第8卷第7期
1997年7月

软件学报
JOURNAL OF SOFTWARE

Vol. 8, No. 7
Jul. 1997

P/T网的化简运算及其性质研究*

许安国　蒋昌俊

（山东矿业学院应用数学与软件工程系　泰安　271019）

摘要　本文首先给出P/T网的几种化简运算，然后证明这几种运算对于网的结构性质不变，从而为P/T网的分析与综合提供了有效途径.

关键词　P/T网，化简运算，结构性质.

中图法分类号　TP301

复杂系统的建模与分析技术一直为人们所关注，尤其含并发行为的复杂系统更是如此. Petri网是研究并发系统的有力工具，寻求Petri网的化简技术一直是这一领域的研究热点. Murata[1,2]针对T-图提出若干化简规则，讨论了这些规则对活性、安全性的保持关系. [3]推广了Murata的工作，提出加权T-图的几种化简运算，研究了这些运算对结构性质的保持条件. Berthelot[4]推广了Lipton[5]等人的并行程序化简规则，给出了相应Petri网的化简规则，包括位置变换和变迁变换，讨论了保性条件. Lee和Farve[6]考虑了Petri网的递阶化简问题. 然而这些化简方法是在不加权的Petri网上考虑或是在加权的Petri网子类上考虑. 而复杂系统的Petri网模型往往是P/T网，即加权的Petri网，针对这类网研究其化简技术是非常必要的. 本文针对P/T网，提出4类化简运算（串化简、并行化简、分叉化简和回路化简），不仅研究了它们对于结构性质的保持条件，还研究了对于公平性和S(T)不变量的保持条件，这些结果对于复杂系统的分析是非常有用的. 文中通过一机械臂移物系统的分析说明了这一点.

此外，现简单叙述一下后面要用到的几个结论（以下设$\Sigma=(S,T,F,K,W)$）：

结论1.[7]　设A是Σ的关联矩阵，则Σ结构有界（守恒）的充要条件是：存在m维正整数向量$y>0(|S|=m)$，使得$Ay\leqslant 0(Ay=0)$.

结论2.[7]　设A是Σ的关联矩阵，则Σ可重复（相容）的充要条件是：存在n维正整数向量$X>0(|T|=n)$，使得$A^TX\geqslant 0(A^TX=0)$.

结论3.[8]　若Σ是结构有界网，则Σ为公平网的充要条件是：$\exists X\geqslant 0\wedge A^TX\geqslant 0\rightarrow X>0$.

结论4.[8]　网Σ是弱公平网的充要条件是：$\exists X\geqslant 0\wedge A^TX\geqslant 0\rightarrow X>0$.

---

* 本文研究得到国家自然科学基金和煤炭部自然科学基金资助. 作者许安国，1940年生，教授，主要研究领域为Petri网的理论及应用. 蒋昌俊，1962年生，博士，教授，主要研究领域为并发模型与并行处理，Petri网，算法等.

本文通讯联系人：许安国，泰安271019，山东矿业学院应用数学与软件工程系

本文1996-08-23收到修改稿

1　串行弧化简运算

定义 1.1. 在 P/T 网 Σ 中，若存在 $s_i, s_j, s_k \in S$，使得${}^\circ s_j=\{s_i\}$，$s_j{}^\circ=\{s_k\}$*，且记(s_i,s_j)，(s_j,s_k)的权分别是(w_1,w_2)和(w_3,w_4)，则将(s_i,s_j)，(s_j,s_k)两弧化简为一条弧(s_{ij},s_{jk})，且其权为(w_1w_3,w_2w_4). 称此过程为第 1 类串行弧化简运算，记为 $SR_1(s_i,s_j,s_k)$，如图 1(a)所示.

定义 1.2. 在 P/T 网 Σ 中，若存在 $t_i,t_j,t_k \in T$，使得${}^\circ t_j=\{t_i\}$，$t_j{}^\circ=\{t_k\}$[1]，且记(t_i,t_j)，(t_j,t_k)的权分别是(w_1,w_2)和(w_3,w_4)，则将(t_i,t_j)，(t_j,t_k)两弧化简为一条弧(t_{ij},t_{jk})，且其权为(w_1w_3,w_2w_4). 称此过程为第 2 类串行弧化简运算，记为 $SR_2(t_i,t_j,t_k)$，如图 1(b)所示.

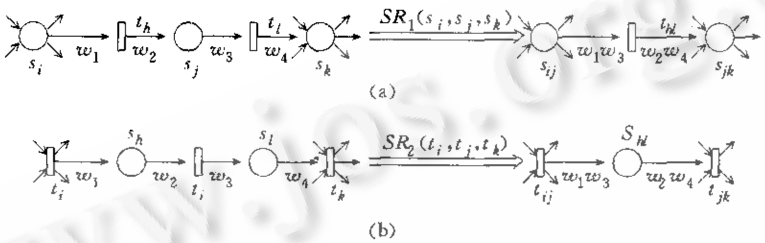


图1

定理 1.1. 若 P/T 网 Σ 经 $SR_q(q=1,2)$运算化简为 Σ_q' $(q=1,2)$，则 Σ 结构有界的充要条件是 $\Sigma_q'(q=1,2)$结构有界.

证明：只对 SR_1 运算作出证明，对 SR_2 类似可证.

必要性：设 P/T 网 Σ 结构有界，则$\exists$ $y>0$，使 $Ay\leqslant 0$ 成立，也即

$$\begin{array}{c} \\ t_h \\ t_l \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} & s_i & s_j & s_k \end{array}\\ \begin{bmatrix} A_1 & a_i & 0 & a_k \\ 0 & -w_1 & w_2 & 0 \\ 0 & 0 & -w_3 & w_4 \end{bmatrix}\end{array}\leqslant 0 \tag{1}$$

因此有$\begin{cases}-w_1y_i+w_2y_j\leqslant 0\\ -w_3y_j+w_4y_k\leqslant 0\end{cases}$，推得$-w_1w_3y_i+w_2w_4y_k\leqslant 0$，则

$$\begin{bmatrix} A_1 & a_i & a_k \\ & & \\ 0 & -w_1w_2 & w_2w_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_1 \\ y_i \\ y_k \end{bmatrix}\leqslant 0$$

也即$\exists$ $y'=(Y_1^T,y_i,y_k)^T>0\wedge A'y'\leqslant 0$，其中 A' 为 Σ_1'的关联矩阵，故 Σ_1'结构有界.

