基于 Rough 集的 Rough 数及 λ 算子的逻辑价值*

刘 清　王黔英

(南昌大学计算机科学工程系　数学与系统科学系　南昌　330029)

摘要　本文在介绍 Rough 集基础上，提出了基于 Rough 集理论的 Rough 数概念及其运算法则. 并给出了这种 Rough 数应用实例及其近似程度算子 λ 在 Rough 逻辑中的理论价值.

关键词　Rough 集，Rough 数，Rough 逻辑，近似算子.

Rough 集理论[1]是 80 年代初波兰华沙大学 Z. Pawlak 教授经等价关系引入的. 近 10 年来，这一理论已被广泛地应用于知识库中知识分类和处理不完全信息. 特别是近年来国际上不少理论计算机科学家试图通过这一理论使单调逻辑非单调化和连续函数离散化.

Rough 集理论提出的意义在于它是一种基于主动者以不完全信息的知识去处理一些含糊现象的能力. 如从观察到的现象或度量到某些不精确的结果而进行分类数据. 不少逻辑学家和理论计算机科学家试图通过 Rough 集理论而建立 Rough 逻辑. 如 Rough 集理论的倡导者 Pawlak 于 1987 年发表了题为"Rough Logic"的论文[2]，他在这篇文章中给出了其逻辑公式的语义解释：真(True)、假(False)、Roughly 真、Roughly 假和 Roughly 非一致. 这实际上是与文献[3]中带 $\lambda\in[0,1]$算子的 Fuzzy 逻辑公式 λW 似乎相似，其中 W 是一阶逻辑公式. 虽则这 5 种值被看成是不同的近似程度，但它们毕竟都没给出确切的数学描述. 在 Lin 和 Liu[4]的文章中，基于拓扑学观念定义了 2 个算子 L 和 H，它们被分别称为 Rough 下和 Rough 上近似算子. 由于这 2 个算子的语法性质分别与模态逻辑中的必然算子□和可能算子◇十分相似，因而带 L 和 H 算子的逻辑公式被称之为 Rough 逻辑公式，并且建立了与模态逻辑相似的公理化 Rough 集的逻辑演绎系统和相平行的演绎规则，但在语义上，文献[4]中定义的一阶 Rough 逻辑，就 L 和 H 而言是含糊的，无法从数学上给出解释. 但文献[4]毕竟指出了研究"Approximate proof"的方向，亦即必须给出 L 和 H 的数学意义，这样才能使得由 L 和 H 构成的逻辑公式也有相应的数学意义. 本文将基于 Rough 集理论定义近似度 λ_* 和 λ^*，它和专业领域中的不精确数或经验数一起组成 Rough 数. 接着本文讨论了 $\lambda\in[\lambda_*,\lambda^*]$在逻辑公式解释上的价值.

---

* 本文研究得到国家自然科学基金资助. 作者刘清，1938 年生，教授，主要研究领域为人工智能及其应用. 王黔英，1942 年生，副教授，主要研究领域为管理信息系统.

本文通讯联系人：刘清，南昌 330029，南昌大学计算机科学工程系

本文 1995－11－27 收到修改稿

1 Rough 集

1.1 Rough 集概念

设 U 是个体域,R 是 U 上的等价关系,按如此的 R 可将 U 分解成若干互不相交的等价类,称此为 R—基本集,对于所有那些被包含在 U 上的子集 X 中的 R—基本集的并,定义为 X 的下近似集,简称 Rough 下近似;而对所有那些与 X 的交非空的 R—基本集的并,被称作 X 的上近似集,简称 Rough 上近似. 形式地定义如下:

定义 1. 设 U 是个体域,R 是 U 上的等价关系,对于 U 上任意子集 X,如果

$$R_*(X)=\bigcup_{[x]_R\subseteq X}[x]_R=\{y\mid y\in[x]_R\wedge[x]_R\subseteq X\}$$

和

$$R^*(X)=\bigcup_{[x]_R\cap X=\sim\Phi}[x]_R=\{y\mid\in[x]_R\wedge[x]_R\cap X=\sim\Phi\}$$

其中 $[x]_R$ 是 U 上按 R 划分的等价类,Φ 是空集. 称 $R_*(X)$ 和 $R^*(X)$ 分别是 U 上 X 的 Rough 下近似和 Rough 上近似. 前者是 U 上包含于 X 中的最大可定义集,后者是 U 上包含 X 的最小可定义集,称如此的对 $(R_*(X),R^*(X))$ 为 Rough 集,如图 1 所示.

