/2+d/4=1/2$ ③,再由②知 $b=-1$,$d=0$

代入 $0\bigcirc 0.5=0.5$ 有 $1+c/2+e/4=1/2$,再由①知 $c=-1$,$e=0$.

总之,$x\bigcirc y=1-x-y+2xy$. 证毕.

同理可证.

命题 1.2. 若二元算子运算是二次实系数多项式,而且满足$\forall\ a,b,c\in[0,1]$,(1)$1\bigcirc a=a$,(2)$0\bigcirc a=1-a$,(3)$(a\bigcirc b)\bigcirc c=a\bigcirc(b\bigcirc c)$,则算子运算只能为 $x\bigcirc y=1-x-y+2xy$.

算子运算◯有如下性质:

①$0\bigcirc 0=1\bigcirc 1=1$,$0\bigcirc 1=1\bigcirc 0=0$, $0.5\bigcirc a=a\bigcirc 0.5=0.5$

②$1\bigcirc a=a$, $0\bigcirc a=1-a$

③$a\bigcirc b=b\bigcirc a$

④$a\bigcirc(b\bigcirc c)=(a\bigcirc b)\bigcirc c$

⑤$(1-a)\bigcirc b=a\bigcirc(1-b)=1-a\bigcirc b$,即“反对支持”与“支持反对”一样.

⑥$a\bigcirc\max\{b,c\}=\begin{cases}\max\{a\bigcirc b,\ a\bigcirc c\}, & 若\ a\geqslant 0.5\\ \min\{a\bigcirc b,\ a\bigcirc c\}, & 若\ a<0.5\end{cases}$

⑦$a\bigcirc\min\{b,c\}=\begin{cases}\min\{a\bigcirc b,\ a\bigcirc c\}, & 若\ a\geqslant 0.5\\ \max\{a\bigcirc b,\ a\bigcirc c\}, & 若\ a<0.5\end{cases}$

⑧$\lambda\bigcirc a\in[\min(1-\lambda,\lambda),\max(1-\lambda,\lambda)]\cap[\min(1-a,a),\max(1-a,a)]$.

$|\lambda\bigcirc a-0.5|=|2(\lambda-0.5)(a-0.5)|$. 由于 $\lambda\in[0,1]$,$|\lambda-0.5|\in[0,0.5]$,$0\leqslant|2(\lambda-0.5)|\leqslant 1$,$|\lambda\bigcirc a-0.5|\leqslant|a-0.5|$. 因此算子运算◯的真值走向是模糊的而不是分明的.[6]

⑨$(a_1\bigcirc\cdots\bigcirc a_n)'=a_1'\bigcirc\cdots\bigcirc a_n=a_1\bigcirc\cdots\bigcirc a_i'\bigcirc\cdots\bigcirc a_n=a_1\bigcirc\cdots\bigcirc a_n'$,当每个 a_i 均大于 0.5(支持),则 $a_1\bigcirc\cdots\bigcirc a_n$ 大于 0.5(支持);有奇数个 a_i 小于 0.5(反对),则 $a_1\bigcirc\cdots\bigcirc a_n$ 小于 0.5(反对);当某个 a_i 为 0.5(不确定),则 $a_1\bigcirc\cdots\bigcirc a_n$ 为 0.5(不确定). a_1 表示对 $a_2\bigcirc\cdots\bigcirc a_n$ 的相信程度,…, a_{n-1}表示对 a_n 的相信程度. 由于

$$a_1\bigcirc\cdots\bigcirc a_n-0.5=2^{n-1}(a_1-0.5)\cdots(a_n-0.5),$$

因此,其中支持和反对的传递性有类似+、−符号的累积性.

在[0,1]上,假设 $1-x$,min,max 分别作为余运算、下确界运算和上确界运算. 由性质①②可知,新的算子运算能更好地符合信度语义;例如算子 0 可表示否定的功能,$0\bigcirc 0\bigcirc a=a$,双重否定表示肯定. 由性质③④,新的算子运算还有良好的运算性质,多个相邻算子可先结合运算为一个算子. 由性质⑤,新的算子运算符合 A_1OFL 的 Ⅱ 型算子格的余运算要求.[5]由

性质⑥⑦，新的算子运算在左运算分量小于 0.5 时的否定功能破坏了在 max、min 为上、下确界运算时算子运算对[0,1]上元素的保序性. 由于 $(1-a)\bigcirc b=a\bigcirc(1-b)$，可限制算子运算左分量均不小于 0.5，以保持算子运算对[0,1]上元素的保序性；而否定功能等价地由算子运算右分量来实现.