充分性：设 Σ_1'结构有界，故$\exists$ $y'>0\wedge A'y'\leqslant 0$，也即

$$\begin{cases} A_1Y_1+a_iy_i+a_ky_k\leqslant 0 \\ -w_1w_3y_i+w_2w_4y_k\leqslant 0 \end{cases} \tag{2}$$

因为 $0<w_2w_4y_k\leqslant w_1w_3y_i$，左右两边均为正整数，因此必$\exists$ 正整数 α，使得 $w_2w_4y_k\leqslant\alpha\leqslant w_1w_3y_i$，从而 $w_2w_3w_2w_4y_k\leqslant w_2w_3\alpha\leqslant w_2w_3w_1w_3y_i$，即有

---

* 记${}^\circ x={}^{\cdot\cdot}x$，$x^\circ=x^{\cdot\cdot}$

$$\begin{cases}-w_1(w_2w_3y_i)+w_2\alpha\leqslant 0\\ -w_3\alpha+w_4(w_2w_3y_k)\leqslant 0\end{cases}\tag{3}$$

令 $y=(w_2w_3Y_1^T,w_2w_3y_i,\alpha,w_2w_3y_k)^T$，由此可得

$$\begin{bmatrix}A_1 & a_i & 0 & a_k\\ 0 & -w_1 & w_2 & 0\\ 0 & 0 & -w_3 & w_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_2w_3Y_1\\ w_2w_3y_i\\ \alpha\\ w_2w_3y_k\end{bmatrix}\leqslant 0\tag{4}$$

此即∃ $y>0\wedge Ay\leqslant 0$，其中 A 为 Σ 的关联矩阵，故 Σ 结构有界.

推论 1.1(a). 若 P/T 网 Σ 经 SR_q 运算化简为 Σ_q'，则 Σ 守恒的充要条件是 Σ_q' 守恒.

推论 1.1(b). 若 P/T 网 Σ 经 SR_q 运算化简为 Σ_q'，则:

(i) $y=[Y_1^T,y_i,y_j,y_k]^T$ 是 Σ 的 S—不变量的充要条件是 $y_1'=[Y_1^T,y_i,y_k]^T$ 是 Σ_1' 的 S—不变量且 $w_1w_3y_i=w_2w_3y_j=w_2w_4y_k$.

(ii) $y=[Y_1^T,y_h,y_l]^T$ 是 Σ 的 S—不变量的充要条件是 $y_2'=[w_3Y_1^T,y_h]^T$ 是 Σ_2' 的 S—不变量且 $w_2y_h=w_3y_l$.

定理 1.2. 若 P/T 网 Σ 经 SR_q 运算化简为 Σ_q'，则 Σ 可重复的充要条件是 Σ_q' 可重复.

证明：只对 SR_1 运算作出证明，对 SR_2 同理可证.

必要性：设 Σ 可重复，故∃ $X>0\wedge A^TX\geqslant 0$，即

$$\begin{bmatrix}A_1^T & 0 & 0\\ a_i^T & -w_1 & 0\\ 0 & w_2 & -w_3\\ a_k^T & 0 & w_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ x_h\\ x_l\end{bmatrix}\geqslant 0\tag{5}$$

令 $\tilde{X}=w_3X$，显然有 $\tilde{X}>0\wedge A^T\tilde{X}\geqslant 0$，即

$$\begin{cases}A_1^T\tilde{X}_1 & \geqslant 0\\ a_i^T\tilde{X}_1-w_1w_3x_h & \geqslant 0\\ w_2w_3x_h-w_3^2x_l & \geqslant 0\\ a_k^T\tilde{X}_1+w_3w_4x_l & \geqslant 0\end{cases}\tag{6}$$

注意 $w_2x_h\geqslant w_3x_l$，推得 $0<w_3w_4x_l\leqslant w_2w_4x_h$，由(6)得

$$\begin{bmatrix}A_1^T & 0\\ a_i^T & -w_1w_3\\ a_k^T & w_2w_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{X}_1\\ x_h\end{bmatrix}\geqslant 0$$

即∃ $X'=[\tilde{X}_1^T,x_h]^T>0\wedge A'^TX'\geqslant 0$，其中 A' 为 Σ_1' 的关联矩阵，故 Σ_1' 可重复.

充分性：设 Σ_1' 可重复，故∃ $X'>0\wedge A'^TX'\geqslant 0$，其中 $X'=[X_1^T,x_h]>0$，令 $x_i=w_3x_h$，$x_j=w_2x_h$，并注意 $w_2x_i-w_3x_j=0$，从而有

$$\begin{bmatrix}A_1^T & 0 & 0\\ a_i^T & -w_1 & 0\\ 0 & w_2 & -w_3\\ a_k^T & 0 & w_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ x_i\\ x_j\end{bmatrix}\geqslant 0\tag{7}$$

此即$\exists\ X=[X_1^T,x_i,x_j]^T>0\wedge A^TX\geqslant 0$,其中$A$是$\Sigma$的关联矩阵,从而$\Sigma$是可重复的.

推论1.2(a). 若P/T网Σ经过SR_q运算后化简为Σ_q',则Σ相容的充要条件是Σ_q'相容$(q=1,2)$.

推论1.2(b). 若P/T网Σ经SR_q运算化简为$\Sigma_q'(q=1,2)$,则

(i) $X=[X_1^T,x_h,x_l]^T$是Σ的T—不变量的充要条件是$X_1'=[w_3X_1^T,x_h]^T$是Σ_1'的T—不变量且$w_2x_h=w_3x_l$.

(ii) $X=[X_1^T,x_i,x_j,x_k]^T$是Σ的T—不变量的充要条件是$X_2'=[X_1^T,x_i,x_k]^T$是Σ_2'的T—不变量且$w_1w_3x_i=w_2w_3x_j=w_2w_4x_k$.

定理1.3. 若P/T网Σ经SR_q运算化简为Σ_q',则Σ是弱公平网的充要条件是Σ_q'是弱公平网$(q=1,2)$.

证明:只对SR_1运算作出证明,对于SR_2同理可证.

必要性:设Σ是弱公平网,由结论4可知,$\exists\ X=[X_1^T,x_h,x_l]^T\geqslant 0\wedge A^TX\geqslant 0\rightarrow X=[X_1^T,x_h,x_l]^T>0$.