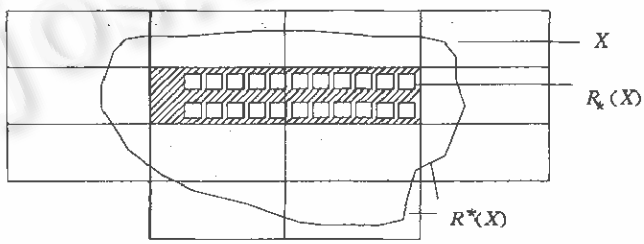

图1 Rough集示意图

例: $U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$,$R$ 是 U 上的等价关系,$U/R=\{E_1,E_2,E_3,E_4\}$,其中 $E_1=\{x_1,x_4,x_8\}$,$E_2=\{x_2,x_5,x_7\}$,$E_3=\{x_3\}$,$E_4=\{x_6\}$. 子集 $X_1=\{x_1,x_4,x_7\}$,$X_2=\{x_2,x_8\}$,则 $R_*(X_1)=\Phi$,$R_*(X_2)=\Phi$,$R^*(X_1)=E_1\cup E_2$,$R^*(X_2)=E_1\cup E_2$,$R_*(X_1\cup X_2)=E_1$,$R^*(X_1\cup X_2)=E_1\cup E_2$.

1.2 Rough 集的性质

我们直接从定义或根据集合论理论可以证明如下 Rough 集的性质:

(1)$R_*(X)\subseteq X\subseteq R^*(X)$;

(2)$R_*(\Phi)=R^*(\Phi)=\Phi$;$R_*(U)=R^*(U)=U$;

(3)$R^*(X\cup Y)=R^*(X)\cup R^*(Y)$;

(4)$R_*(X\cap Y)=R_*(X)\cap R_*(Y)$;

(5)如果 $X\subseteq Y$,则 $R_*(X)\subseteq R_*(X)$;

(6)如果 $X\subseteq Y$,则 $R^*(X)\subseteq R^*(Y)$;

(7)$R_*(X\cup Y)\supseteq R_*(X)\cup R_*(Y)$;

(8)$R^*(X\cap Y)\subseteq R^*(X)\cap R^*(Y)$;

(9)$R_*(\sim X)=\sim R^*(X)$;

(10)$R^*(\sim X)=\sim R_*(X)$;

(11)$R_*(R_*(X))=R^*(R_*(X))=R_*(X)$;

(12)$R^*(R^*(X))=R_*(R^*(X))=R^*(x)$.

其中 X 和 Y 是 U 上的任意子集,$\sim X=U-X$ 被称作 X 关于 U 的补集.

2　Rough 数及其应用实例

在 T. Wu[5]的文章中,定义的 Rough 数是由误差理论产生的近似值,即用闭—开区间

$$[i+(k-1)/2^n, i+k/2^n)$$

来定义的,称其为 Rough 数.这实际上是误差理论中的模型数算术,其中 i 是整数部分,k 是 $[0,2^n-1)$ 上的整数.显然,它不是 Z. Pawlak 提出的 Rough 集理论产生的 Rough 数.为此,本文将依据 Rough 集理论定义 Rough 数.

定义 2. 设 U 是所论述的个体域,X 是 U 上的任意子集,R 是 U 上的等价关系,则称

$$\lambda_*=K(R_*(X))/K(U) \qquad 和 \qquad \lambda^*=K(R^*(X))/K(U)$$

分别为 X 在 U 上的 Rough 下和上近似度,其中 $K(A)$ 表示集 A 的基数或测度.根据 Rough 集的性质,显然 λ_* 和 λ^* 都取 $[0,1]$ 上的值(注:在实际应用中,由于现代计算机只处理有穷现象,因而 A 被限定为有穷的).当 $R_*(X)(R^*(X))$ 和 U 同为无穷可数时,则其比值被假定为 1;仅当 U 无穷时,则其比值被假定为 0.称 $\lambda_0=(\lambda_*+\lambda^*)/2$ 为 $X\subseteq U$ 在 U 上的 Rough 平均近似度.