由于 $\forall I,\forall G,v(0.5G)=0.5\bigcirc v(G)=0.5$，$0.5G$ 取值与 G 取值无关，甚至 $0.5G$ 的可满足性不由 G 的可满足性决定，这不合理；因此本文规定算子取值于(0.5,1]，而不是[0.5,1].

命题 1.3. 设 $L=[0,1]$，$Op=(0.5,1]$，对任意 $\lambda\in Op$ 及任意 $a,b\in L$，如果定义 $a'=1-a$，$a\#b=\max\{a,b\}$，$a\&b=\min\{a,b\}$，$\lambda\bigcirc a=0.5+2\times(\lambda-0.5)\times(a-0.5)$，则 $(L,\&,\#,Op,\bigcirc,')$ 构成有余结合算子格[8]，记为 Ω_1.

OFL[3]中，$a\bigcirc b=(a+b)/2$，由于 $(a\bigcirc b)'=a'\bigcirc b'$，算子运算不能保证左运算分量总属于(0.5,1]，不满足有余结合算子格[8]的余运算要求. A_1OFL[5]中，$a\bigcirc b=0.5+a(b-0.5)$，$\lambda_1\bigcirc(\lambda_2\bigcirc a)=(\lambda_1\times\lambda_2)\bigcirc a$，即使 $\lambda_1,\lambda_2\in(0.5,1]$，$\lambda_1\times\lambda_2$ 却可能不属于(0.5,1]. 另外，OFL 和 A_1OFL 中算子运算都不满足结合律，因而不满足有余结合算子格的定义.[8]

定义在 Ω_1 上的算子模糊逻辑记为 BAOFL（满足信度语义的有结合性的算子模糊逻辑）. 任意公式 λG 表示 G 的可信度为 λ.

下面给出 BAOFL 几条性质，对任意 $\lambda,\lambda_1,\lambda_2\in Op$，任意 $a_1,a_2\in L$ 及对任意公式 G,H 有

性质 1.4. $1G=G$，即 $1G$ 表示完全相信 G.

性质 1.5. $\sim(\lambda G)=\lambda(\sim G)$，因此表示 G 某种程度不可信可用 $\sim(\lambda G)$ 或 $\lambda(\sim G)$；据 $1(\sim G)=\sim G$，G 完全不可信等价于否定 G.

性质 1.6. $\lambda_1(\lambda_2 G)=(\lambda_1\bigcirc\lambda_2)G$，相邻算子串可结合运算为一个算子，由于当 $\lambda_1>0.5$ 而且 $\lambda_2>0.5$ 时必有 $\lambda_1\bigcirc\lambda_2>0.5$，即多个表示相信的算子累积作用仍然表示相信.

性质 1.7. $\lambda(G\vee H)=\lambda G\vee\lambda H$

性质 1.8. $\lambda(G\wedge H)=\lambda G\wedge\lambda H$

性质 1.9. $\lambda((\forall x)G(x))=(\forall x)(\lambda G(x))$　$\lambda((\exists x)G(x))=(\exists x)(\lambda G(x))$

$(\lambda\forall x)G(x)=(\forall x)(\lambda G(x))$　$(\lambda\exists x)G(x)=(\exists x)(\lambda G(x))$

定义 1.10. 称[0,1]上的值 v_1 比 v_2 确定（或 v_2 比 v_1 模糊）当且仅当 $|v_1-0.5|\geqslant|v_2-0.5|$，记为 $v_1\trianglerighteq v_2$.

性质 1.11. 若 $\lambda_1\trianglerighteq\lambda_2$ 且 $a_1\trianglerighteq a_2$ 则 $\lambda_1\bigcirc a_1\trianglerighteq\lambda_2\bigcirc a_2$，即算子运算能保持确定程度的序关系. 因此在任意解释 I 下，有 $T_I(G)=T_I(1G)\trianglerighteq T_I(\lambda G)$，即表示可信度的算子越多真值越向 0.5 靠拢，不确定因素越多结论越模糊，这与证据语义下"证据越多结论越分明"[6]不同.