设Σ_1'关联矩阵为A',由定理1.2,在SR_1运算下,Σ_1'的可重复性不变,故$\exists\ X'>0\wedge A'^TX'\geqslant 0$.

我们证明$\exists\ X'\geqslant 0\wedge A'^TX'\geqslant 0\rightarrow X'>0$. 由定理1.2的证明,$X'=[X_1^T,x_h]^T\geqslant 0\wedge A'^TX'\geqslant 0$;反证之,假设$X_1(i_0)=0$,则对于$\Sigma$,令$X=[w_3X_1^T,w_3x_h,w_2x_h]^T$,则$\exists\ X\geqslant 0\wedge A^TX\geqslant 0\wedge X_1(i_0)=0$,此与$\Sigma$是弱公平网相矛盾,故对于$\Sigma_1'$,$\exists\ X'\geqslant 0\wedge A'^TX'\geqslant 0\rightarrow X'>0$,即$\Sigma$在$SR_1$运算下变为$\Sigma_1'$仍是弱公平网,当$x_h=0$时,同理可证.

充分性:设Σ_1'是弱公平网,由结论4知$\exists\ X'=[X_1^T,x_h]^T\geqslant 0\wedge A'^TX'\geqslant 0\rightarrow X'>0$. 由定理1.2,在$SR_1$运算下,$\Sigma$可重复,故$\exists\ X>0\wedge A^TX\geqslant 0$. 我们证明,$\exists\ X\geqslant 0\wedge A^TX\geqslant 0\rightarrow X>0$. 由定理1.2的证明知$\exists\ X=[X_1^T,x_h,x_l]^T\geqslant 0\wedge A^TX\geqslant 0$,若$X_1(i_0)=0$,则对于$\Sigma_1'$,$\exists\ \tilde{X}=[w_3X_1^T,x_h]^T$使得$A'^T\tilde{X}\geqslant 0$,此与$\Sigma_1'$的弱公平性矛盾;若$x_h=0$,$\exists\ \tilde{X}=[w_3X_1^T,0]^T$使得$A'^T\tilde{X}\geqslant 0$,此也与$\Sigma_1'$的弱公平性矛盾,若$x_l=0$,$\exists\ X=[X_1^T,x_h,0]^T\geqslant 0\wedge A^TX\geqslant 0$,故更有$X=[X_1^T,0,0]^T\geqslant 0\wedge A^TX\geqslant 0$,因此$\exists\ \tilde{X}=[w_3X_1^T,0]^T$使得$A'^T\tilde{X}\geqslant 0$,此又与$\Sigma_1'$的弱公平性矛盾. 因此$\exists\ X\geqslant 0\wedge A^TX\geqslant 0\rightarrow X>0$,故$\Sigma$为弱公平网.

推论1.3. 若P/T网Σ经SR_q运算化简为Σ_q',如果Σ是结构有界的,则Σ是公平网的充要条件是Σ_q'是公平网$(q=1,2)$.

2 并行弧的化简运算

定义2.1. 在P/T网Σ中,若$\exists\ s_i,s_j\in S$,使得s_i到s_j有2条有向弧$(s_i,s_j)_1,(s_i,s_j)_2$,其权分别是$(w_1,w_2),(w_3,w_4)$,则将此2条弧化简为一条弧(s_i,s_j),其权为(w_{13},w_{24}),其中

$$(w_{13},w_{24})=\begin{cases}(w_1,w_2), & \text{当}\dfrac{w_1}{w_2}\leqslant\dfrac{w_3}{w_4}\\[2ex](w_3,w_4), & \text{当}\dfrac{w_1}{w_2}>\dfrac{w_3}{w_4}\end{cases}$$

称此运算为第1类并行弧化简运算,记作$PR_1(s_i,s_j)$,如图2(a)所示;若

$$(w_{13},w_{24})=\begin{cases}(w_1,w_2), & \text{当}\dfrac{w_1}{w_2}>\dfrac{w_3}{w_4}\\ (w_3,w_4), & \text{当}\dfrac{w_1}{w_2}\leqslant\dfrac{w_3}{w_4}\end{cases}$$

称此运算为第 2 类并行弧化简运算,记作 $PR_2(s_i,s_j)$,如图 2(a)所示.

定义 2.2. 在 P/T 网 Σ 中,若$\exists$ $t_i,t_j\in T$,使得 t_i 到 t_j 有 2 条有向弧 $(t_i,t_j)_1$,$(t_i,t_j)_2$,其权分别是 (w_1,w_2),(w_3,w_4),则将此 2 条弧化简为一条弧 (t_i,t_j),其权为 (w_{13},w_{24}),若

$$(w_{13},w_{24})=\begin{cases}(w_1,w_2), & \text{当}\dfrac{w_1}{w_2}\leqslant\dfrac{w_3}{w_4}\\ (w_3,w_4), & \text{当}\dfrac{w_1}{w_2}>\dfrac{w_3}{w_4}\end{cases}$$

称此运算为第 3 类并行弧化简运算,记作 $PR_3(t_i,t_j)$,如图 2(b)所示;若

$$(w_{13},w_{24})=\begin{cases}(w_1,w_2), & \text{当}\dfrac{w_1}{w_2}>\dfrac{w_3}{w_4}\\ (w_3,w_4), & \text{当}\dfrac{w_1}{w_2}\leqslant\dfrac{w_3}{w_4}\end{cases}$$

称此运算为第 4 类并行弧化简运算,记作 $PR_4(t_i,t_j)$,如图 2(b)所示. 同理可证以下定理.

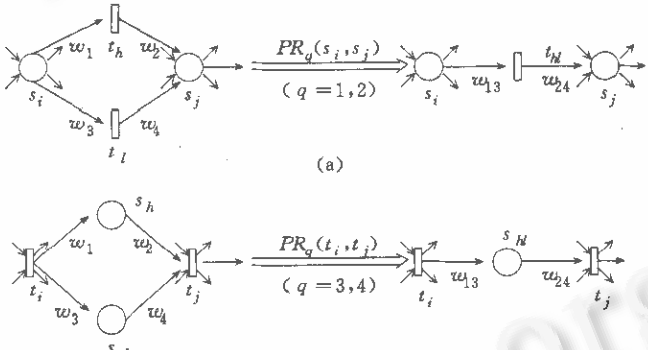


图2

定理 2.1. 若 P/T 网 Σ 经 $PR_q(q=1,2,3,4)$ 运算化简为 $\Sigma_q'(q=1,2,3,4)$,

(1) 若 Σ 可重复(结构有界),则 Σ_1' 可重复(Σ_3' 结构有界);

(2) 若 Σ_2' 可重复(Σ_4' 结构有界),则 Σ 可重复(Σ 结构有界).