定义 3. 设 λ_0 是 X 在 U 上的 Rough 平均近似度,α 是某专业领域中的经验值,或在近似推理中依据某种理论得到的不精确值,则称 $[(1-\lambda_0)\alpha,(1+\lambda_0)\alpha]$ 为 Rough 数.其中 α 与专业领域有关,即不同的专业领域,其值也不同;即使同一专业领域,不同专家或引用不同理论,其值也不尽同.但经上述定义的 Rough 数,它依赖于 U 上的等价关系,这实际上可使来自近似推理中的不精确值或用户和专家的经验值再次做求精运算,如此得到 *Rough* 近似数,更符合问题的现实背景.

Rough 数是一区间值,它可望应用于实数集,使连续数学离散化,也可望用于基于 Rough 集的逻辑,赋予这种逻辑公式的语义解释,使之单调逻辑非单调化,从而达到近似推理之目的.下面给出这种 Rough 数在医疗诊断系统中的应用实例.

例:设 $SS=\langle P,S,V,f\rangle$ 表示一中医诊疗专家系统,其中:

$P=\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$ 是病人的集合;

$S=\{s_1,s_2,\cdots,s_m\}$ 是症状的集合;

$V=\{\langle s_1$:症状实体 1,$[(1-\lambda_0)\alpha_1,(1+\lambda_0)\alpha_1]\rangle$,

　　$\langle s_2$:症状实体 2,$[(1-\lambda_0)\alpha_2,(1+\lambda_0)\alpha_2]\rangle,\cdots$,

　　$\langle s_i$:症状实体 i,$[(1-\lambda_0)\alpha_i,(1+\lambda_0)\alpha_i]\rangle,\cdots$,

　　$\langle s_m$:症状实体 m,$[(1-\lambda_0)\alpha_m,(1+\lambda_0)\alpha_m]\rangle\}$.

其中症状实体 i 是某种病证表现出来的第 i 种症状.如体烧是一症状,它关于某种病证表现出来的可信度,用 α_i 表示,被认为是一经验值.对专家系统而言,不同的专家显然给出的经验值不一样,所以 α_i 是不精确值.它被 λ_0 作用后,使得不同来源的不精确值 α 能在关系 R 的基础上统一起来,使之更符合于实际.如果 R 被定义为症状集 S 上的等价关系,则意味着同一病证表现出来的症状,其中任何 2 症状随同它们带的经验值 α 有 R 关系.于是在不同的病证中,虽然出现相同症状,但随带的经验值 α 不一样,则不认为它们是相同的.如症状 S_i 出现在病证 B_1 和 B_2 中,但它在 B_1 中随带的是 α_{i1},而在 B_2 中,随带的是 α_{i2},且 $\alpha_{i1}\neq\alpha_{i2}$,故认

为 $S_i(\alpha_{i1}) \sim R\ S_i(\alpha_{i2})$，即 $S_i(\alpha_{i1})$和 $S_i(\alpha_{i2})$之间没有 R 关系. 根据辨证施治理论，每种病证又可分成若干病型. 因此，按病型分类，S 又可被重新划分成若干子集 $T_{kl}=\{S_{kl1},S_{kl2},\cdots,S_{kli}\}\subseteq S$，$k=1,\cdots,n_1$，$l=1,\cdots,n_2$，此处 n_1 是某系统的病证数目，n_2 是病型数目.

f 是一映射，它将患者集 P 和病证或病型集，比方说病型集 $T=\{T_{kl}\}$映射到 V，即 $f:P\times T_{kl}\to V$.

如果患者 P_r 出现症状 S_{klr}，则可用该函数描述其表现程度 $f(P_r,S_{klr})=\{\alpha_{klr}\}$. 它为一 Rough 数，即区间值$[(1-\lambda_0)\alpha_{klr},(1+\lambda_0)\alpha_{klr}]$. 这个系统的工作原理：医生通过望、闻、问和切[6]，从患者那里采集临床数据，然后系统根据输入的临床数据 S_{klr}判断上述函数值是否落入$[(1-\lambda_0)\alpha_{klr},(1+\lambda_0)\alpha_{klr}]$区间. 若如此，则确认患者 P_r 有此症状，S_{klr}全部临床数据被验证完后，即可得出诊断结论. 用这种 Rough 数理论，开发的《计算机辅助针灸诊疗专家系统》有颇高的诊疗效率.