性质 1.12. BAOFL 中公式满足交换律、结合律、分配律、吸收律和 De. Morgan 律.

2 BAOFL 的归结演绎

定义 2.1. 设 G 是任一 BAOFL 公式，如果对任意解释 I，都有 $T_I(G)\geqslant 0.5$，称 G 是恒真的；如果对任意解释 I，都有 $T_I(G)\leqslant 0.5$，称 G 是恒假的.

称原子及其否定分别为正、负文字，统称文字. 今后称只由单目算符（算子和～）修饰的原子为模糊文字，简称文字. 特别地，模糊原子 λP 是最简单的模糊文字. 模糊文字的析取式称为子句. 在不引起混淆的情况下，子句也看作是模糊文字的集合，子句内模糊文字间的关系是析取关系；由空集构成的子句称为空子句，记为□.

与 A_1OFL 类似[5]，BAOFL 中也有如下结论：

(1)任一公式 G 都有一与 G 等价的前束范式；

(2)任一公式 G 都有一 Skolem 范式，从而有一子句集 S；

(3)公式 G 是恒假的当且仅当 G 的子句集 S 是恒假的.

据性质 1.5，可将子句中模糊文字的～全移到原子前.

定义 2.2. BAOFL 中互补文字形如 $\lambda_1 P, \lambda_2(\sim P)$，$\lambda_1, \lambda_2$ 分别是修饰文字 P 和 $\sim P$ 的算子串（空串与 1 相当）.

定义 2.3. 设 C_1, C_2 是无公共变量的子句，$\lambda_1 L_1, \lambda_2 L_2$ 分别是 C_1 和 C_2 中文字，如果 L_1 和 $\sim L_2$ 有 $MGU\sigma$，则称 $(C_1{}^\sigma - S_1)\cup(C_2{}^\sigma - S_2)$ 为 C_1 和 C_2 的二元归结式，记为 $R(C_1, C_2)$；其中 $S_1=\{\lambda^* L_1{}^\sigma \mid \lambda^* L_1{}^\sigma \in C_1{}^\sigma\}$，$S_2=\{\lambda^* L_2{}^\sigma \mid \lambda^* L_2{}^\sigma \in C_2{}^\sigma\}$.

定义 2.4. 设 $\lambda_1 L_1, \ldots, \lambda_n L_n$ 是子句 C 中文字，如果 $L_1, \ldots, L_n$ 有 $MGU\sigma$，则称 C^σ 为 C 的因子.

定义 2.5. C_1 或 C_1 的因子和 C_2 或 C_2 的因子的二元归结式称为 C_1 和 C_2 的归结式.

容易证明.

定理 2.6. BAOFL 的子句集 S 是恒假的，当且仅当存在从 S 推出空子句□的归结演绎.

归结推理时，OFL 中需计算形如 $\lambda_{11}\cdots\lambda_{1n}P$ 和 $\lambda_{21}\cdots\lambda_{2m}P$ 的文字是否是 λ-互补文字[3]，A_1OFL 中需计算形如 $\lambda_1\cdots\lambda_n P$ 的文字是否是 λ-有效文字.[5]BAOFL 中所有文字均有效；归结过程判断互补文字不需计算，也没有 A_1OFL 中关于解释有效和文字有效的限制. 总之，BAOFL 的归结演绎更接近于经典逻辑的归结演绎.

3 BAOFL 的广义归结演绎

定义 3.1. 设 $\lambda_1 A_1, \ldots, \lambda_n A_n$ 是模糊文字或者是 $\lambda_i 0$ 或者是 $\lambda_i 1$，其中 0 和 1 分别是代表假和真的特殊文字，$\varphi(\lambda_1 A_1, \ldots, \lambda_n A_n)$ 是一个包含 $\lambda_1 A_1, \ldots, \lambda_n A_n$ 和逻辑符号～、∧、∨、→、↔的 BAOFL 中公式，并且 $A_1, \ldots, A_n$ 中的变元都在全称量词作用下，称这样一个公式为广义（模糊）子句或广义 λ—子句. 由于 $\lambda_i 0 = 1-\lambda_i$，$\lambda_i 1=\lambda_i$，[0,1]中的值可看作特殊的原子公式.