定理 2.2. 若 P/T 网 Σ 经过 PR_q 运算化简为 $\Sigma_q'(q=1,2,3,4)$,

(1) 若 Σ 结构有界(可重复),则 Σ_2' 结构有界(Σ_4' 可重复);

(2) Σ 结构有界(可重复)的充要条件是 Σ_1' 结构有界(Σ_3' 可重复).

推论 2.1(a). 若 P/T 网 Σ 经 $PR_q(q=1,2)$ 运算化简为 $\Sigma_q'(q=1,2)$,(i)若 Σ 相容,则 Σ_1' 相容;(ii)若 Σ_2' 相容,则 Σ 相容.

推论 2.1(b). 若 P/T 网 Σ 经 $PR_q(q=1,2,3,4)$ 运算化简为 $\Sigma_q'(q=1,2,3,4)$,且 $\dfrac{w_1}{w_2}=\dfrac{w_3}{w_4}$,则(i) Σ 守恒的充要条件是 Σ_q' 守恒,(ii) Σ 相容的充要条件是 Σ_q' 相容.

推论 2.1(c). 若 P/T 网 Σ 经 $PR_q(q=1,2)$ 运算化简为 $\Sigma_q'(q=1,2)$, (i)若 $X=[X_1^T,x_h,x_l]^T$ 是 Σ 的 T—不变量，当$\frac{w_1}{w_2}\leqslant\frac{w_3}{w_4}$时，则 $X'=[w_1X_1^T,w_1x_h+w_3x_l]^T$ 是 Σ_1' 的 T—不变量，当$\frac{w_1}{w_2}>\frac{w_3}{w_4}$时，则 $X'=[w_3X_1^T,w_1x_h+w_3x_l]^T$ 是 Σ_1' 的 T—不变量；

(ii)若 $X'=[X_1^T,x_{hl}]^T$ 是 Σ_2' 的 T—不变量，当$\frac{w_1}{w_2}>\frac{w_3}{w_4}$时，则 $X=[\lambda X_1^T,w_1x_h,w_1x_l]^T$ 是 Σ 的 T—不变量，其中 λ 是适当选取的正整数，使 $\lambda x_{hl}=w_1x_h+w_3x_l$ 有正整数解 $x_h>0,x_l>0$；当$\frac{w_1}{w_2}\leqslant\frac{w_3}{w_4}$时，则 $X=[\lambda X_1^T,w_3x_l,w_3x_h]^T$ 是 Σ 的 T—不变量，其中 λ 是适当选取的正整数，使 $\lambda x_{hl}=w_1x_l+w_3x_h$ 有正整数解 $x_l>0,x_h>0$.

推论 2.1(d). 若 P/T 网 Σ 经 $PR_q(q=1,2,3,4)$ 运算化为 $\Sigma_q'(q=1,2,3,4)$，且$\frac{w_1}{w_2}=\frac{w_3}{w_4}$，则

(i)$Y=[Y_1^T,y_i,y_j]^T$ 是 Σ 的 S—不变量的充要条件是 $Y=[Y_1^T,y_i,y_j]^T$ 是 $\Sigma_q'(q=1,2)$ 的 S—不变量；

(ii)$Y=[Y_1^T,y_h,y_l]^T$ 是 Σ 的 S—不变量的充要条件是 $Y'=[w_1Y_1^T,w_1y_h+w_3y_l]^T$ 是 $\Sigma_q'(q=3,4)$ 的 S—不变量.

推论 2.2(a). 若 P/T 网 Σ 经 $PR_q(q=3,4)$ 运算化简为 $\Sigma_q'(q=3,4)$，

(i)若 Σ 相容，则 Σ_4' 相容；

(ii)Σ 相容的充要条件是 Σ_3' 相容.

推论 2.2(b). 若 P/T 网 Σ 经 $PR_q(q=3,4)$ 运算化为 $\Sigma_q'(q=3,4)$，

(i)若 $X=[X_1^T,x_i,x_j]^T$ 是 Σ 的 T—不变量，则 $X=[x_1^T,x_i,x_j]^T$ 是 Σ_4' 的 T—不变量；

(ii)$X=[X_1^T,x_i,x_j]^T$ 是 Σ 的 T—不变量的充要条件是 $X'=[w_1X_1^T,w_1x_i,w_1x_j]^T$ 是 Σ'_3 的 T—不变量.

推论 2.2(c). 若 P/T 网 Σ 经 $PR_q(q=1,2,3,4)$ 运算化简为 $\Sigma_q'(q=1,2,3,4)$，且$\frac{w_1}{w_2}=\frac{w_3}{w_4}$，则

(i)$X=[X_1^T,x_i,x_j]^T$ 是 Σ 的 T—不变量的充要条件是 $X=[X_1^T,x_i,x_j]^T$ 是 $\Sigma_q'(q=3,4)$ 的 T—不变量；

(ii)$X=[X_1^T,x_h,x_l]^T$ 是 Σ 的 T—不变量的充要条件是 $X'=[w_1X_1^T,w_1x_h-w_3x_l]^T$ 是 $\Sigma'_q(q=1,2)$ 的 T—不变量.

定理 2.3. 若 P/T 网 Σ 经 PR_3 运算化为 Σ_3'，则 Σ 是弱公平网的充要条件是 Σ_3' 是弱公平网.

推论 2.3. 若 P/T 网 Σ 经 PR_3 运算化为 Σ_3'，如果 Σ 是结构有界的，则 Σ 是公平网的充要条件是 Σ_3' 是公平网.

3 分叉弧化简运算

定义 3.1. 在 P/T 网 Σ 中，若$\exists$ $s_i,s_j,s_k,s_l\in S$，使得${}^\circ s_k=\{s_i,s_j\}$，$s_k{}^\circ=\{s_l\}$，且记弧(s_i,s_k)，

(s_j,s_k)，(s_k,s_l)的权分别是(w_1,w_2)，(w_3,w_4)，(w_5,w_6). 则将它们化简为 2 条弧(s_{ik},s_{kl})，(s_{jk},s_{kl})，且权分别为(w_1w_5,w_2w_6)和(w_3w_5,w_4w_6)，称此运算为第 1 类分叉弧化简运算，记作$YVR_1(s_i,s_j,s_k,s_l)$，如图 3(a)所示.

