基于图的任意域内点集的 Delaunay 三角剖分算法*

潘志庚 马小虎 董 军 石教英

(浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室 杭州 310027)

摘要 本文提出了一种基于图的二维任意域内点集的 Delaunay 三角剖分算法. 该算法首先求出任意域内点集的约束最小生成树,然后逐次加入一边构造三角形网格,最后通过局部优化变换,得到二维任意域内点集的 Delaunay 三角剖分. 本文还给出了该算法在有限元网格自动生成过程中的应用.

关键词 约束最小生成树,任意域,Delaunay 三角剖分,有限元网格.

二维 Delaunay 三角剖分(简记为 DT)是计算几何中一个值得研究的重要问题,有着广泛的应用背景,不少文献研究了它的性质[1~3]和生成算法.[3~6]它具有最小角最大的良好性质,因而许多实际应用中被认为是最优的三角剖分,特别是在有限元网格生成中得到了广泛应用,成为一种重要的网格生成方法.[7,8]

DT 是没有四点共圆的点集的凸包内的三角剖分. 但实际应用中往往存在四点共圆,在有限元网格生成这样的应用中,生成的三角形网格是任意域内点集的三角剖分,因此,传统的 DT 不适合这些情况. 为了将 DT 用于这些情况,只好采用一些弥补方法.[7,8]但是,这些方法改变了原有点集,并且增加的点会使得局部点分布过密,从而导致畸形单元,影响网格质量.

总之,用 DT 去解决任意域内点集的三角剖分存在许多问题,如果有的应用中不允许改变原来的点集,则以上方法都失败. 为了解决以上问题,文献[9]提出了二维任意域内点集的 Delaunay 三角剖分 DTAD(delaunay triangulation within arbitrary domain)的概念,DTAD 允许四点共圆,且是任意域内点集的三角剖分. DTAD 具有最小角最大和平均形态比最大的良好性质[9],因此,DTAD 能够应用于有限元网格生成及其它场合. 文献[10]给出了 DTAD 的一种生成算法,该算法首先用环切边界法生成边界 DTAD,然后使用生成核插入算法,并利用 DTAD 的插入、删除性质,得到二维任意域内点集的 Delaunay 三角剖分结果.

---

* 本文研究得到国家自然科学基金资助.作者**潘志庚**,1965 年生,副研究员,主要研究领域为分布式图形处理,虚拟环境,多媒体技术. **马小虎**,1964 年生,博士生,讲师,主要研究领域为中文信息处理,计算机图形学,虚拟环境. **董军**,1964 年生,博士生,主要研究领域为控制与决策,计算机仿真,面向对象程序设计. **石教英**,1937 年生,教授,博士导师,主要研究领域为计算机图形学,科学计算可视化,多媒体,虚拟环境.

本文通讯联系人:潘志庚,杭州 310027,浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室

本文 1996-06-20 收到修改稿

本文提出了一种新的基于图的 DTAD 生成算法,是作者在进行表面重构及三角形网格简化研究中得到的结果,并得到了较好的应用.该算法的基本思想包括如下 3 个主要步骤:

(1)求出二维任意域内点集的约束最小生成树(约束最小生成树等基本概念将在第 2 节中定义).

(2)逐次加入一边构造三角形网格,直到最后一对相关边被处理为止.

(3)按最小内角最大的优化准则,通过局部优化变换,得到 DTAD.

本文第 1 节给出了 DTAD 的定义及局部优化算法,第 2 节详细描述了本文提出的算法,该算法在有限元网格自动生成中的应用在第 3 节中给出,最后是结论.

1　DTAD 的定义及局部优化算法

二维任意域 D 内点集 V 的 Delaunay 三角剖分(记为 $DTAD(D,V)$)是所有内边都是局部优化的 $T(D,V)$.[9]其中 $T(D,V)$是域 D 内点集 V 的三角剖分.图 1 是 $DTAD(D,V)$的一个实例,如果域 D 是点集 V 的凸包形成的域,且 V 中无四点共圆,则 $DTAD$ 退化为 DT,$DTAD$ 不唯一,因为共圆的四点的 2 种三角剖分的内边都是局部优化的.