BAOFL 中的广义归结过程[9]只需将归结过程的定义 2.3 改为：

定义 3.2. 设 C_1 和 C_2 是无公共变量的广义子句，L_1 和 L_2 分别是 C_1和 C_2 中的原子，如果 L_1 和 L_2 有 $mgu\sigma$，则称 $C_1{}^\sigma(L_1{}^\sigma=1)\vee C_2{}^\sigma(L_2{}^\sigma=0)$ 和 $C_1{}^\sigma(L_1{}^\sigma=0)\vee C_2{}^\sigma(L_2{}^\sigma=1)$ 为 C_1 和 C_2的二元广义归结式.

当 C_1 和 C_2 分别是子句时，规定：

$S_1=\{\lambda^* L_1{}^\sigma \mid \lambda^* L_1{}^\sigma \in C_1{}^\sigma\}$，$S_2=\{\lambda^* L_2{}^\sigma \mid \lambda^* L_2{}^\sigma \in C_2{}^\sigma\}$，

$S_1^0=\max\{1-\lambda^* \mid \lambda^* L_1^\sigma \in C_1^\sigma\}, S_1^1=\max\{\lambda^* \mid \lambda^* L_1^\sigma \in C_1^\sigma\}$,

$S_2^0=\max\{1-\lambda^* \mid \lambda^* L_2^\sigma \in C_2^\sigma\}, S_2^1=\max\{\lambda^* \mid \lambda^* L_2^\sigma \in C_2^\sigma\}$.

将集合$(C_1^\sigma-S_1)\cup(C_2^\sigma-S_2)$中模糊文字的析取式记为$R(C_1,C_2)$. 显然,$\max\{S_1^0,S_2^1\}\vee R(C_1,C_2)$和$\max\{S_1^1,S_2^0\}\vee R(C_1,C_2)$分别是$C_1$和$C_2$的二元广义归结式. 比较归结式的定义(定义2.3),广义归结式保留了更多的关于公式(集)不确定程度的信息.

定义 3.3. 设A,B是广义模糊子句,W是A或B的子公式,递归定义子公式在公式中的某次出现的极性如下:

(1)W在W中的出现是正的;

(2)如果W在A中某次出现是正的(负的),则W的此次出现在$\sim A$和$A\rightarrow B$中是负的(正的);

(3)如果W在A中某次出现是正的(负的),则W的此次出现在$(A\vee B)$,$A\wedge B$,$B\rightarrow A$和λA中是正的(负的);

(4)W在$(A\longleftrightarrow B)$中的出现既是正的又是负的.

称W在A中是正的(负的)iff W在A中至少有一次出现是正的(负的);称W在A中是纯正的(纯负的)iff W在A中的所有出现都是正的(负的);称W在A中具有双极性 iff W在A中既是正的又是负的. 显然算子修饰纯的模糊文字得到的模糊文字仍是纯的.

类似经典逻辑的 Davis-Putnam 方法[10],对公式(集)中纯的模糊文字实施删除策略后,保持(不)可满足性.

BAOFL 有如下性质:$\forall\ \lambda\in(0.5,1]$,对任意公式$a$和$b$,

①$a\rightarrow b=\sim a\vee b$　　②$a\longleftrightarrow b=(a\rightarrow b)\wedge(b\rightarrow a)$

③$\sim(a\vee b)=(\sim a)\wedge(\sim b)$　　④$\sim(a\wedge b)=(\sim a)\vee(\sim b)$

⑤$\lambda(a\vee b)=\lambda a\vee\lambda b$　　⑥$\lambda(a\wedge b)=\lambda a\wedge\lambda b$

⑦$\sim\lambda a=\lambda(\sim a)$　　⑧$\lambda(a\rightarrow b)=\lambda a\rightarrow\lambda b$

⑨$\lambda(a\longleftrightarrow b)=\lambda a\longleftrightarrow\lambda b$

在 BAOFL 中可使用①,②,③,④,⑦将公式中的$\sim$全移至原子公式前,再使用性质$\sim(\sim a)=a$化简后,极易判断公式中文字的极性.

使用性质⑤,⑥,⑦,⑧,⑨可将公式中所有算子均置于文字前. 因为 BAOFL 中算子间运算满足结合律:$\lambda_1\bigcirc(\lambda_2\bigcirc\lambda_3)=(\lambda_1\bigcirc\lambda_2)\bigcirc\lambda_3$,所以在嵌套的算子向公式内层移动时,相邻算子可先执行算子运算结合为一个算子,以简化公式的形式.