定义 3.2. 在 P/T 网 Σ 中，若$\exists\ s_i,s_j,s_k,s_l\in S$，使得$^\circ s_k=\{s_l\}$，$s_k{}^\circ=\{s_i,s_j\}$，且记弧$(s_l,s_k)$，$(s_k,s_i)$，$(s_k,s_j)$的权分别是$(w_5,w_6)$，$(w_1,w_2)$，$(w_3,w_4)$，则将它们化简为两条弧$(s_{lk},s_{ki})$，$(s_{lk},s_{kj})$，且权分别记为$(w_1w_5,w_2w_6)$和$(w_3w_5,w_4w_6)$. 称此运算为第 2 类分叉弧化简运算，记作$YVR_2(s_i,s_j,s_k,s_l)$，如图 3(b)所示.

定义 3.3. 在 P/T 网 Σ 中，若$\exists\ t_i,t_j,t_k,t_l\in T$，使得$^\circ t_k=\{t_i,t_j\}$，$t_k{}^\circ=\{t_l\}$，且记弧$(t_i,t_k)$，$(t_j,t_k)$，$(t_k,t_l)$的权分别是$(w_1,w_2)$，$(w_3,w_4)$，$(w_5,w_6)$. 则将它们化简为两条弧$(t_{ik},t_{kl})$，$(t_{jk},t_{kl})$，且权分别化为$(w_1w_5,w_2w_6)$和$(w_3w_5,w_4w_6)$. 称此运算为第 3 类分叉弧化简运算，记为$YVR_3(t_i,t_j,t_k,t_l)$，如图 3(c)所示.

定义 3.4. 在 P/T 网 Σ 中，若$\exists\ t_i,t_j,t_k,t_l\in T$，使得$^\circ t_k=\{t_l\}$，$t_k{}^\circ=\{t_i,t_j\}$，且记弧$(t_l,t_k)$，$(t_k,t_i)$，$(t_k,t_j)$的权分别是$(w_5,w_6)$，$(w_1,w_2)$，$(w_3,w_4)$. 则将它们化简为 2 条弧$(t_{lk},t_{ki})$，$(t_{lk},t_{kj})$，且权分别化为$(w_1w_5,w_2w_6)$和$(w_3w_5,w_4w_6)$. 称此运算为第 4 类分叉弧化简运算，记为$YVR_4(t_i,t_j,t_k,t_l)$，如图 3(d)所示.

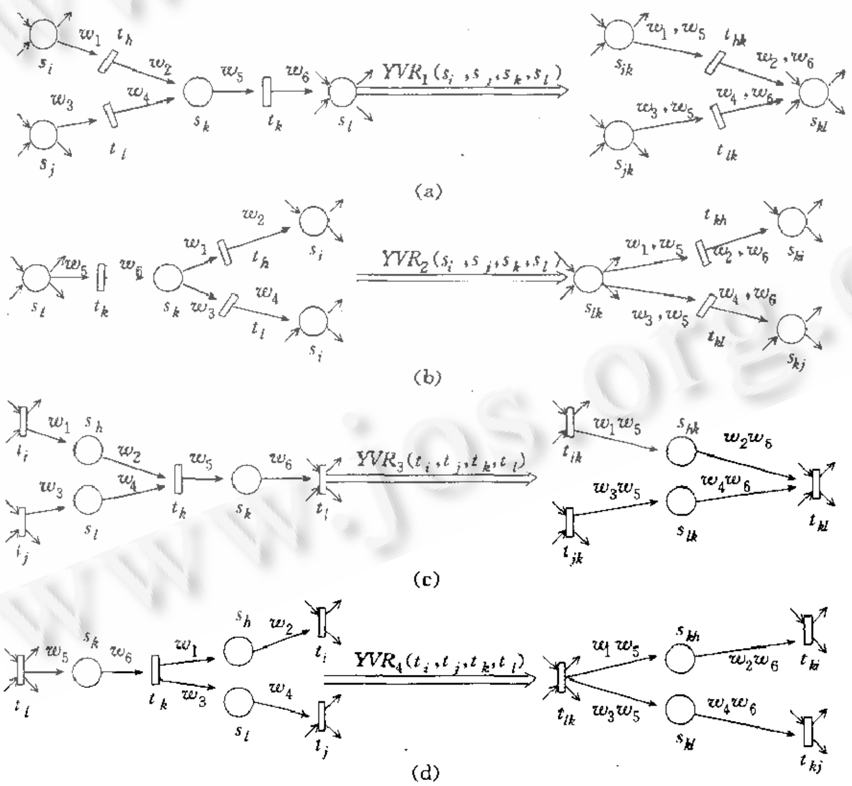


图3

同理可以推得如下结论.

定理 3.1. 若 P/T 网 Σ 经 YVR_q 运算$(q=1,2,3,4)$化简为 $\Sigma_q'(q=1,2,3,4)$，则 Σ 结构有界的充要条件是 $\Sigma_q'(q=1,2,3,4)$结构有界.

推论 3.1(a). 若P/T网Σ经YVR_q运算化简为Σ_q'($q=1,2,3,4$),则Σ守恒的充要条件是Σ_q'守恒.

推论 3.1(b). 若P/T网Σ经YVR_q运算化简为Σ_q'($q=1,2,3,4$),则

(i)$Y=[Y_1^T,y_i,y_j,y_k,y_l]^T$是$\Sigma$的$S$—不变量的充要条件是$Y'=[Y_1^T,y_i,y_j,y_l]^T$是$\Sigma_1'$的$S$—不变量且$w_5y_k=w_6y_l$;

(ii)$Y=[Y_1^T,y_k,y_h,y_l]^T$是Σ的S—不变量的充要条件是$Y'=[Y_1^T,y_h,y_l]^T$是Σ_4'的S—不变量且$w_1y_h+w_3y_l=w_6y_k$;

(iii)$Y=[Y_1^T,y_h,y_l,y_k]^T$是Σ的S—不变量的充要条件是$Y'=[Y_1^T,y_h,y_l]^T$是Σ_3'的S—不变量且$w_2y_h+w_4y_l=w_5y_k$;

(iv)$Y=[Y_1^T,y_l,y_k,y_i,y_j]^T$是$\Sigma$的$S$—不变量的充要条件是$Y'=[Y_1^T,y_l,y_i,y_j]^T$是$\Sigma_2'$的$S$—不变量且$w_1w_3w_5y_l=w_1w_3w_6y_k=w_2w_3w_6y_i=w_1w_4w_6y_j$.