3 Rough 数的运算

对任意 2 个 Rough 数 x 和 y，它们都表示 2 个区间值，因此对 x 和 y 的运算实质上是 2 个区间运算. 关于区间的加、减、乘和除运算有如下定义.

定义 4. 设 $x\in[a_1,b_1]$和 $y\in[a_2,b_2]$，则

(1)加法：$x+y\in[[a_1,b_1]+[a_2,b_2]]=[a_1+a_2,b_1+b_2]$；

(2)减法：$x-y\in[[a_1,b_1]-[a_2,b_2]]=[a_1-b_2,b_1-a_2]$；

(3)乘法：$x*y\in[\min\{a_1a_2,a_1b_2,b_1a_2,b_1b_2\},\max\{a_1a_2,a_1b_2,b_1a_2,b_1b_2\}]$；

(4)除法：如果 $0\sim\in[a_2,b_2]$，则 $1/y\in[1/b_2,1/a_2]$以及 $x/y\in[\min\{a_1/b_2,a_1/a_2,b_1/b_2,b_1/a_2\},\max\{a_1/b_2,b_1/b_2,a_1/a_2,b_1/a_2\}]$.

这种区间运算是应用数学发展的一个新分支，早在 1966 年，R. E. Moore 就证明了区间运算的一个重要定理，称区间计算的基本定理. 其主要思想：设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是一具有 n 个变元的有理函数，考虑用给定的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$计算 f. 于是，我们用对应的区间 X_i 去替换 x_i，$i=1,2,\cdots,n$，其结果将是一个区间 $f(X_1,X_2,\cdots,X_n)$. 对每个 x_i，这个区间 $f(X_1,\ldots,X_n)$都包含了 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的值. 现举例进一步说明此定理的应用.

例：考虑一个变量的函数 $f(x)=x(x^2-3)$，假设我们用区间$[-3,4]$表示变量 X，并用其替换函数中的 x，则得

$$f(X)=X*(X*X-3)=[-3,4]*([-3,4]*[-3,4]-3)$$

因为 $X^2\geqslant 0$，所以$[-3,4]*[-3,4]=[0,16]$. 常数 3 被认为区间退化成一个点，所以有$[0,16]-3=[-3,13]$. $f(X)=[-3,4]*[-3,13]=[-39,52]$. 所以，对任意 $x\in[-3,4]$，区间计算的基本定理都能保证 $f(x)\in[-39,52]$.

4 近似算子 $\lambda\in[\lambda_*,\lambda^*]$提供了 Rough 逻辑公式真值的语义解释

设$[\lambda_*,\lambda^*]$是 Rough 近似程度算子集，如果一阶逻辑公式 W 为真，则 $\lambda W=\lambda$(其中 $\lambda\in[\lambda_*,\lambda^*]$为一区间值)为 Roughly 真，即取真的程度. 事实上，λ 依赖于所论述的个体域 U 上的二元关系 R. $R_*(X)$(其中 $X\subseteq U$)上的个体必然满足关系 R，所以直观上讲，$K(R.$

$(X))/K(U)$ 或 $K(R^{*}(X))/K(U)$ 的比值意味着在 X 上满足 R 关系的个体相关于全集 U 所占的比例(程度). 因此, λ 被定义为公式 W 的一区间值,即多值. 于是定义一阶 Rough 逻辑公式(FORLF)如下.

定义 5. 设 $\lambda \in [\lambda_{*}, \lambda^{*}]$,且 W 是一阶逻辑公式,则 FORLF 归纳定义为:

(1)T(真)和$\perp$(假)是 FORLF;

(2)若 W 是一阶原子公式,则 λW 是 FORLF;

(3)若 W 和 W_1 是 FORLF,则 $\lambda W, \sim W, W \wedge W_1, W \vee W_1, W \rightarrow W_1, W \longleftrightarrow W_1, (\forall x)W, (\exists x)W, (\lambda(\forall x))W$ 和 $(\lambda(\exists x))W$ 也都是 FORLF;

(4)凡有限次引用(1)～(3)产生的公式均是 FORLF.