$\Phi(A=B)$表示用B代替Φ中所有A的出现.

定义 3.4. 设A,B,C,W,a是广义λ-子句,称如下规则为化简规则:

(1)$\sim 1\sim>0$　(2)$\sim 0\sim>1$　(3)$(1\wedge W)\sim>W$

(4)$(0\wedge W)\sim>0$　(5)$(1\vee W)\sim>1$　(6)$(0\vee W)\sim>W$

(7)$(1\rightarrow W)\sim>W$　(8)$(0\rightarrow W)\sim>1$　(9)$(W\rightarrow 1)\sim>1$

(10)$(W\rightarrow 0)\sim>\sim W$　(11)$(1\longleftrightarrow W)\sim>W$　(12)$(0\longleftrightarrow W)\sim>\sim W$

(13)$\lambda 1\sim>\lambda$　(14)$\lambda 0\sim>(1-\lambda)$　(15)$\lambda_1\lambda_2\sim>\lambda_1\bigcirc\lambda_2$

(16)若W在A中出现,且$W\sim>a$,则$A\sim>A(W=a)$

(17)若$A\sim>B$,$B\sim>C$,则$A\sim>C$

显然公式化简前后等价，在广义归结推理过程中可使用化简规则以提高效率.

结合极性考虑可限制冗余广义归结式的产生.[11,12]

由于经典逻辑中 Herbrand 定理和提升引理的证明并不依赖于子句是关于文字的析取式这一假定，因此这两个定理对广义子句集也是正确的.

由于模糊程度词在算子模糊逻辑中不受替换、合一的作用，因此这两个定理对于算子模糊逻辑任一模型中的广义模糊子句集也成立.

据此可知，在 BAOFL 中，广义归结有相应的完备性定理.

令公式集等价于其所含公式的合取式，本文不区分二者的使用.

定义 3.5. 设 S 是广义 λ—子句(集)，门槛 $\lambda^*\in[0,1]$. 称 S 是 λ^* 恒假的，如果对 S 的任一解释 I，有 $T_I(S)\leqslant\lambda^*$；称 S 为 λ^* 恒真的，如果对 s 的任意解释 I，有 $T_I(S)\geqslant\lambda^*$.

若广义 λ—子句中的原子都为常元 0 或 1，则称之为广义常子句.

定义 3.6. 设门槛 $\lambda\in[0,1]$，若广义常子句 Φ 的值小于等于 λ，则称 Φ 为 λ—假子句；若 Φ 的值大于等于 λ，则称 Φ 为 λ—真子句.

定理 3.7. 设 S 是广义模糊子句集，门槛 $\lambda\in[0,1]$，S 是 λ 恒假的，当且仅当存在从 S 推出 λ—假子句的广义归结演绎.

刘叙华指出[9]，广义归结演绎不需要事先设定门槛，只要最后计算出所得常子句的值，那么这个值作为门槛就是最恰到好处的了. 作者认为，至少在 BAOFL 中，上述结论不恰当. 试看下例：

设 $S=\{0.9P\wedge 0.9\sim P)$，显然 S 是 0.5 恒假的，不是 0.1 恒假的. 因为 $T_I(P)=T_I(\sim P)=0.5$ 时，$T_I(0.9P\wedge 0.9\sim P)=\min\{T_I(0.9P),T_I(0.9\sim P)\}=\min\{0.9\bigcirc 0.5,0.9\bigcirc 0.5\}=0.5$. 但是广义归结的结果却为 $(0.9\cdot 0\wedge 0.9\cdot(\sim 0))\vee(0.9\cdot 1\wedge 0.9\cdot(\sim 1))=(0.9\cdot 0\wedge 0.9\cdot 1)\vee(0.9\cdot 1\wedge 0.9\cdot 0)$；在 BAOFL 中为 $(0.1\wedge 0.9)\vee(0.9\wedge 0.1)=0.1$. S 是 0.5 恒假的，广义归结的结果却是 0.1，其间差别很大.

究其根源，BAOFL 的公式中原子取值范围为[0,1]，不同于 OFL 的原子值域{0,1}，从而本质上不再是二值的. 而广义归结仍是基于二值的，因此不能很好计算 BAOFL 中公式的不确定程度——如恒真、恒假所能达到的程度.