给定域 D 和点集 V,如果存在一个任意域内点集的三角剖分 $T(D,V)$,则对三角剖分中不是优化的边进行对角线交换(即局部优化操作,见图 2),可以在有限次的局部优化操作后转化为 $DTAD(D,V)$[9],这个算法称为局部优化算法.

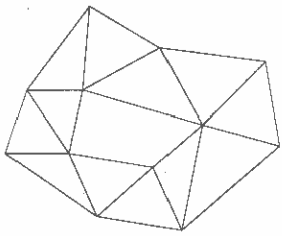


图1 DTAD(D,V)的一个实例

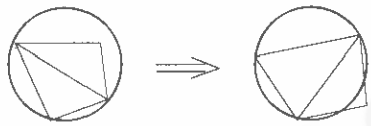


图2 局部优化操作

2　基于图的 DTAD 生成算法

为了后面叙述方便,我们先给出下面的定义和符号说明.

2.1　基本概念

2.1.1　定　义

定义 1. 设$\{P_1,P_2,\ldots,P_n\}$是一个平面点集,则欧几里德最小生成树(EMST)是一棵连接 P 中所有点的树,并且其边长之和为最小,简称最小生成树(MST).

定义 2. 设 $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$是二维任意域 D 内的一点集,$B\subset V$,并且是构成域 D 的所有边界点的集合,则 B 中的点可分为 D 的一个外环 OL 和若干个内环 IL(可以没有内环).并规定外环中的点按逆时针排列,内环中的点按顺时针排列.

定义 3. 设 $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$是二维任意域 D 内的一个点集,$B\subset V$,并且是构成域 D 的所有边界点的集合.令 B 中任意 2 个属于同一边界环(外环或内环)上的相邻点的欧氏距离为 0,然后求点集 V 的 EMST,则把所得到的最小生成树称为二维任意域 D 内点集 V 的约束最小生成树(CMST).

定义 4. 设图$G=(V,E)$,其中V是顶点集,E是边界集,若有边$e_{ik}=(v_i,v_k)$,$e_{ij}=(v_i,v_j)$,则称e_{ik}与e_{ij}为一对相关边. 有向边v_iv_k与v_iv_j之间的夹角为相关边对e_{ik},e_{ij}的夹角.

定义 5. 由图中所有相关边对所组成的链表称相关边对表(简记为IEPL).

定义 6. 由三角形网格中所有三角形所组成的表称为三角形网格表(简记为TML).

2.1.2 约 束

在向CMST中加入边形成三角形网格时,必须满足如下约束条件:

约束 1. 三角形相互之间是不相交的,即2个三角形除端点外无交点,称此约束为三角形相交约束.

约束 2. 三角形相互之间是互不包含的,即任一三角形不完全包含其它三角形,称此约束为三角形包含约束.

约束 3. 三角形全部落在域D的边界之内,称此约束为三角形合法约束.

注:由约束1和约束2保证了每条边最多被2个三角形共有,约束3保证了不生成二维任意域D的边界之外的三角形.

2.2 基于图的DTAD生成算法

DTAD的生成过程可用下面的算法来描述.

算法.

A1. 求出二维任意域D内点集V的约束最小生成树$CMST(D,V)$(参见辅助算法).

A2. 置$T(D,V)=CMST(D,V)$,并且把边界环上不包含在$CMST(D,V)$中的边加入到$T(D,V)$中.

A3. 根据$T(D,V)$,求出初始相关边对表IEPL.

A4. 初始化三角形网格表TML.

A5. 如果链表IEPL为空,则转A6. 否则,从中选择夹角最小的相关边对$e_{ij}=(v_i,v_j)$,$e_{ik}=(v_i,v_k)$,并从链表IEPL中删除该结点. 如果该相关边对构成的三角形$\triangle v_iv_jv_k$同时满足约束1~3,那么作以下操作:

(Ⅰ) 把三角形$\triangle v_iv_jv_k$加入到TML中;

(Ⅱ) 把新边$e_{jk}=(v_i,v_k)$加入到$T(D,V)$中;

(Ⅲ) 把新边$e_{jk}=(v_i,v_k)$引入的新的相关边对所形成的结点,链接到IEPL链表中,转A5.