定理 3.2. 若P/T网Σ经YVR_q运算化简为Σ_q',则Σ可重复的充要条件是Σ_q'可重复($q=1,2,3,4$).

推论 3.2(a). 若P/T网Σ经YVR_q运算化简为Σ_q',则Σ相容的充要条件是Σ_q'相容($q=1,2,3,4$).

推论 3.2(b). 若P/T网Σ经YVR_q运算化简为Σ_q'($q=1,2,3,4$),则有

(i)$X=[w_5X_1^T,w_5x_h,w_5x_l,w_5x_k]^T$是$\Sigma$的$T$—不变量的充要条件是$X'=[X_1^T,x_h,x_l]^T$是$\Sigma_1'$的$T$—不变量且$w_2x_h+w_4x_l=w_5x_k$;

(ii)$X=[X_1^T,x_i,x_j,x_k,x_l]^T$是$\Sigma$的$T$—不变量的充要条件是$X'=[X_1^T,x_i,x_j,x_l]^T$是$\Sigma_3'$的$T$—不变量且$w_5x_k=w_6x_l$;

(iii)$X=[w_6X_1^T,w_6x_k,w_6x_h,w_6x_l]^T$是$\Sigma$的$T$—不变量的充要条件是$X'=[X_1^T,x_h,x_l]^T$是$\Sigma_2'$的$T$—不变量且$w_1x_h+w_3x_l=w_6x_k$;

(iv)$X=[X_1^T,x_l,x_k,x_i,x_j]^T$是$\Sigma$的$T$—不变量的充要条件是$X'=[X_1^T,x_l,x_i,x_j]^T$是$\Sigma_4'$的$T$—不变量且$w_1w_3w_5x_l=w_1w_3w_6x_k=w_2w_3w_6x_i=w_1w_4w_6x_j$.

定理 3.3. 若P/T网Σ经YVR_q运算化简为Σ_q',则Σ是弱公平网的充要条件是Σ_q'是弱公平网($q=1,2,3,4$).

推论 3.3. 若P/T网Σ经YVR_q运算化简为Σ_q',若Σ结构有界,则Σ是公平网的充要条件是Σ_q'是公平网($q=1,2,3,4$).

4 回路化简运算

定义 4.1. 在P/T网Σ中,回路由(s_i,t_h,s_j,t_l,s_i)组成且$s_i^{\cdot}=\{t_h\}$,$t_h^{\cdot}=\{s_j\}$,$s_j^{\cdot}=\{t_l\}$,$t_l^{\cdot}=\{s_i\}$,记(s_i,s_j),(s_j,s_i)弧的权分别为(w_1,w_2),(w_3,w_4),将2条弧(s_i,s_j),(s_j,s_i)合并为一条弧(s_{ij},s_{ij}),且权为(w_1w_3,w_2w_4). 称此运算为第1类回路化简运算,记为$CR_1(s_i,t_h,s_j,t_l,s_i)$,如图4(a)所示.

定义 4.2. 在P/T网Σ中,回路由(t_i,s_h,t_j,s_l,t_i)组成,且$t_i^{\cdot}=\{s_h\}$,$s_h^{\cdot}=\{t_j\}$,$t_j^{\cdot}=\{s_l\}$,$s_l^{\cdot}=\{t_i\}$,记(t_i,t_j),(t_j,t_i)弧的权分别为(w_1,w_2),(w_3,w_4),将2条弧(t_i,t_j),(t_j,t_i)合并为一条弧(t_{ij},t_{ij}),且权为(w_1w_3,w_2w_4)称此运算为第2类回路化简运算,记作$CR_2(t_i,s_h,t_j,s_l,t_i)$,

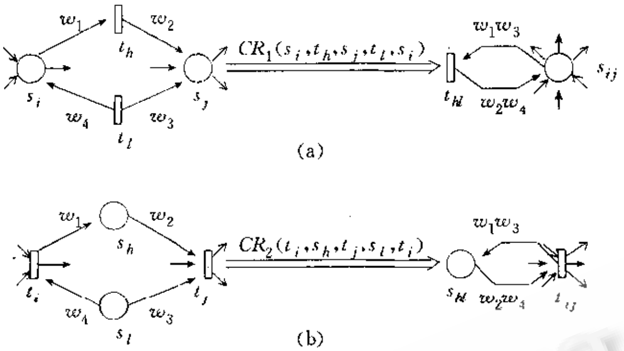


图4

如图 4(b)所示.

同理可推得以下结论.

定理 4.1. 设 P/T 网 Σ 经 CR_1 运算化简为 Σ_1'，若 Σ 的关联矩阵为 $A=\begin{bmatrix} A_1 & a_i & a_j \\ 0 & -w_1 & w_2 \\ 0 & w_4 & -w_3 \end{bmatrix}$，$\exists\ Y=[Y_1^T,y_i,y_j]^T>0$，使得 $Ay\leqslant 0$，则 Σ_1' 结构有界的充分条件是

$$a_i(y_j-1)y_i+a_j(y_i-1)y_j\leqslant 0.$$

定理 4.2. 设 P/T 网 Σ 经 CR_1 运算化简为 Σ_1'，若 Σ_1' 的关联矩阵 $A'=\begin{bmatrix} A_1 & a_i+a_j \\ 0 & w_2w_4-w_1w_3 \end{bmatrix}$，$\exists\ Y'=[Y_1^T,y]^T>0$，使 $A'Y'\leqslant 0$，则 Σ 结构有界的充分条件是

$$a_i(w_3-1)y+a_j(w_4-1)y\leqslant 0.$$

定理 4.3. 设 P/T 网 Σ 经 CR_2 运算化简为 Σ_2'，若 Σ 的关联矩阵 A 的转置 $A^T=\begin{bmatrix} A_1^T & a_i^T & a_j^T \\ 0 & w_1 & -w_2 \\ 0 & -w_4 & w_3 \end{bmatrix}$，$\exists\ X=[X_1^T,x_i,x_j]^T>0$，使得 $A^TX\geqslant 0$，则 Σ_2' 可重复的充分条件是