下面基于 Tableau 方法讨论 BAOFL 中公式恒真、恒假程度的计算过程.

4 BAOFL 的 Tableau 演绎

令 $\lambda_F(G)=\max\{T_I(G)\mid I$ 是 G 的解释$\}$，称 $\lambda_F(G)$ 为 G 的恒假水平.

令 $\lambda_T(G)=\min\{T_I(G)\mid I$ 是 G 的解释$\}$，称 $\lambda_T(G)$ 为 G 的恒真水平.

BAOFL 中 $T_I(\sim G)=1-T_I(G)$，因此使 G 取值最小的解释必使 $\sim G$ 取值最大，使 G 取值最大的解释必使 $\sim G$ 取值最小. 显然，$\lambda_T(G)+\lambda_F(\sim G)=1$，$\lambda_F(G)+\lambda_T(\sim G)=1$.

类似于 BOFL[13]，易证.

定理 4.1. BAOFL 中任意公式有唯一恒真水平和恒假水平.

下面基于 Tableau 方法[14]给出计算公式(集)恒假水平的算法. 为方便起见，先讨论命题情形.

根据① $\lambda(a\rightarrow b)=\lambda a\rightarrow\lambda b$　　② $\lambda(a\longleftrightarrow b)=(\lambda a)\longleftrightarrow(\lambda b)$

③ $a\rightarrow b=\sim a\vee b$　　④ $a\longleftrightarrow b=(a\rightarrow b)\wedge(b\rightarrow a)$

可将公式中 $\rightarrow$ 和 $\longleftrightarrow$ 去掉．以后不妨假定公式中不含 $\rightarrow$ 和 $\longleftrightarrow$．

参考 Smullyan 的统一记号[14]，可将 BAOFL 中的非文字命题公式分为 α 类型，β 类型，$\bigcirc$—类型三类，定义它们的直接子公式如下：

α	α_1	α_2
$A\wedge B$	A	B
$\sim(A\vee B)$	$\sim A$	$\sim B$
$\sim\sim A$	A	A

β	β_1	β_2
$\sim(A\wedge B)$	$\sim A$	$\sim B$
$A\vee B$	A	B

$\bigcirc$	$\bigcirc_1$
λG	G
$\sim\lambda G$	$\sim G$

定义 4.2. 设 S 是 BAOFL 中的任意公式集，如下构造的以公式集为节点的二叉树称为 S 的 Tableau 推理树，记为 $Tbl(S)$：

(1) $Tbl(S)$ 的根是 S．

(2) 对于 $Tbl(S)$ 中任意节点 S_i，按下列规则生成其子节点：

(2.1)　α-规则

$$\begin{array}{c}\{\alpha\}\cup S_j\\ \downarrow\\ \{\alpha_1,\alpha_2\}\cup S_j\end{array}$$

(2.2)　β-规则

$$\begin{array}{ccc} & \{\beta\}\cup S_j & \\ \swarrow & & \searrow\\ \{\beta_1\}\cup S_j & & \{\beta_2\}\cup S_j\end{array}$$

(2.3)　$\bigcirc$—规则

$$\begin{array}{ccc}\{\lambda G\}\cup S_j & & \{\sim\lambda G\}\cup S_j\\ \downarrow & & \downarrow\\ \{G\}\cup S_j & & \{\sim G\}\cup S_j\end{array}$$