定义 6. 设 D 是非空个体域,且对 D 上的 FORLF W 的解释 I 是如下语义:

(1)对每个常量符号,指定 D 中的一个实体;

(2)对每个 n－元函数符号,指派 D^n 到 D 上的一个映射: $D^n \rightarrow D$;

(3)对每个 n－元谓词符号,指派 D^n 到 $\{0,[\lambda_{*},\lambda^{*}],1\}$ 的映射 $R: D^n \rightarrow \{0,[\lambda_{*},\lambda^{*}],1\}$.

注:因为 λ_{*} 可以为 0, λ^{*} 可以为 1,所以 $\{0,[\lambda_{*},\lambda^{*}],1\}$ 可简写成 $[\lambda_{*},\lambda^{*}]$ 或 $[0,1]$.

下面的定义给出了 Rough 逻辑真值联结词的语义,并记 $u_I(W)$ 为 FORLF W 的真值.

定义 7. 设 W 和 W_1 是 FORLF, I 是它们的一个解释,则真值联结词有如下语义:

(1)$u_I(T)=1$ 和 $u_I(\perp)=0$;

(2)$u_I(\sim W)$ 定义为 $1-u_I(W)$;

(3)$u_I(W \vee W_1)$ 定义为 $\max\{u_I(W), u_I(W_1)\}$;

(4)$u_I(W \wedge W_1)$ 定义为 $\min\{u_I(W), u_I(W_1)\}$;

(5)$u_I((\forall x)W(x))$ 定义为 $\min\{u_I(W(a_1)), u_I(W(a_2)), \cdots, u_I(W(a_n))\}$,

其中 $x \in \{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \subseteq D$, D 是所讨论的个体域.

其它逻辑联结词$\rightarrow$和$\longleftrightarrow$可以用$\sim$和$\vee$定义;量词$\exists$ 用$\sim$和$\forall$ 定义; $(\lambda(\forall x))W(x)$ 可以写成 $(\forall x)\lambda W(x)=(\forall x)W'(x)$. 其中 W' 是 FORLF;因此 $W'=\lambda * \lambda * \cdots * \lambda W$, n(λ 的数目)$=0,1,\cdots$. Rough 逻辑公式的语义模型为 $M=(U,R,u_I)$,其中 U 是个体域, R 是 U 上的等价关系, u_I 是解释 I 上的赋值函数.

5　Rough 逻辑的性质

在 Rough 逻辑中,假定有如下概念: $p,q,r,\cdots$ 是命题变元; $W, W_1, \cdots$ 表示 Rough 逻辑公式,它是用上述归纳方法定义的. Rough 逻辑公式的语义是用赋值函数 u_I 定义的,即这函数 u_I 赋予上述全域 D 上每个 Rough 逻辑公式 W 一真值 $\lambda \in [\lambda_{*}, \lambda^{*}]$. 对每个个体 $x \in D$, $u_I(W)=1$,就说公式 W 在模型 M 中为真; $u_I(W)=0$,则 W 在 M 中为假; $u_I(W)=\lambda \geqslant 0.5$,称 W 在 M 中为 Roughly 真; $u_I(W)=\lambda<0.5$,称 W 在 M 中 Roughly 假;分别写成$\models_M W$, $\models_M \sim W$, $|\approx_M W$ 和 $|\approx_M \sim W$. 当然公式 W 在 M 中为真当且仅当对每个个体 $x \in D$, W 都是真; W 在 M 中为假当且仅当对每个个体 $x \in D$, W 都是假. 于是,我们从这种 Rough 逻辑得到下面的性质:

性质 1. $\models_M W$ iff $|\neq_M \sim W$;

性质 2. $\models_M W > \models_M W_1$ iff $u_I(W) > u_I(W_1)$;

性质 3. $(u_I(W) > u_I(W_1)) \longleftrightarrow (W \rightarrow W_1)$;

性质 4. $(u_I(W) > u_I(W_1)) \rightarrow (u_I(\sim W_1) > u_I(\sim W))$;

性质 5. 如果$\models_M W \wedge \models_M W_1$,则 $u_I(W \vee W_1) \geqslant (u_I(W) \vee u_I(W_1))$;

性质 6. 如果$\models_M W \wedge \models_M W_1$,则 $u_I(W \wedge W_1) \leqslant (u_I(W) \vee u_I(W_1))$;