A6. 调用局部优化算法(见第1节),把$T(D,V)$优化成$DTAD(D,V)$.

辅助算法.

B1. 计算出点集V中所有2点之间的距离,并存入距离数组$Dist[M]$. 其中$M=n(n-1)$,n为点集V中点的个数,数组$Dist$中每一元素包含3项:start存放起点;end存放终点;length存放2点之间的距离.

B2. 令二维任意域D边界上相邻2点的距离为0,即把数组$Dist$中相应元素的length项置为0.

B3. 按数组$Dist$中元素的length项的值从小到大排序数组$Dist$.

B4. $k\leftarrow 1$,$e\leftarrow 0$,并置$CMST(D,V)$为空.

B5. 当$e\leqslant n-1$,则作以下操作:

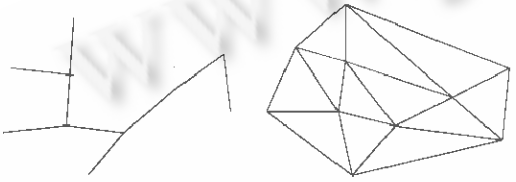
取 $u=Dist[k].start$, $v=Dist[k].end$,置 $k\leftarrow k+1$. 若边(u,v)与 $CMST(D,V)$中的边不构成回路,则把边(u,v)加入到 $CMST(D,V)$中,并置 $e\leftarrow e+1$.

算法的时间复杂度

由于算法的第 1 步 A1 即为辅助算法,所以,为了估算该算法的时间复杂度,首先要估算出辅助算法的时间复杂度. 而辅助算法中最耗时间的步骤是 B1,B3 和 B5,其中步骤 B1 需 $O(n^2)$的时间,步骤 B3 和 B5 所需的时间都不超过 $O(n^2)$. 因此,辅助算法的时间复杂度为 $O(n^2)$,其中 n 为任意域 D 内点集 V 中点的个数. 另外,算法中除第 1 步 A1 外,耗时较多的为步骤 A5 和 A6,步骤 A6 所需的时间不超过 $O(n^2)$,步骤 A5 所需的时间下限是 $O(n^2)$. 因此我们猜测 $DTAD(D,V)$的生成时间下限是 $O(n^2)$.

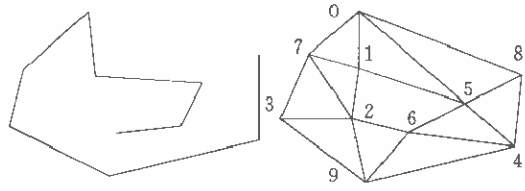
2.3 实　例

下面是一些实例,图 3 中分别为点集的最小生成树和点集的 Delaunay 三角剖分. 图 4 给出了相应的任意多边形区域内点集的约束最小生成树和任意多边形区域内点集的 Delaunay 三角剖分. 在图 4(b)中,内边界由顶点 1、5、6、2 组成,外边界由顶点 0、7、3、9、4、8 组成.



(a)点集的最小生成树　(b)点集的Delaunay三角剖分

图3



(a)任意多边形区域内点集的约束最小生成树　(b)任意多边形区域内点集的Delaunay三角剖分

图4

3　算法在有限元网格自动生成中的应用

由于 Delaunay 三角剖分能够尽可能避免病态三角形的出现,故很适合作为有限元网格自动生成算法的基础.[7,8]图 5 给出了环形区域内点集的 Delaunay 三角剖分. 图 6 是采用本文的 DTAD 生成算法对只有边界点所组成的任意 D 内点集 V(即任意多边形)的三角剖分结果.