显然，$Tbl(S)$ 的叶节点是只含文字的集合．

算法 4.3. BAOFL 中命题公式集 S 恒假水平的 Tableau 计算过程．

(1) 构造 S 的完全 Tableau $Tbl(S)$．

(2) 对 $Tbl(S)$ 的每个叶节点 S_i，如下构造相应的解释 v_i：对任意原子 P，

若 $P\in S_i$ 且 $\sim P\in S_i$，则 $v_i(P)=0.5$

若 $P\in S_i$ 且 $\sim P\notin S_i$，则 $v_i(P)=1$ 且 $v_i(\sim P)=0$

若 $P\notin S_i$ 且 $\sim P\in S_i$，则 $v_i(\sim P)=1$ 且 $v_i(P)=0$

(3) 在 $Tbl(S)$ 上按照从叶节点到根节点，从子节点到父节点的顺序计算公式的真值：

$v_i(\alpha)=\min\{v_j(\alpha_1),v_j(\alpha_2)\}$；其中 S_j 是由 S_i 执行 α 规则得到的子节点．

$v_i(\beta)=\max\{v_j(\beta_1),v_k(\beta_2)\}$；$S_j,S_k$ 是由 S_i 执行 β 规则得到的子节点．

$v_i(\lambda G)=\lambda\bigcirc v_j(G)$；其中 S_j 是由 S_i 执行 $\bigcirc$ 规则得到的子节点．

$v_i(\sim\lambda G)=\lambda\bigcirc v_j(\sim G)$；其中 S_j 是由 S_i 执行 $\bigcirc$ 规则得到的子节点．

(4) 返回结果 $\min\{v_i(G)\mid G\in S\}$，即 $Tbl(S)$ 的根 S 中公式在相应解释 v_i 下最小真值．

公式 G 的度记为 $d(G)$，递归定义如下：

G 为命题变元或其否定时，$d(G)=0$；

$d(\alpha)=d(\alpha_1)+d(\alpha_2)+1$，即 α 型公式的度为其子公式度的和加1；

$d(\beta)=d(\beta_1)+d(\beta_2)+1$，即 β 型公式的度为其子公式度的和加1；

$d(\bigcirc)=d(\bigcirc_1)+1$.

公式集 S 的度定义为 $d(S)=\sum_{G\in S} d(G)$.

对公式集的度归纳可证.

定理4.4. 算法4.3返回结果为输入公式集的恒假水平.

对一阶情形，需再考虑 γ 型公式和 δ 型公式，这两类公式的直接子公式定义如下：

γ	$\gamma(a)$	δ	$\delta(a)$
$\forall_x G(X)$	$G(a)$	$\exists XG(X)$	$G(a)$
$\sim\exists XG(X)$	$\sim G(a)$	$\sim\forall XG(X)$	$\sim G(a)$

其中 a 是参量.

BAOFL 一阶公式集的 Tableau 推理树的生成过程需要增加处理 γ 型公式、δ 型公式的 Tableau 扩展规则：

γ—规则：

$$\begin{array}{c} S\cup\{\gamma\} \\ \downarrow \\ S\cup\{\gamma(a)\}\cup\{\gamma\} \end{array}$$

δ—规则：

$$\begin{array}{c} S\cup\{\delta\} \\ \downarrow \\ S\cup\{\delta(a)\} \end{array}$$

其中 a 要求是新的参量，即在 $S\cup\{\delta\}$ 中不出现.

注意，参量与变量和常量都不同，一方面，它不被量词约束，具有与常量相同的形式；另一方面，它可以被赋值，具有与变量相同的作用，但不赋多个不同的值. 一般假定不同参量取值不同.[14]

对于一阶基公式集，Tableau 扩展过程不使用 γ 规则、δ 规则，计算公式集恒假水平的方法与命题情形完全类似.

当公式集的论域 D 有限时，由于 $\forall_x G(x)=\bigwedge_{a\in D}\{G(a)\}$，$\exists_x G(x)=\bigvee_{a\in D}\{G(a)\}$ 可先将一阶公式集转化到基公式集，再计算基公式集的恒假水平.

当公式集中所有变元都在全称量词约束之下，即只有 γ 型公式，没有 δ 型公式时，对公式集的变元实施换名规则[10]后有等价的广义模糊子句集. 注意广义模糊子句集上Herbrand 定理成立[9]：

定理4.5. 广义模糊子句集 S 是 λ^* 恒假的 iff 存在 S 的有限基例集是 λ^* 恒假的.

易证.

定理4.6. 设 S 是 BAOFL 中广义模糊子句集；I^* 是 S 的解释 I 对应的 Herbrand 解释，则 $T_I(S)\leqslant T_I^*(S)$.

由 $\lambda_F(S)$ 的定义可知：

定理4.7. 设 S 是 BAOFL 中广义模糊子句集，则

$$\lambda_F(S)=\max\{T_I(S)\mid I\text{ 是 }S\text{ 的 Herbrand 解释}\}.$$

当广义模糊子句集 S 中没有函数出现时，由于变元只受全称量词约束，也没有 δ 型公式，此时 S 的 Herbrand 域 H 有限. 只考虑计算 $\lambda_F(S)$ 时，可将 S 中的任意广义模糊子句 $G(x)$ 看成基公式 $\bigwedge_{a\in H}\{G(a)\}$.