性质 7. 设 $W_1, W_2, \cdots, W_n, \cdots$ 是 Rough 逻辑中无穷公式序列,并且对每个 $i, 1 \leqslant i \leqslant n$, $u_I(W_i) < u_I(W_{i+1})$,则

(1)$u_I(\bigvee_{i=1}^{\infty} W_i) = \mathrm{Max}\{u_I(W_1), \ldots, u_I(W_n), \ldots\} = 1$;

(2)$u_I(\bigwedge_{i=1}^{\infty} \sim W_i) = \mathrm{Min}\{u_I(\sim W_1), \ldots, u_I(W_n), \ldots\} = 0$;

(3)$(u_I(\bigvee_{i=1}^{\infty} W_i) = 1) \longleftrightarrow (u_I(\bigwedge_{i=1}^{\infty} \sim W_i) = 0)$.

综上所述,基于 Rough 集理论的 Rough 数在实践中有应用价值;并且 Rough 近似程度算子被用于描述 Rough 逻辑公式,使得这些公式有恰当的数学意义.

6 结束语

我们基于 Rough 集理论定义了 Rough 平均近似程度 $\lambda_0 \in [\lambda_*, \lambda^*]$,并将它和专业领域中的经验值或依据某种理论推理得到的 α 一起构成了 Rough 数,即区间值:$[(1-\lambda_0)\alpha, (1+\lambda_0)\alpha]$,使得专业领域中引用近似值更接近于实际;Rough 近似程度算子 $\lambda \in [\lambda_*, \lambda^*]$又提供了 Rough 逻辑公式的语义解释,为进一步研究 Rough 逻辑及其近似推理迈出了具体的一步.

因 λ_* 和 λ^* 依赖于所论述的个体域 U 上的二元关系 R,随着 R 的性质不同,可以得到不同的 λ_* 和 λ^*,因此对 FORLF 的近似意义也不相同,每对 λ_* 和 λ^* 都有对应的近似系统.[7] 于是根据不同的 Rough 近似程度 λ_* 和 λ^*,可以得到各种不同近似的、带有 $\lambda \in [\lambda_*, \lambda^*]$算子的 Rough 逻辑公式演绎模型. 由此,对 Rough 数$[(1-\lambda_0)\alpha, (1+\lambda_0)\alpha]$以及 λ_* 和 λ^* 的研究确实是颇有意义的.

参考文献

1 Pawlak Z. Rough sets. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, **11(5)**: 341～356.

2 Pawlak Z. Rough logic. Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences, 1987, **35(5～6)**: 253～258.

3 Lee Richard C T, Liang Chang Chin. Some properties of fuzzy logic. In: formation and Control, 1971, **19**: 417～431.

4 Lin T Y, Liu Q. Logic systems for approximate reasoning: via rough sets and topology. Leiture Nots in Artificial Intelligence, Springer－Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1994, **869**: 65～74.

5 Wu T. Rough number structure and computation. Proceedings of The Third International Workshop on Rough Sets and Soft Computing, by San Jose State University, CA., U.S.A., 1994. 360～367.

6 Liu Q, Hua K D, Lin T Y. A model of topological reasoning expert system with application to an expert system for computer－aided diagnosis and treatment acupuncture and moxibustion. Proceedings of 2nd IASTED International Symposium, A Publition of the International Association of Science and Technology for Development－IASTED,

ISBN—0—88986—166—8 Hawall, U. S. A., August 15～17 1990. 123～126.

7 Yao Y Y, Li X, Lin T Y *et al*. Representation and classification of Rough set models. Proceedings of the Third International Workshop on Rough Sets and Soft Computing, by San Jose State University, CA., U. S. A., 1994. 630～637.

ROUGH NUMBER BASED ON ROUGH SETS AND LOGIC VALUES OF λ OPERATORS

Liu Qing　Wang Qianying

(*Department of Computer Science　Department of Mathematics　Nanchang University　Nanchang*　330029)

Abstract　This paper proposes rough number notion based on rough sets, and creats its operational laws. It illustrates its application in the practice. Finally, it describes theoretical value of rough approximate operator λ in rough logic.

Key words　Rough sets, Rough number, Rough logic, approximate operator.