图 5 环形区域内点集的 Delaunay 三角剖分

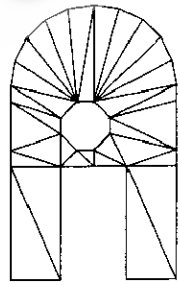


图 6 非直线型边界拟合及其 Delaunay 三角剖分

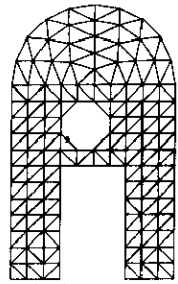


图 7 任意多边形的有限元网格自动生成

从图 6 可知,当任意多边形的边界复杂时,Delaunay 三角剖分所生成的网格远不能满足有限元分析的要求,大多数三角形都是细长型,而有限元分析要求单元形状趋于理想状

态，即等边三角形.为此，可采用一定算法在直线型边界线段及多边形内部进一步布置适当数量的新节点，逐步提高Delaunay三角剖分的网格质量，直至满足有限元分析的要求为止.这样如图7所示的任意多边形的有限元网格自动生成，最终归结为二维任意域D内点集V的Delaunay三角剖分.

4 结 论

(1)本文给出的基于图的DTAD生成算法适用于计算机图形学的许多领域，由于以Delaunay三角剖分的优良性质为基础，故特别适宜于有限元网格的自动生成.

(2)该算法不需要引入"桥边"将带有内孔的任意多边形统一转化为"非自交多边形"，然后再进行"非自交多边形"的三角剖分.[11]该算法也不需要先将多连通域变为单连通域，然后，利用环切边界法生成边界$DTAD$，在此基础上逐步将内点插入到已有的$DTAD$，最后生成$DTAD(D,V)$.[10]

(3)把本文提到的算法思想推广到三维空间，在最小生成树的基础上生成曲面描述图，然后对曲面描述图进行局部三角剖分，这样可以从一组空间散乱数据点重构物体的表面.[12]

(4)本文给出的算法基于约束最小生成树，思路比较清晰，程序编写也比较简单，通用性强.以上所有算法已在SUN SPARC工作站上用C语言实现，并已用在多细节层次模型自动生成的研究中，取得了令人满意的结果.

参考文献

1 Prepatata F P, Shamos M I. Computational geometry, an introduction. New York: Springer-Verlag, 1985.

2 Lawson C L. Properties of n-dimensional triangulation. CAGD, 1986,**3**:231～246.

3 Lee D T, Schachter B J. Two algorithms for constructing a delaunay triangulation. Int. J. Computer and Information Science, 1980,**9(3)**:219～242.

4 Nelson J M. A triangulation algorithm for arbitrary planar domains. Appl. Math. Modelling, 1978,**2**:151～159.

5 Lewis B A, Robinson J S. Triangulation of planar regions with applications. The Computer Journal, 1977,**21(4)**:324～332.

6 Bowyer A. Computing dirichlet tessellations. The Computer Journal, 1981,**24(2)**:162～166.

7 K Ho-le. Finite element mesh generation methods: a review and classification. CAD, 1988,**20(1)**.

8 Sapidis N, Perucchio R. Delaunay triangulation of arbitrarily shaped planar domains. CAGD, 1991,**8(6)**:421～437.

9 闵卫东，唐泽圣.二维任意域内点集的Delaunay三角划分的研究.计算机学报，1995，**18(5)**:357～364.

10 闵卫东，唐泽圣.二维任意域内点集的Delaunay三角划分生成算法.计算机学报，1995，**18(5)**:365～371.

11 陈向平，应道宁.统一于NIP的多边形三角剖分算法.计算机学报，1989，**12(3)**:194～199.

12 Robert Mencl. A graph-based approach to surface reconstruction. Computer Graphics Forum, 1995,**14(3)**:445～456.

A GRAPH-BASED ALGORITHM FOR GENERATING THE DELAUNAY TRIANGULATION OF A POINT SET WITHIN AN ARBITRARY 2D DOMAIN

Pan Zhigeng　Ma Xiaohu　Dong Jun　Shi Jiaoying

(*State Key Laboratory of CAD&CG　Zhejiang University　Hangzhou*　310027)

Abstract　A graph-based algorithm for generating the delaunay triangulation of a point set within an arbitrary 2D domain (denoted as DTAD for short) is presented in this paper. The basic idea is to calculate the CMST (constrained minimum spanning tree) of the given points within an arbitrary 2D domain. The CMST is then augmented to triangle mesh. Finally the DTAD is obtained by local optimal transformation. The actual application of the algorithm in the automatic finite element mesh generation is also shown in the paper.

Key words　Constrained minimum spanning tree, arbitrary domain, delaunay triangulation, finite element mesh.