一般的一阶公式集在 Tableau 扩展时，若分枝中出现 γ 型公式，则 γ 规则可能使该分枝无穷扩展下去，以至于无法确定叶节点中可能包含哪些原子，当然也无法计算 γ 型公式的真值. 基于 Hintikka 的思想[14]，Tableau 推理树中要引入尽可能少的参量，可修改 γ 规则：

$$\gamma^*\text{ 规则：}\quad \begin{array}{c} S\cup\{\gamma\} \\ \downarrow \\ S\cup\{\gamma\}\cup\{\gamma(a)\} \end{array}$$

γ^* 规则的使用条件为：若 $S\cup\{\gamma\}$ 中有参量则要求参量 a 出现于 $S\cup\{\gamma\}$ 中且 $\gamma(a)$ 不属于 S.

当有限公式集中既无函数符号也无 δ 型公式时，其 Herbrand 域有限，使用 γ^* 规则的 Tableau 扩展过程必在有限步内终止.

扩展 δ 型公式时要求引入新的参量，何时使用 δ 规则，引入的不同参量何时允许取相同例是难于解决的. 因此，对于一般一阶公式集，计算其恒假水平同判断其不可满足性一样，不是可判定的.[15]寻找一阶 BAOFL 公式更大的可计算子类是需要进一步研究的问题.

5 结　论

本文提出的广义归结方法比归结方法保留了更多的关于公式(集)不确定程度的信息，但是由于广义归结是基于二值逻辑的，所以不能像 Tableau 方法那样灵活、恰当地计算 BAOFL 中公式(集)的不确定程度.

参考文献

1 Cheng Xiaochun, Jiang Yunfei, Liu Xuhua. The rationality and decidability of fuzzy implications. In: International Joint Conference on Artificial Intelligence, Montreal, Canada, August 1995. 1910～1915.

2 李未. 一个开放的逻辑系统. 中国科学(A 辑), 1992, **22(10)**: 1103～1113.

3 Liu X H, Xiao H. Operator fuzzy logic and fuzzy resolution. In: Proc. of 15th ISMVL, Canada, 1985. 68～75.

4 Dubois D, Lang J, Prade H. Fuzzy sets in approximate reasoning. Fuzzy Sets and Systems, 1991, **40(1)**: 219～224.

5 刘叙华，安直. 算子 Fuzzy 逻辑及其归结推理的改进. 计算机学报, 1990, **13(12)**: 890～899.

6 陆汝钤. 人工智能(下册). 北京：科学出版社, 1995.

7 程晓春，刘叙华，陆汝钤. 基于证据语义的算子模糊逻辑. 科学通报, 1995, **40(1)**: 86～88.

8 刘叙华，程晓春. 基于信度语义的算子模糊逻辑. 计算机学报, 1995, **18(12)**: 881～885.

9 刘叙华，司徒苹. 广义 λ-归结. 计算机学报, 1992, **15(9)**: 655～661.

10 刘叙华，姜云飞. 定理机器证明. 北京：科学出版社, 1987.

11 孙吉贵. 基于广义归结的自动定理证明和非经典逻辑的自动推理研究[博士论文]. 吉林大学计算机科学系, 1993.

12 Murray N V. Completely nonclausal resolution theorem proving. Artificial Intelligence, 1982, **18(1)**: 67～85.

13 邓安生，刘叙华. Boole 算子 Fuzzy 逻辑中推理的形式结构. 中国科学(A 辑), 1995, **25(7)**: 758～764.

14 Smullyan M. First-order Logic. Springer Verlag, 1968.

15 刘叙华. 数理逻辑基础. 长春:吉林大学出版社,1991.

UNCERTAINTY CALCULATING METHODS IN OPERATOR FUZZY LOGIC

CHENG Xiaochun

(*Department of Computer Science Jilin University Changchun* 130023)

Abstract This paper presents and compares three uncertainty calculating methods in operator fuzzy logic based on the semantical considerations of beliefs——resolution, generalized resolution and TABLEAUX.

Key words Operator fuzzy logic, belief, resolution, generalized resolution, TABLEAUX.

Class number TP18