$$a_i^T(x_j-1)x_i+a_j^T(x_i-1)x_j\geqslant 0$$

定理 4.4. 设 P/T 网 Σ 经 CR_2 运算化简为 Σ_2'，若 Σ_2' 的关联矩阵 A' 的转置 $A'^T=\begin{bmatrix} A_1^T & a_i^T+a_j^T \\ 0 & w_1w_2-w_2w_4 \end{bmatrix}$，$\exists\ X'=[X_1^T,x]^T>0$，使得 $A'^TX'\geqslant 0$，则 Σ 可重复的充分条件是

$$a_i^T(w_3-1)x+a_j^T(w_4-1)x\geqslant 0$$

定理 4.5. 设 P/T 网 Σ 经 CR_1 运算化简为 Σ_1'，若 Σ 的关联矩阵 A 的转置 $A^T=\begin{bmatrix} A_1^T & 0 & 0 \\ a_i^T & -w_1 & w_4 \\ a_j^T & w_2 & -w_3 \end{bmatrix}$，$\exists\ X=[X_1^T,x_h,x_l]^T>0$，使得 $A^TX\geqslant 0$，则 Σ_1' 可重复的充分条件是

$$(w_2w_4-w_1w_3)x_hx_l-(w_2-w_1)x_h-(w_4-w_3)x_l\geqslant 0$$

定理 4.6. 设 P/T 网 Σ 经 CR_1 运算化简为 Σ_1'，若 Σ_1' 的关联矩阵 A' 的转置 $A'^T=\begin{bmatrix} A_1^T & 0 \\ a_i^T+a_j^T & w_2w_4-w_1w_3 \end{bmatrix}$，$\exists\ X'=[X_1^T,x]^T>0$，使得 $A'^TX'\geqslant 0$，则 Σ 可重复的充分条件是

$$\begin{cases} a_i^T X_1 + (w_2w_4 - w_1w_3)x \geqslant 0 \\ a_j^T X_1 \geqslant 0 \end{cases} \quad \left(\text{或} \begin{cases} a_i^T X_1 \geqslant 0 \\ a_j^T X_1 + (w_2w_4 - w_1w_3)x \geqslant 0 \end{cases}\right).$$

定理 4.7. 设 P/T 网 Σ 经 CR_2 运算化简为 Σ_2'，若 Σ 的关联矩阵 $A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ a_i & w_1 & -w_4 \\ a_j & -w_2 & w_3 \end{bmatrix}$，$\exists\ Y = [Y_1^T, y_h, y_l]^T > 0$，使得 $AY \leqslant 0$，则 Σ_2' 结构有界的充分条件是

$$(w_1w_3 - w_2w_4)y_hy_l - (w_1 - w_2)y_h - (w_3 - w_4)y_l \leqslant 0$$

定理 4.8. 设 P/T 网 Σ 经 CR_2 运算化简为 Σ_2'，若 Σ_2' 的关联矩阵 $A' = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ a_i + a_j & w_1w_3 - w_2w_4 \end{bmatrix}$，$\exists\ Y' = [Y_1^T, y] > 0$，使得 $A'Y' \leqslant 0$，则 Σ 结构有界的充分条件是

$$\begin{cases} a_iY_1 + (w_1w_3 - w_2w_4)y \leqslant 0 \\ a_jY_1 \leqslant 0 \end{cases} \quad \left(\text{或} \begin{cases} a_iY_1 \leqslant 0 \\ a_jY_1 + (w_1w_3 - w_2w_4)y \leqslant 0 \end{cases}\right).$$

定理 4.9. 设 P/T 网 Σ 经 CR_2 运算化简为 Σ_2'，若 Σ 的关联矩阵 A 的转置 $A^T = \begin{bmatrix} A_1^T & a_i^T & a_j^T \\ 0 & w_1 & -w_2 \\ 0 & -w_4 & w_3 \end{bmatrix}$，$\exists\ X = [X_1^T, x_i, x_j]^T \geqslant 0 \wedge A^TX \geqslant 0 \rightarrow X > 0$，则 Σ_2' 为弱公平网的充分条件是

$$\begin{cases} a_i^T(x_j - 1)x_i + a_j^T(x_i - 1)x_j \geqslant 0 \\ w_1 \geqslant w_2, w_3 \geqslant w_4 \end{cases}$$

定理 4.10. 设 P/T 网 Σ 经 CR_1 运算化简为 Σ_1'，Σ_1' 有两个以上变迁，若 Σ 可重复，Σ_1' 也可重复，则 Σ_1' 不是公平网.

推论 4.1. 设 P/T 网 Σ 经 CR_1 运算化简为 Σ_1'，若 $Y = [Y_1^T, y_i, y_j]^T$ 是 Σ 的 S—不变量，则 $Y' = [Y_1^T, y_iy_j]^T$ 是 Σ_1' 的 S—不变量的充分条件是 $a_i(y_j - 1)y_i + a_j(y_i - 1)y_j = 0$.

推论 4.2. 设 P/T 网 Σ 经 CR_1 运算化简为 Σ_1'，若 $Y' = [Y_1^T, y]^T$ 是 Σ_1' 的 S—不变量，则 $Y = [Y_1^T, w_3y, w_4y]^T$ 是 Σ 的 S—不变量的充分条件是 $a_i(w_3 - 1)y + a_j(w_4 - 1)y = 0$.

推论 4.3. 设 P/T 网 Σ 经 CR_2 运算化简为 Σ_2'，若 $X = [X_1^T, x_i, x_j]^T$ 是 Σ 的 T—不变量，则 $X' = [X_1^T, x_ix_j]^T$ 是 Σ_2' 的 T—不变量的充分条件是 $a_i^T(x_j - 1)x_i + a_j^T(x_i - 1)x_j = 0$.

推论 4.4. 设 P/T 网 Σ 经 CR_2 运算化简为 Σ_2'，若 $X' = [X_1^T, x]^T$ 是 Σ_2' 的 T—不变量，则 $X = [X_1^T, w_3x, w_4x]^T$ 是 Σ 的 T—不变量的充分条件是 $a_i^T(w_3 - 1)x + a_j^T(w_4 - 1)x = 0$.

推论 4.5. 设 P/T 网 Σ 经 CR_1 运算化简为 Σ_1'，若 $X = [X_1^T, x_h, x_l]^T$ 是 Σ 的 T—不变量，则 $X' = [X_1^T, x_hx_l]^T$ 是 Σ_1' 的 T—不变量的充分条件是 $(w_2w_4 - w_1w_3)x_hx_l - (w_2 - w_1)x_h - (w_4 - w_3)x_l = 0$.

推论 4.6. 设 P/T 网 Σ 经 CR_1 运算化简为 Σ_1'，若 $X' = [X_1^T, x]^T$ 是 Σ_1' 的 T—不变量，则 $X = [X_1^T, w_3x, w_2x]^T$（$[X_1^T, w_4x, w_1x]^T$）是 Σ 的 T—不变量的充分条件是

$$\begin{cases} a_i^T X_1 + (w_2w_4 - w_1w_3)x = 0 \\ a_j^T X_1 = 0 \end{cases} \quad \left(\text{或} \begin{cases} a_i^T X_1 = 0 \\ a_j^T X_1 + (w_2w_4 - w_1w_3)x = 0 \end{cases}\right).$$

推论 4.7. 设 P/T 网 Σ 经 CR_2 运算化简为 Σ_2'，若 $Y = [Y_1^T, y_h, y_l]^T$ 是 Σ 的 S—不变量，

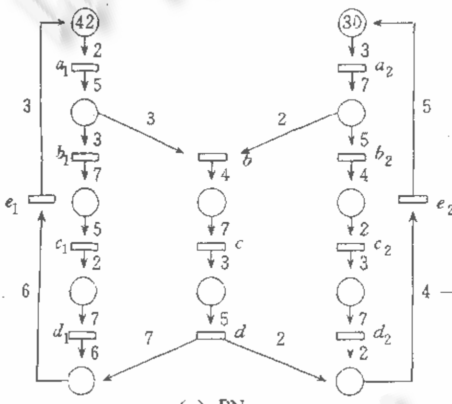
则 $Y'=[Y_1^T, y_h y_l]^T$ 是 Σ_2' 的 S—不变量的充分条件是 $(w_1w_3-w_2w_4)y_hy_l-(w_1-w_2)y_h-(w_3-w_4)y_l=0$.

推论 4.8. 设 P/T 网 Σ 经 CR_2 运算化简为 Σ_2'，若 $Y'=[Y_1^T, y]^T$ 是 Σ_2' 的 S—不变量，则 $Y=[Y_1^T, w_3y, w_2y]^T$（$[Y_1^T, w_4y, w_1y]^T$）是 Σ 的 S—不变量的充分条件是

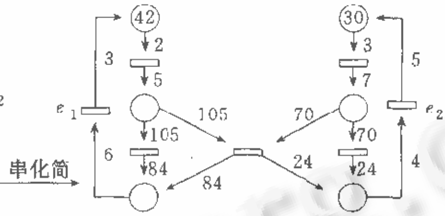
$$\begin{cases} a_iY_1+(w_1w_3-w_2w_4)y=0 \\ a_jY_1=0 \end{cases} \quad \left(\text{或} \begin{cases} a_iY_1=0 \\ a_jY_1+(w_1w_3-w_2w_4)y=0 \end{cases}\right).$$

5 应用举例

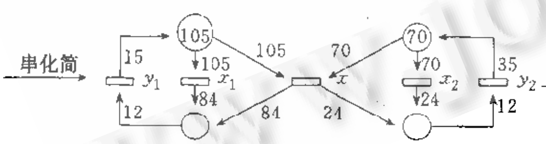
例如，有 1 个机械臂移物系统，包括 2 个机械臂、一堆大物件和一堆小物件. 2 个机械臂要将这堆大物件和小物件移至另一处，移大物件时要求两机械臂协同工作，且每次仅能移动 1 件，移小物件时 2 个机械臂可以独立工作，且每个机械臂每次可移动两件. 现建立该系统的 P/T 网模型如图 5(a)所示，其化简过程如图 5(b)，(c)，(d)所示**. 其中 a_i 表示机械臂 i 移至物件处；b_i 表示机械臂 i 抓小物件；c_i 表示机械臂 i 移动小物件；d_i 表示机械臂 i 放下小物件；e_i 表示机械臂 i 返回原处($i=1,2$)；b 表示两机械臂协同抓大物件；c 表示两机械臂协同移动大物件；d 表示两机械臂协同放下大物件.



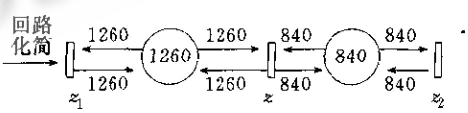
(a) PN_1



(b) PN_2



(c) PN_3



(d) PN_4

图5

显然 PN_4 是守恒的和相容的，由前面的结果可知 PN_1 也是守恒的和相容的，这说明整个操作过程物件数量不变及周期性的稳定执行.

参考文献

1 Murata T. Synthesis of deision-free concurrent systems prescribed resources and performance. IEEE Trans. Soft.

** 关于加权 P/T 网的标识化简将另行讨论.

Eng., 1980, SE-6(6): 525~530.
2 Murata T, Koh J Y. Reduction and expansion of live and safe marked graphs. IEEE Trans. Circuit Syst., 1980, CAS-27: 68~70.
3 蒋昌俊. 加权T-图的几种化简运算. 通讯学报, 1994, 15(2): 97~102.
4 Berthelot G. Transformations and decompositions of nets. LNCS, New York, Springer-Verlag, 1986.
5 Lipton R J. Reduction: a method of proving properties of parallel programs. J. ACM, 1981, 3: 561~567.
6 Lee K H, Favrel J. Hierarchical reduction method for analysis and decomposition of Petri nets. IEEE Trans. Syst. Man. Cybem., 1985, SMC-15: 272~280.
7 吴哲辉. 有界Petri网的活性与公平性的分析与实现. 计算机学报, 1989, 12(4): 267~278.
8 王培良, 吴哲辉. Petri网弱公平性的判断. 计算机学报, 1994, 17(8): 608~611.

THE REDUCTION OPERATIONS AND THEIR PROPERTIES FOR P/T NETS

XU Anguo JIANG Changjun

(Department of Applied Mathematics and Software Engineering Institute of Shandong Mining and Technology Tai'an 271019)

Abstract In this paper, some reduction operations for P/T nets are proposed, and it is shown that these operations preserve the structural properties of P/T nets. These results provide an important way for synthesis and analysis of P/T nets.

Key words P/T net, reduction operation, structural property.

Class number TP301